POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA



Ciągi liczbowe i ich granice

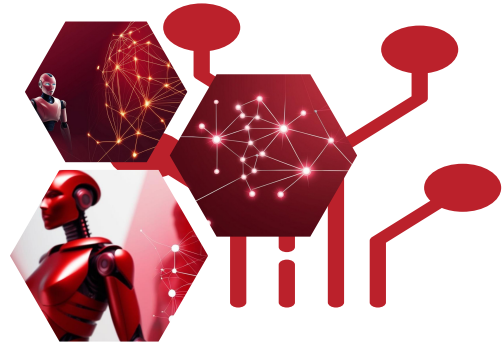
dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Plan wykładu

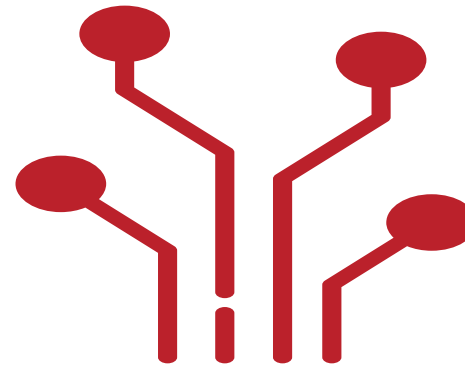
- Ciąg liczbowy
  - Definicja ciągu liczbowego
  - Ciąg arytmetyczny
  - Ciąg geometryczny
- Granica ciągu liczbowego
  - Definicja i własności
  - Symbole nieoznaczone
  - Twierdzenie o trzech ciągach
  - Liczba e



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

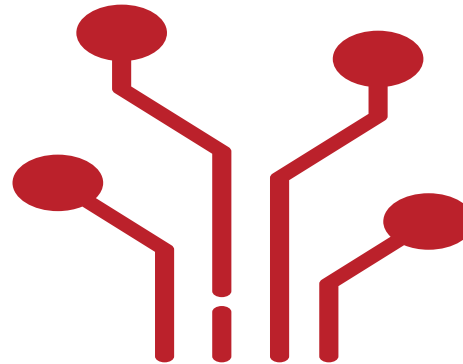
Ciąg liczbowy



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Definicja ciągu liczbowego



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Definicja

Nieskończonym ciągiem liczbowym nazywamy dowolną funkcję $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{R}$ określoną na zbiorze liczb naturalnych o wartościach rzeczywistych.

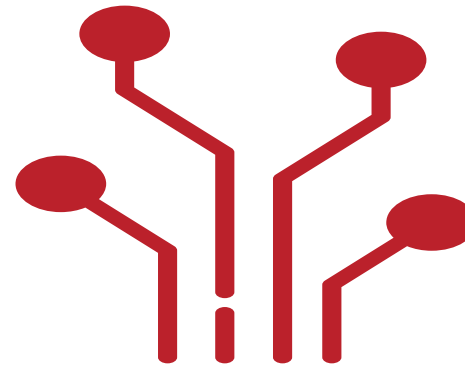
Zwyczajowo, zamiast $f(n)$ piszemy a_n.

a_n oznacza n-ty wyraz ciągu
(a_n) oznacza ciąg liczbowy

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Ciąg arytmetyczny



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Ciąg arytmetyczny – definicja

Definicja

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **arytmetycznym**, *jeżeli istnieje taka liczba r, że dla każdego n spełniony jest warunek*

$$a_{n+1} - a_n = r.$$

Liczbę r nazywamy **różnicą** ciągu arytmetycznego.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Ciąg arytmetyczny – najważniejsze wzory

Wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

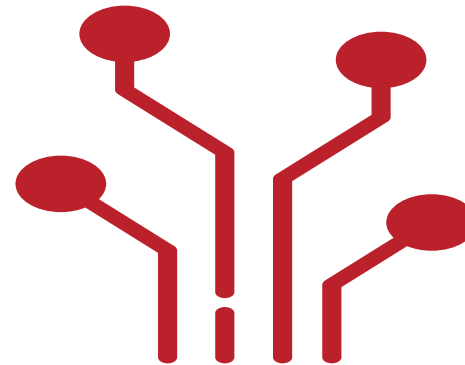
Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Ciąg geometryczny



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Ciąg geometryczny – definicja

Definicja

Ciąg liczbowy (a_n) *nazywamy* **geometrycznym**, *jeżeli istnieje taka liczba* q, *że dla każdego* n *spełniony jest warunek*

$$a_{n+1} = q \cdot a_n.$$

Liczbę q nazywamy **ilorazem** ciągu geometrycznego.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Ciąg geometryczny – najważniejsze wzory

Wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

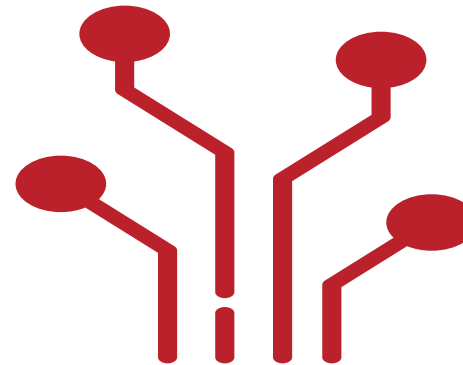
Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, & \text{gdy } q \neq 1 \\ na_1, & \text{gdy } q = 1 \end{cases}$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

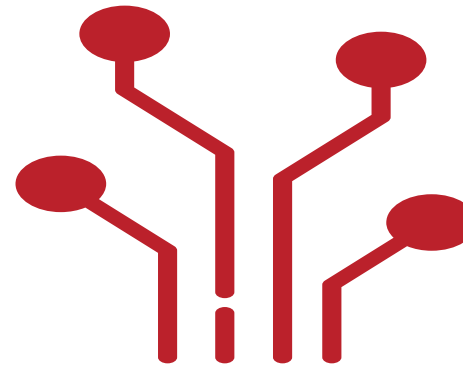
Granica ciągu liczbowego



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Definicja i własności



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Zbieżność ciągu liczbowego do granicy skończonej

Definicja

Mówimy, że ciąg liczbowy (a_n) *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista* g *taka, że*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{n>\delta}|a_n - g| < \varepsilon.$$

Liczbę g nazywamy *granicą* ciągu (a_n).
Fakt ten wyrażamy symbolicznie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Ważna granica

Twierdzenie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Jednoznaczność granicy ciągu

Twierdzenie

Jeżeli ciąg jest zbieżny, to posiada dokładnie jedną granicę.

Twierdzenie

Każdy podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Działania arytmetyczne na granicach ciągów zbieżnych

Twierdzenie

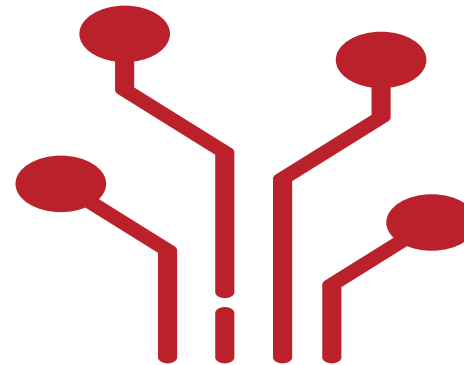
Niech dane będą dwa ciągi zbieżne do granic skończonych: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Wówczas*

- $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$;
- $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$;
- *jeżeli ponadto* $b_n \neq 0$ *oraz* $b \neq 0$, *to* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Symbole nieoznaczone



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\frac{0}{0}$
- $\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$
- 1^{∞}
- 0^{0}
- ∞^{0}

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Zbieżność ciągu liczbowego do nieskończoności

Definicja

Mówimy, że ciąg liczbowy (a_n) *jest zbieżny do* $+\infty$ *wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek*

$$\forall_{M>0}\exists_{\delta>0}\forall_{n>\delta}\ a_n > M.$$

Fakt ten wyrażamy symbolicznie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Zbieżność ciągu liczbowego do nieskończoności

Definicja

Mówimy, że ciąg liczbowy (a_n) *jest zbieżny do* $-\infty$ *wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek*

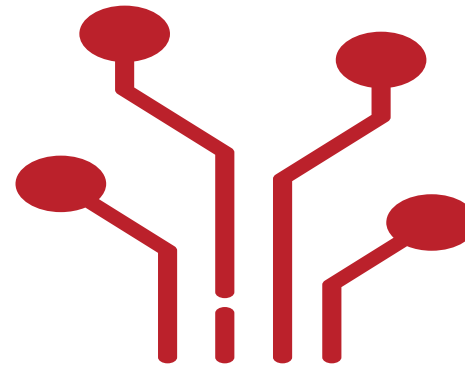
$$\forall_{M>0}\exists_{\delta>0}\forall_{n>\delta}\ a_n < -M.$$

Fakt ten wyrażamy symbolicznie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie o trzech ciągach



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

Niech (a_n), (b_n), (c_n) *będą ciągami liczbowymi takimi, że*

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$,
- $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, *dla* $n \geqslant k$ *dla pewnego* $k \in \mathbb{N}_+$.

Wtedy ciąg liczbowy (b_n) *jest zbieżny oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Wniosek

Iloczyn ciągu zbieżnego do 0 i ciągu ograniczonego jest ciągiem zbieżnym do 0.

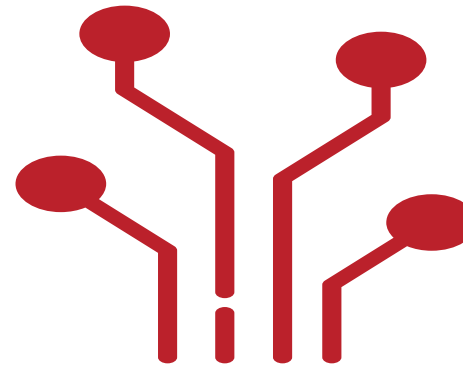
Twierdzenie

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Liczba e



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

Ciąg liczbowy o wyrazie ogólnym $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ *jest zbieżny.*

Definicja

Granicę ciągu liczbowego o wyrazie ogólnym $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ *nazywamy stałą Eulera i oznaczamy symbolem* e.

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenia o ciągach zbieżnych do e

Twierdzenie

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenia o ciągach zbieżnych do e

Twierdzenie

Niech (a_n) *i* (b_n) *będą ciągami takimi, że*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$ *oraz istnieje granica* $$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n.$$

Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)}.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA

Dziękuję za uwagę

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego

Rzeczpospolita Polska

Dofinansowane przez Unię Europejską

POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA



Granica funkcji
Ciągłość funkcji
Asymptoty wykresu funkcji

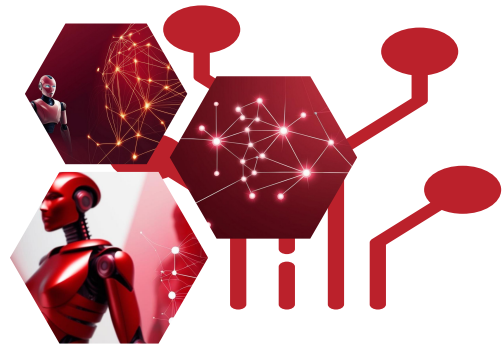
dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Plan wykładu

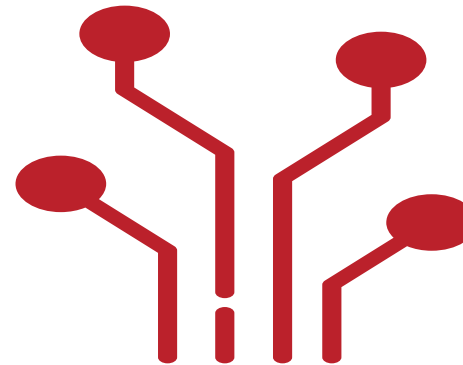
- Granica funkcji
  - Punkt skupienia zbioru
  - Definicja granicy funkcji w punkcie (wg Heinego)
  - Działania arytmetyczne na granicach funkcji
  - Twierdzenie o trzech granicach
- Ciągłość funkcji
  - Funkcja ciągła w punkcie i na zbiorze
  - Własności funkcji ciągłych
- Asymptoty wykresu funkcji



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

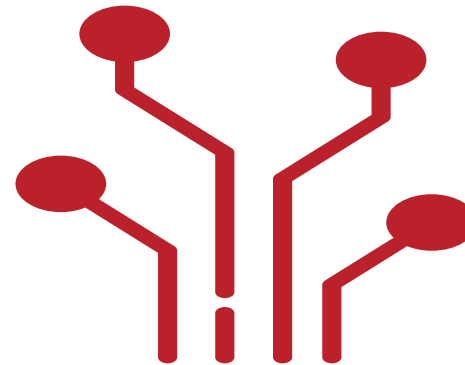
Granica funkcji



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Punkt skupienia zbioru



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Definicja

Otoczeniem punktu x_0 o promieniu $r > 0$ nazywamy przedział otwarty $(x_0 - r, x_0 + r)$.

Definicja

Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym zbiorem.

Mówimy, że punkt x_0 jest punktem skupienia zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym otoczeniu o środku w punkcie x_0 istnieją elementy zbioru A różne od x_0.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Uwaga

Punkt x_0 może, lecz nie musi należeć do zbioru A.

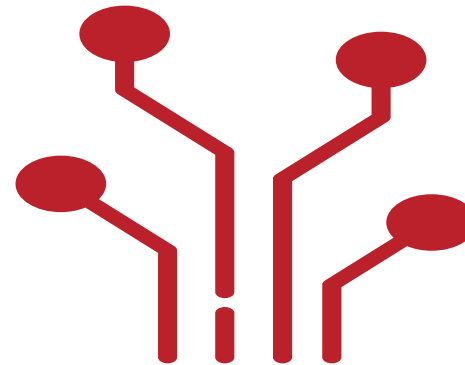
Przykład

Punktami skupienia zbioru $A = (-\infty, -5) \cup [-1, 2) \cup \{3\}$ są wszystkie punkty należące do zbioru $(-\infty, -5] \cup [-1, 2]$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Definicja granicy funkcji w punkcie (wg Heinego)



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Definicja

Niech $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ *i niech* x_0 *będzie punktem skupienia zbioru* D_f.
Mówimy, że liczba g *jest granicą funkcji* f *w punkcie* x_0 *wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu punktów* (x_n) *takiego, że* $x_n \in D_f$, $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$, *ciąg liczbowy* $(f(x_n))$ *jest zbieżny do liczby* g.

Piszemy wówczas:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Analogicznie definiujemy granice niewłaściwe funkcji,
tzn. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ oraz $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$,

granice jednostronne funkcji,
tzn. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = g$ oraz $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = g$,

oraz granice funkcji w nieskończoności,
tzn. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = g$ oraz $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = g$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

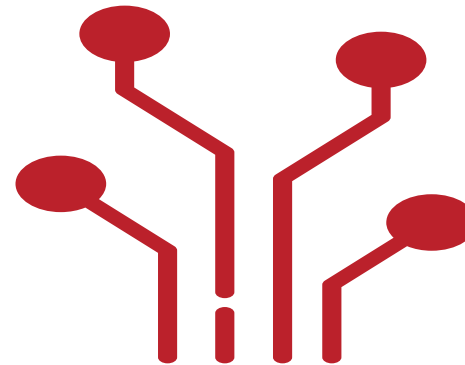
Twierdzenie

Granica funkcji f w punkcie x_0 istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice jednostronne funkcji f w tym punkcie i są sobie równe.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Działania arytmetyczne na granicach funkcji



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

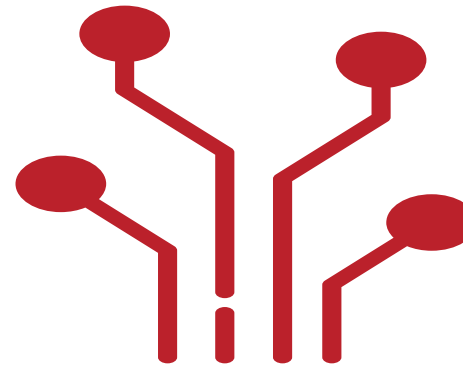
Niech $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g_1$ *oraz* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g_2$.

Wówczas

- $\lim\limits_{x\to x_0} \big[f(x) \pm g(x)\big] = g_1 \pm g_2$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} \big[f(x)g(x)\big] = g_1 g_2$,
- *jeżeli ponadto* $g(x) \neq 0$ *w pewnym otoczeniu punktu* x_0 *oraz* $g_2 \neq 0$, *to*
  $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{g_1}{g_2}$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00
Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie o trzech granicach



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

Niech f_1, f_2 *oraz* f_3 *będą funkcjami takimi, że*

- $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_3(x) = g$,
- $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x)$ *w pewnym otoczeniu punktu* x_0.

Wtedy $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = g$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

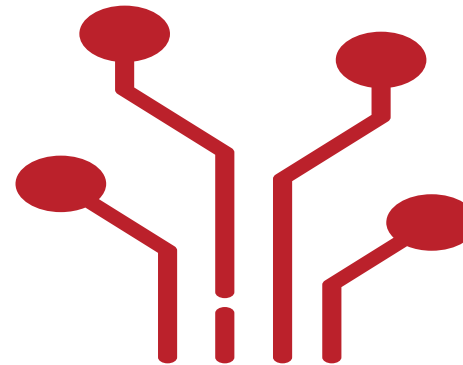
Ważne granice

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$
- $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

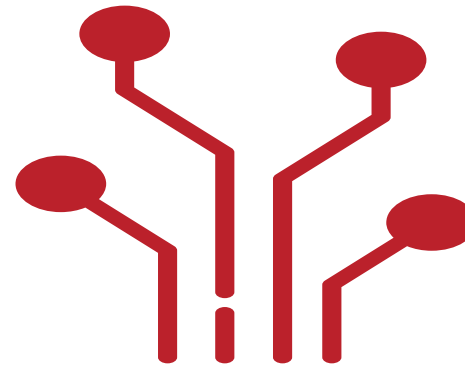
Ciągłość funkcji



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcja ciągła w punkcie i na zbiorze



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcja ciągła w punkcie

Definicja

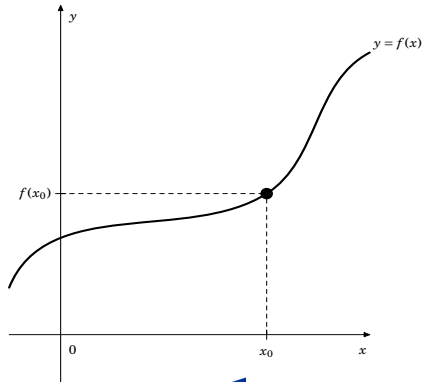
Jeżeli punkt x_0 jest punktem skupienia zbioru D_f, to funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona granica funkcji w punkcie x_0 i granica ta jest równa wartości funkcji w tym punkcie, tzn. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Analogicznie definiujemy ciągłość jednostronną funkcji w punkcie.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

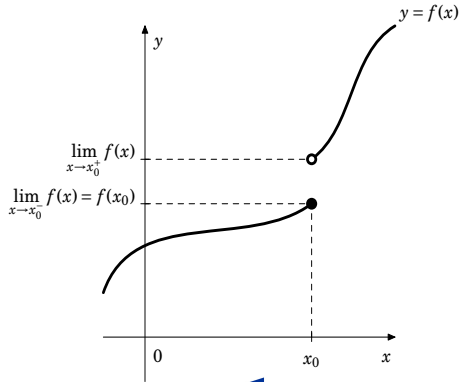
Funkcja ciągła w punkcie x_0



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

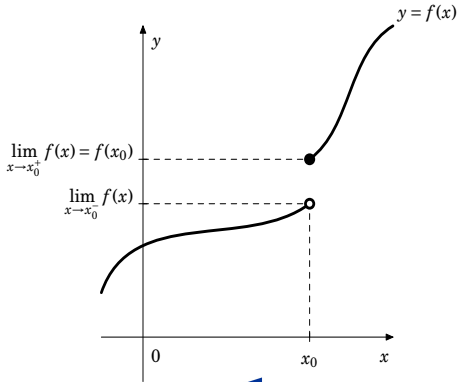
Funkcja lewostronnie ciągła w punkcie x_0



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

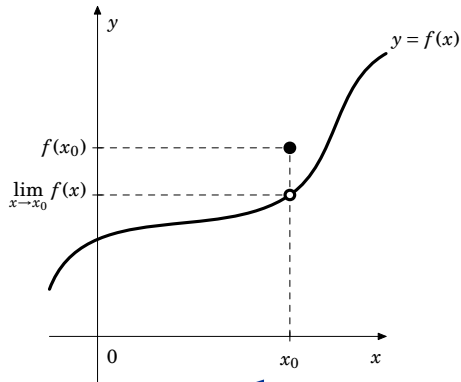
Funkcja prawostronnie ciągła w punkcie x_0



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcja nieciągła w punkcie x_0



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcja ciągła na zbiorze

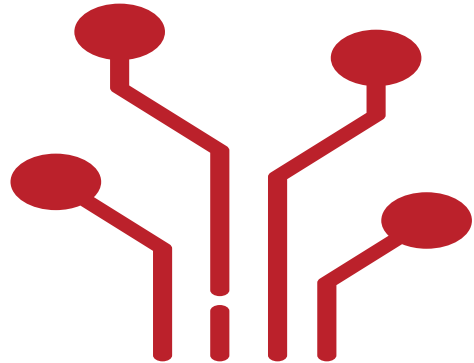
Definicja

Mówimy, że funkcja jest ciągła na zbiorze A, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Własności funkcji ciągłych



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

Funkcje wielomianowe, wymierne, potęgowe, trygonometryczne, logarytmiczne i wykładnicze są ciągłe w swoich dziedzinach.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

Niech dane będą dwie funkcje $f\colon A \to \mathbb{R}$ oraz $g\colon A \to \mathbb{R}$ ciągłe w punkcie x_0.

Wówczas funkcje $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ oraz $\dfrac{f}{g}$ (jeżeli $g(x_0) \neq 0$) są ciągłe w punkcie x_0.

Twierdzenie

Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Definicja

Mówimy, że funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ ma w zbiorze A własność Darboux, jeżeli wraz z dwiema swoimi wartościami przyjmuje w zbiorze A każdą wartość leżącą między nimi.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

Funkcja ciągła na przedziale $[x_1, x_2]$ ma w nim własność Darboux.

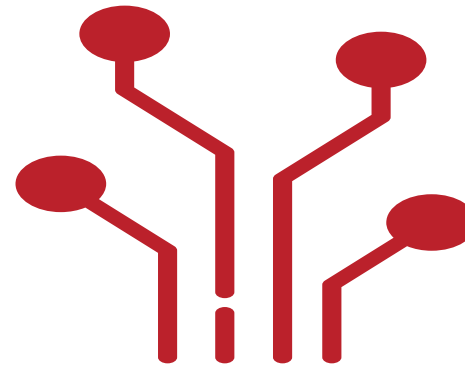
Wniosek

Jeżeli f jest funkcją ciągłą na przedziale $[x_1, x_2]$ oraz $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, to funkcja f ma w przedziale (x_1, x_2) miejsce zerowe.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Asymptoty wykresu funkcji



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Asymptoty pionowe wykresu funkcji

Definicja

Prostą o równaniu $x = c$ *nazywamy asymptotą pionową lewostronną (prawostronną) wykresu funkcji* f *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$$

$$\left(\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty \right)$$

Jeżeli prosta jest asymptotą pionową lewo- i prawostronną, to nazywamy ją asymptotą pionową obustronną.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Asymptoty poziome wykresu funkcji

Definicja

Prostą o równaniu $y = b$ *nazywamy asymptotą poziomą lewostronną (prawostronną) wykresu funkcji* f *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

$$\left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \right)$$

Jeżeli prosta jest asymptotą poziomą lewo- i prawostronną, to nazywamy ją asymptotą poziomą obustronną.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Asymptoty ukośne wykresu funkcji

Definicja

Prostą o równaniu $y = ax + b$ *nazywamy asymptotą ukośną lewostronną (prawostronną) wykresu funkcji* f *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

$$\left(\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \right)$$

Jeżeli prosta jest asymptotą ukośną lewo- i prawostronną, to nazywamy ją asymptotą ukośną obustronną.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Asymptoty ukośne wykresu funkcji

Twierdzenie

Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną lewostronną wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją skończone granice

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \textit{oraz} \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax) = b.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Asymptoty ukośne wykresu funkcji

Twierdzenie

Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną prawostronną wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją skończone granice

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \textit{oraz} \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA

Dziękuję za uwagę

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego

Rzeczpospolita Polska

Dofinansowane przez Unię Europejską

POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA



Pochodna funkcji
Podstawowe wzory na pochodne

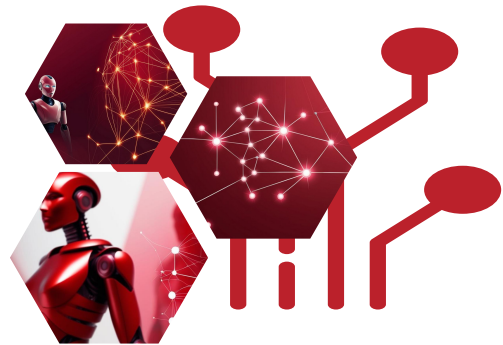
dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Plan wykładu

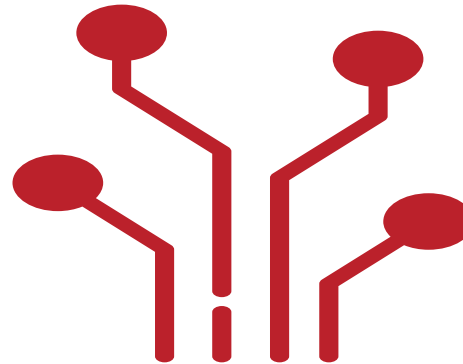
- Definicja pochodnej
  - Iloraz różnicowy
  - Pochodna funkcji w punkcie
  - Pochodna funkcji na przedziale
- Podstawowe wzory na pochodne
  - Pochodne ważniejszych funkcji elementarnych
  - Działania arytmetyczne na pochodnych funkcji
  - Twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej
  - Postać logarytmiczno-wykładnicza funkcji



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

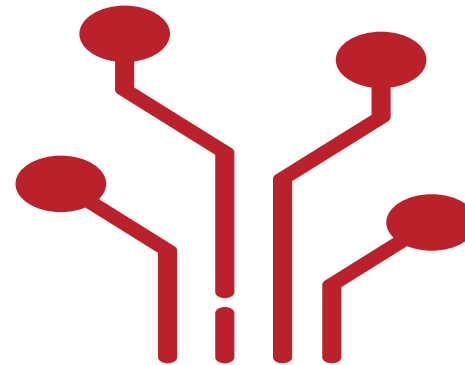
Definicja pochodnej



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Iloraz różnicowy



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na przedziale $(x_0 - r, x_0 + r)$, gdzie $r > 0$.

Definicja

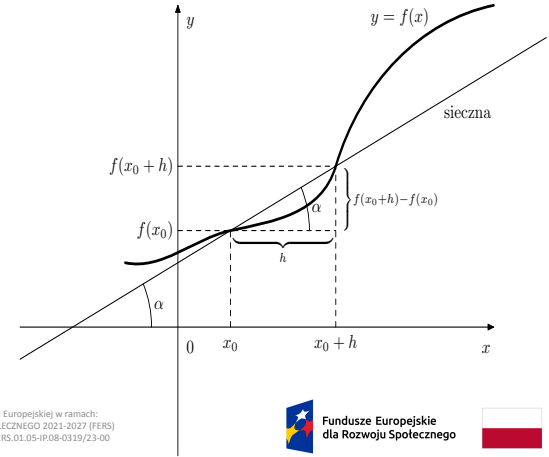
Ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0 odpowiadającym przyrostowi h, gdzie $0 < |h| < r$, nazywamy liczbę

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

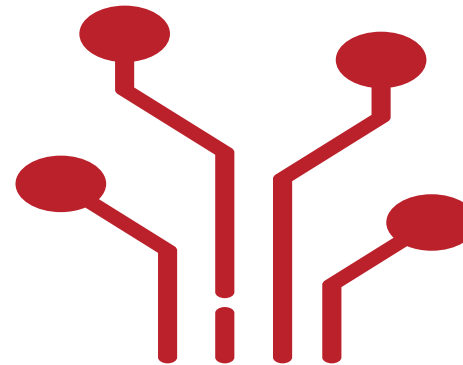
Interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego

Iloraz różnicowy jest równy tangensowi kąta nachylenia siecznej przechodzącej przez punkty $(x_0, f(x_0))$ oraz $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ do dodatniej półosi Ox.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Pochodna funkcji w punkcie



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na przedziale $(x_0 - r, x_0 + r)$, gdzie $r > 0$.

Definicja

Jeśli istnieje skończona granica

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

to nazywamy ją pochodną funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy symbolem $f'(x_0)$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

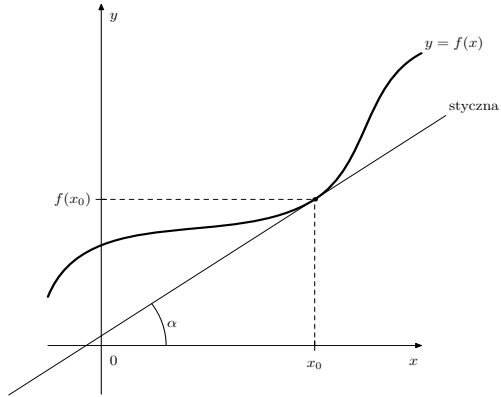
Mówimy wtedy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0.

Jeżeli granica ilorazu różnicowego w punkcie x_0 nie istnieje lub jest nieskończona, to mówimy, że funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie x_0.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Interpretacja geometryczna pochodnej



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Interpretacja geometryczna pochodnej

Pochodna funkcji w punkcie x_0 jest równa tangensowi kąta nachylenia stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ do dodatniej półosi Ox.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Równanie stycznej do wykresu funkcji

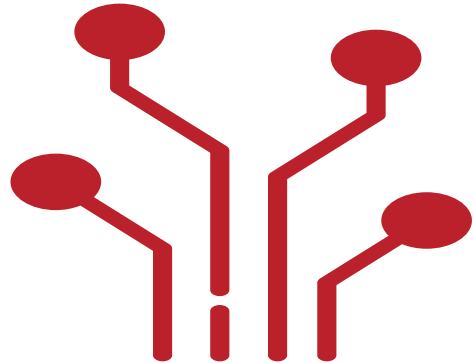
Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Pochodna funkcji na przedziale



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcja ma pochodną na przedziale otwartym P wtedy i tylko wtedy, gdy ma pochodną w każdym punkcie tego przedziału.

Definicja

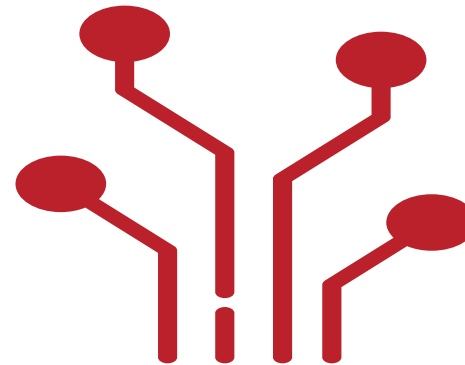
Funkcję określoną na przedziale P, której wartości w punktach x tego przedziału są równe $f'(x)$ nazywamy pochodną funkcji f na przedziale P i oznaczamy symbolem f'.

$$f' : x \longmapsto f'(x), \quad x \in P$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

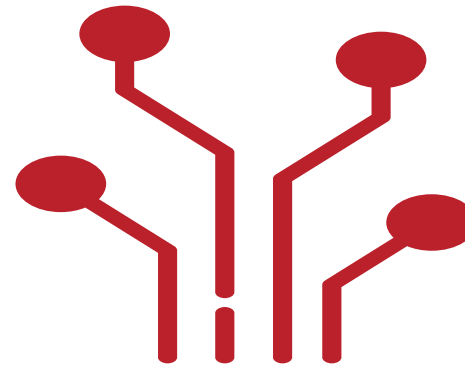
Podstawowe wzory na pochodne



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Pochodne ważniejszych funkcji elementarnych



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

- $(c)' = 0, \;\; c \in \mathbb{R}$
- $(x^p)' = px^{p-1}, \;\; p \in \mathbb{R}$, zakres zmienności x zależy od p
- $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}, \;\; x \in \mathbb{R} - \{0\}$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \;\; x \in \mathbb{R}_+$
- $(\sin x)' = \cos x, \;\; x \in \mathbb{R}$
- $(\cos x)' = -\sin x, \;\; x \in \mathbb{R}$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

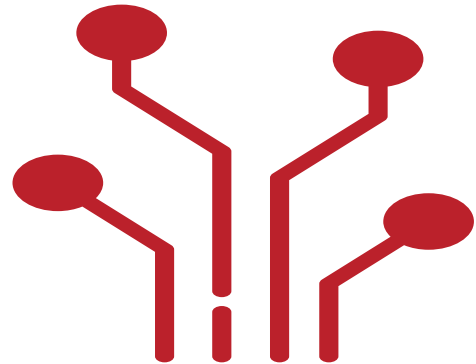
Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

- $(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$
- $(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \ x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$
- $(a^x)' = a^x \ln a, \ a > 0, \ x \in \mathbb{R}$
- $(e^x)' = e^x, \ x \in \mathbb{R}$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \ a > 0, \ a \neq 1, \ x > 0$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}, \ x > 0$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Działania arytmetyczne na pochodnych funkcji



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie x, to:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;
- $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$;
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, *o ile* $g(x) \neq 0$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

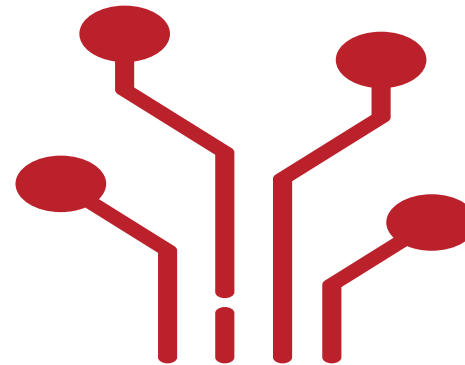
Wniosek

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x, zaś $c \in \mathbb{R}$, to $(cf)'(x) = cf'(x)$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x oraz funkcja g jest różniczkowalna w punkcie $f(x)$, to funkcja $g \circ f$ jest różniczkowalna w puncie x oraz

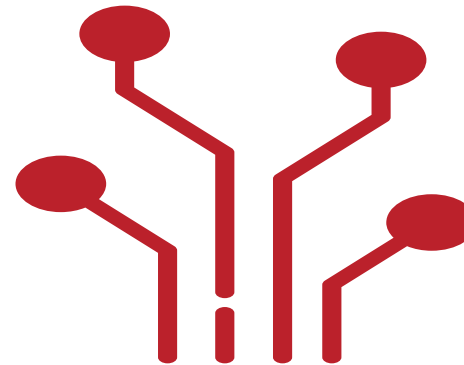
$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x),$$

gdzie $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Postać logarytmiczno-wykładnicza funkcji



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Każdą funkcję złożoną postaci $[f(x)]^{g(x)}$ można przedstawić w postaci logarytmiczno-wykładniczej:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

Postać logarytmiczno-wykładniczą stosujemy do obliczania pochodnych funkcji danych w postaci $[f(x)]^{g(x)}$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA

Dziękuję za uwagę

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego

Rzeczpospolita Polska

Dofinansowane przez Unię Europejską

POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA



Monotoniczność i ekstrema funkcji

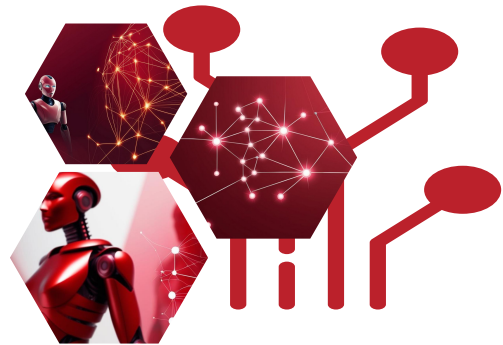
dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Plan wykładu

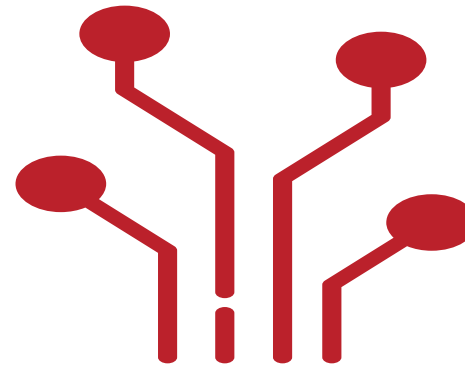
- Różniczkowalność funkcji
  - Związek różniczkowalności z ciągłością
  - Związek różniczkowalności z monotonicznością
- Ekstrema lokalne funkcji
  - Definicja ekstremum lokalnego funkcji
  - Warunki na istnienie ekstremum
- Ekstrema globalne funkcji



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

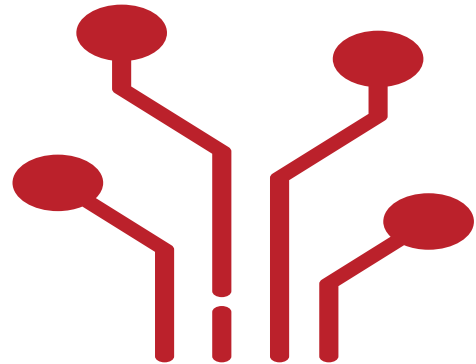
Różniczkowalność funkcji



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Związek różniczkowalności z ciągłością



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to jest w tym punkcie ciągła.

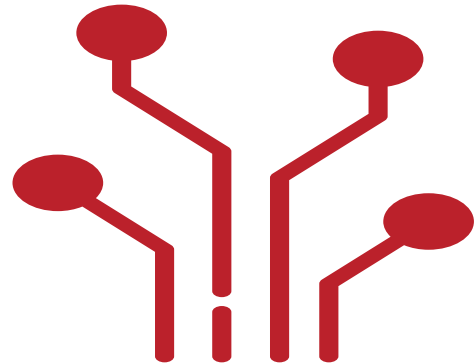
Uwaga

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Związek różniczkowalności z monotonicznością



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

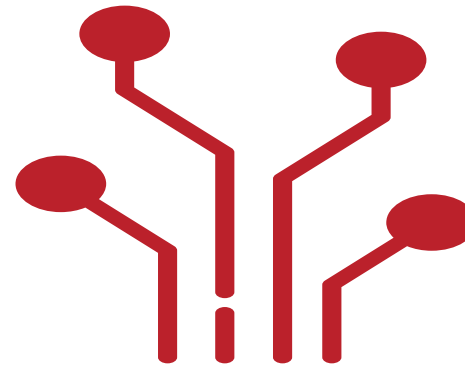
Niech P oznacza dowolny przedział.
Jeżeli dla każdego $x \in P$ funkcja f spełnia warunek:

1. $f'(x) = 0$, *to funkcja f jest stała na P;*
2. $f'(x) > 0$, *to funkcja f jest rosnąca na P;*
3. $f'(x) \geqslant 0$, *to funkcja f jest niemalejąca na P;*
4. $f'(x) < 0$, *to funkcja f jest malejąca na P;*
5. $f'(x) \leqslant 0$, *to funkcja f jest nierosnąca na P.*

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

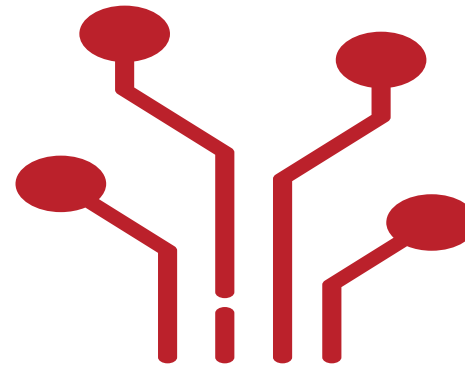
Ekstrema lokalne funkcji



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Definicja ekstremum lokalnego funkcji



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Minimum lokalne

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ i f będzie funkcją określoną przynajmniej w otoczeniu punktu x_0, ciągłą w punkcie x_0 i różniczkowalną przynajmniej w sąsiedztwie $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ punktu x_0.

Definicja

Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D_f$ minimum lokalne, jeżeli istnieje taka $\delta > 0$, że dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ zachodzi warunek $f(x) > f(x_0)$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Maksimum lokalne

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ i f będzie funkcją określoną przynajmniej w otoczeniu punktu x_0, ciągłą w punkcie x_0 i różniczkowalną przynajmniej w sąsiedztwie $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ punktu x_0.

Definicja

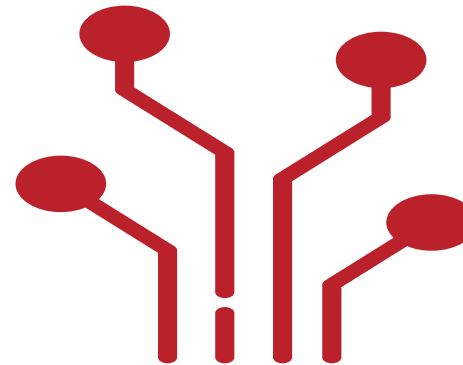
Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D_f$ maksimum lokalne, jeżeli istnieje taka $\delta > 0$, że dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ zachodzi warunek $f(x) < f(x_0)$.

Minima i maksima lokalne funkcji nazywamy *ekstremami lokalnymi*.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Warunki na istnienie ekstremum



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej

Twierdzenie

(Twierdzenie Fermata) Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz posiada ekstremum lokalne w tym punkcie, to $f'(x_0) = 0$.

Uwaga

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

I warunek dostateczny istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej

Twierdzenie

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ i f będzie funkcją określoną przynajmniej w otoczeniu punktu x_0, ciągłą w punkcie x_0 i różniczkowalną przynajmniej w sąsiedztwie punktu x_0.
Jeżeli istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$\text{dla } x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ zachodzi } f'(x) > 0$$
$$\text{oraz dla } x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ zachodzi } f'(x) < 0,$$

to w punkcie x_0 funkcja f ma maksimum lokalne.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

I warunek dostateczny istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej

Twierdzenie

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ i f będzie funkcją określoną przynajmniej w otoczeniu punktu x_0, ciągłą w punkcie x_0 i różniczkowalną przynajmniej w sąsiedztwie punktu x_0.
Jeżeli istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$\text{dla } x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ zachodzi } f'(x) < 0$$
$$\text{oraz dla } x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ zachodzi } f'(x) > 0,$$

to w punkcie x_0 funkcja f ma minimum lokalne.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Pochodne wyższych rzędów

Definicja

Pochodną n-tego rzędu funkcji f w punkcie x_0 definiujemy rekurencyjnie

$$f^{(n)}(x_0) = \left[f^{(n-1)}\right]'(x_0) \quad \text{dla} \quad \mathrm{n} \geqslant 1.$$

Przyjmujemy, że

$$f^{(0)}(x_0) = f(x_0),\ f^{(1)}(x_0) = f'(x_0),\ f^{(2)}(x_0) = f''(x_0),\ f^{(3)}(x_0) = f'''(x_0).$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

II warunek dostateczny istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej

Twierdzenie

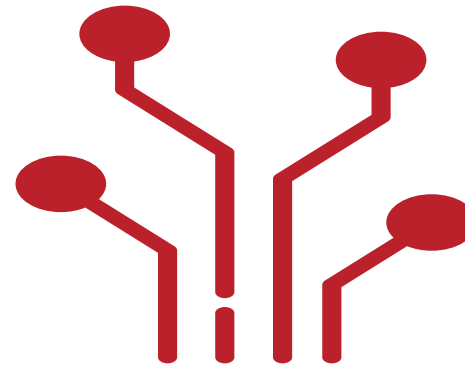
Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ i f będzie funkcją określoną przynajmniej w otoczeniu punktu x_0. Jeżeli

1. $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,
2. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$,

to, gdy $n \geqslant 2$ jest parzyste, funkcja f osiąga w punkcie x_0 ekstremum lokalne, przy czym jest to minimum, gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$, zaś maksimum gdy $f^{(n)}(x_0) < 0$.
Gdy n jest nieparzyste, ekstremum nie występuje.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00
Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Ekstrema globalne funkcji



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Wartość najmniejsza i największa funkcji na przedziale

- Funkcja ciągła osiąga na przedziale domkniętym wartość najmniejszą i największą.
- Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna poza skończoną liczbą punktów tego przedziału, to wartość najmniejsza i największa funkcji na tym przedziale może wystąpić:
  - na końcach a i b przedziału $[a, b]$
    lub
  - w punktach z przedziału (a, b), w których pochodna funkcji f zeruje się lub w których pochodna nie istnieje.

Wartość najmniejszą funkcji oraz wartość największą funkcji nazywamy *ekstremami globalnymi*.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA

Dziękuję za uwagę

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego

Rzeczpospolita Polska

Dofinansowane przez Unię Europejską

POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA



Wklęsłość i wypukłość funkcji Reguła de l'Hospitala

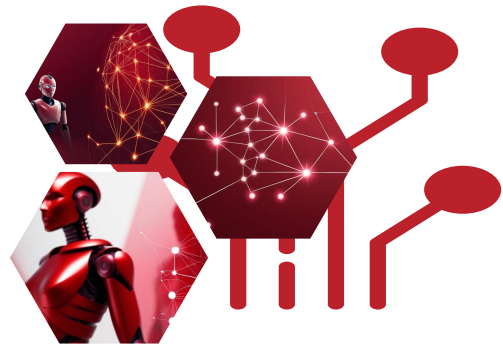
dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Plan wykładu

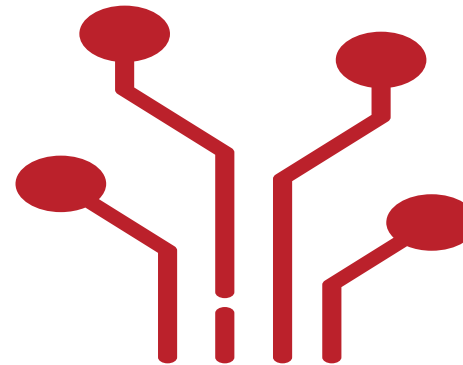
- Wklęsłość i wypukłość fukcji
  - Funkcja wypukła
  - Funkcja wklęsła
  - Warunki wystarczające wypukłości i wklęsłości
- Punkt przegięcia wykresu funkcji
  - Definicja punktu przegięcia
  - Warunki na istnienie punktu przegięcia
- Reguła de l'Hospitala



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

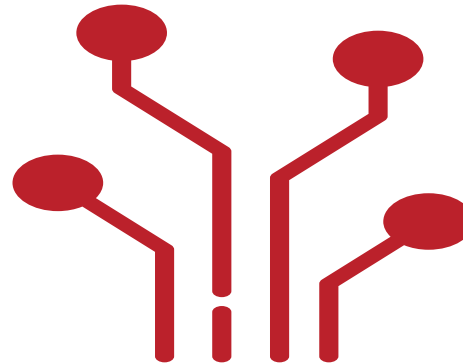
Wklęsłość i wypukłość fukcji



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcja wypukła



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

Funkcję f nazywamy wypukłą na przedziale $(a, b) \subset \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{a<x_1<x_2<b}\ \forall_{0<t<1}\ f(t \cdot x_1 + (1-t) \cdot x_2) < t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2).$$

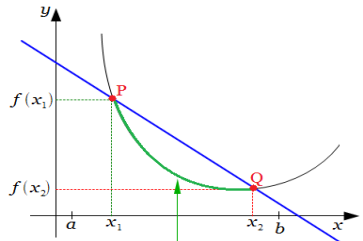
Uwaga

Geometrycznie funkcja jest wypukła, jeżeli każdy odcinek siecznej wykresu leży powyżej fragmentu wykresu położonego między punktami, przez które przechodzi sieczna.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

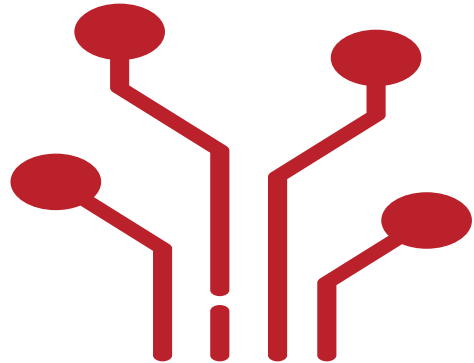
Funkcja wypukła



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcja wklęsła



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

Funkcję f nazywamy wklęsłą na przedziale $(a, b) \subset \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{a<x_1<x_2<b}\ \forall_{0<t<1}\ f(t \cdot x_1 + (1-t) \cdot x_2) > t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2).$$

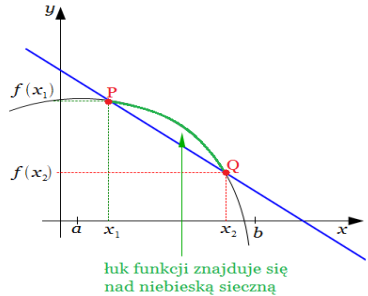
Uwaga

Geometrycznie funkcja jest wklęsła, jeżeli każdy odcinek siecznej wykresu leży poniżej fragmentu wykresu położonego między punktami, przez które przechodzi sieczna.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

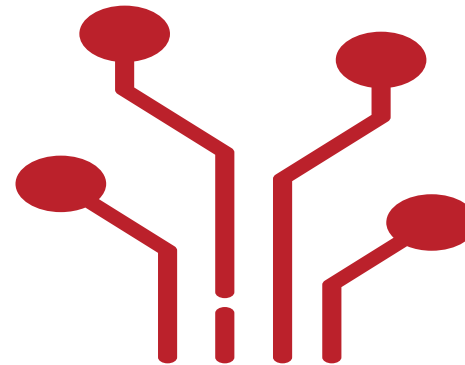
Funkcja wklęsła



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Warunki wystarczajqce wypukłości i wklęsłości



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

Jeżeli $f''(x) > 0$ *dla każdego* $x \in (a, b)$*, to funkcja* f *jest wypukła na* (a, b).

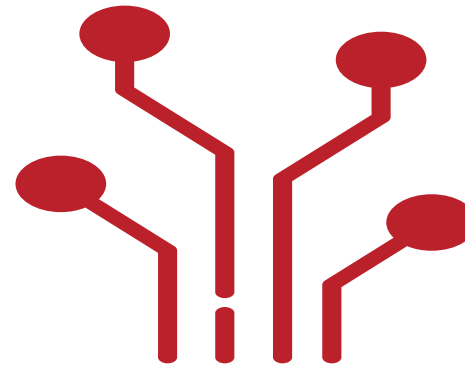
Twierdzenie

Jeżeli $f''(x) < 0$ *dla każdego* $x \in (a, b)$*, to funkcja* f *jest wklęsła na* (a, b).

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

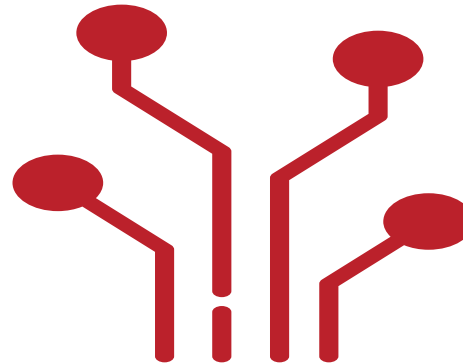
Punkt przegięcia wykresu funkcji



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Definicja punktu przegięcia



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

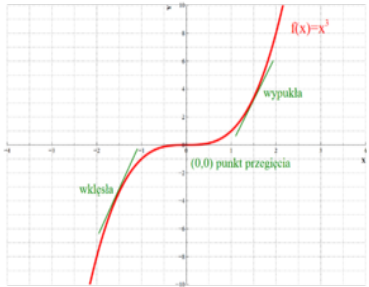
Definicja

Niech funkcja f będzie określona i różniczkowalna przynajmniej w otoczeniu punktu x_0. Punkt $(x_0, f(x_0))$ nazywamy punktem przegięcia wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że funkcja f jest wypukła na $(x_0 - \delta, x_0)$ oraz wklęsła na $(x_0, x_0 + \delta)$ lub odwrotnie.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

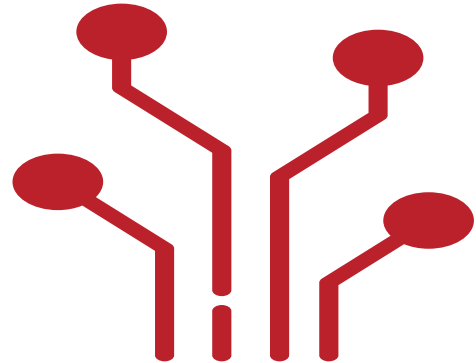
Przykład



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Warunki na istnienie punktu przegięcia



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

I warunek dostateczny istnienia punktu przegięcia

Twierdzenie

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ i f będzie funkcją określoną przynajmniej w otoczeniu punktu x_0, ciągłą i różniczkowalną w punkcie x_0.
Jeżeli istnieje $\delta > 0$ takie, że
dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f''(x) > 0$ oraz
dla każdego $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f''(x) < 0$
albo
dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f''(x) < 0$ oraz
dla każdego $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f''(x) > 0$,
to w punkcie $(x_0, f(x_0))$ funkcja f ma punkt przegięcia.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00
Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

II warunek dostateczny istnienia punktu przegięcia

Twierdzenie

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ i f będzie funkcją określoną przynajmniej w otoczeniu punktu x_0. Jeżeli

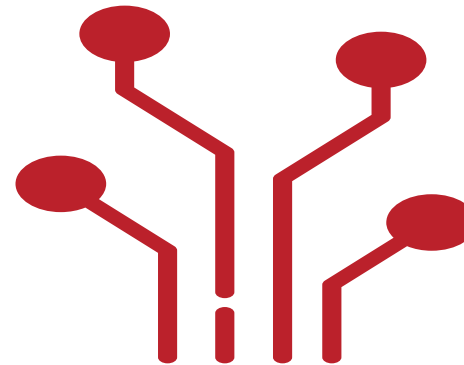
1. $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,
2. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$,

to, gdy $n \geqslant 3$ jest nieparzyste, funkcja f ma w punkcie $(x_0, f(x_0))$ punkt przegięcia.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Reguła de l'Hospitala



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

Niech funkcje f i g następujące spełniają warunki:

- *funkcje* $\frac{f}{g}$ *i* $\frac{f'}{g'}$ *będą określone w sąsiedztwie punktu* x_0*;*
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ *albo* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ *oraz* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$*;*

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie cd.

- *istnieje granica* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=a.$

Wówczas istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *oraz* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=a.$

Powyższe twierdzenie jest prawdziwe również dla granic jednostronnych, niewłaściwych oraz dla granic w $+\infty$ lub w $-\infty$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA

Dziękuję za uwagę

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego

Rzeczpospolita Polska

Dofinansowane przez Unię Europejską

POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA



Badanie przebiegu zmienności funkcji Funkcje cyklometryczne

dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

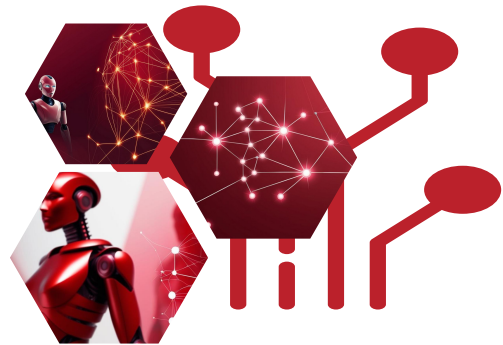
Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Plan wykładu

Badanie przebiegu zmienności funkcji

Funkcje cyklometryczne

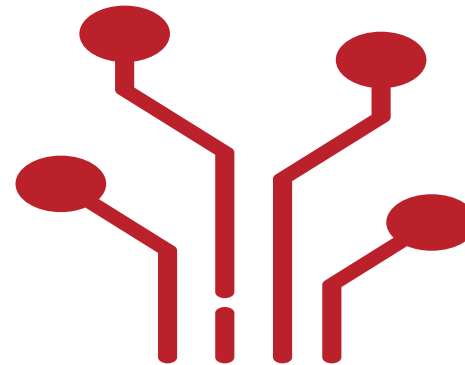
- Wybrane własności funkcji
- Definicje funkcji cyklometrycznych
- Pochodne funkcji cyklometrycznych



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Badanie przebiegu zmienności funkcji



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Etapy sporządzania wykresu funkcji

- Ustalenie dziedziny funkcji.
- Sprawdzenie własności specjalnych funkcji (parzystość, nieparzystość, okresowość, ciągłość).
- Obliczenie granic lub wartości funkcji na „krańcach” dziedziny.
- Wyznaczenie asymptot wykresu funkcji.
- Zbadanie pierwszej pochodnej funkcji:
  - obliczenie pochodnej i wyznaczenie jej dziedziny,
  - wyznaczenie punktów, w których funkcja może mieć ekstrema,
  - ustalenie przedziałów monotoniczności i ekstremów funkcji.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

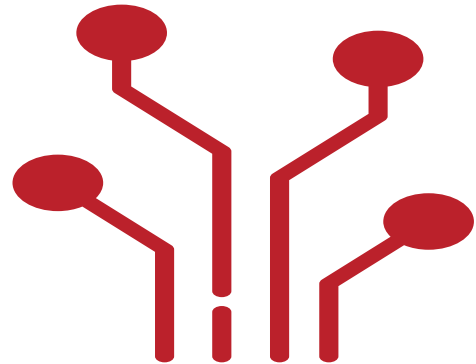
Etapy sporządzania wykresu funkcji cd.

- Zbadanie drugiej pochodnej funkcji:
  - obliczenie drugiej pochodnej i wyznaczenie jej dziedziny,
  - wyznaczenie punktów, w których funkcja może mieć punkty przegięcia,
  - ustalenie przedziałów wklęsłości i wypukłości oraz punktów przegięcia.
- Sporządzenie tabelki.
- Sporządzenie wykresu funkcji.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

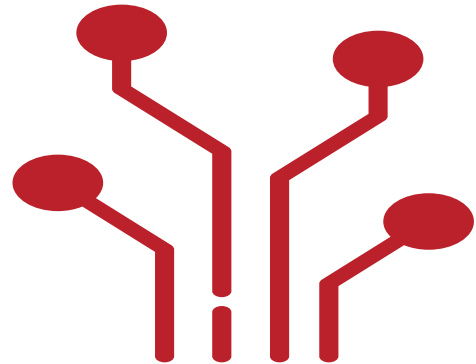
Funkcje cyklometryczne



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Wybrane własności funkcji



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcja różnowartościowa

Definicja

Funkcję $f\colon X \to Y$ *nazywamy różnowartościową wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek*

$$\forall_{x_1 \in X}\ \forall_{x_2 \in X}\ (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)).$$

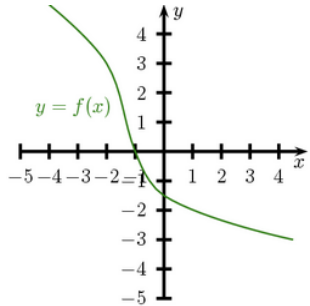
Twierdzenie

Jeżeli funkcja jest monotoniczna, to jest różnowartościowa.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcja różnowartościowa – przykład



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcja „na”

Definicja

O funkcji $f\colon X \to Y$ mówimy, że jest „na” wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

$$f(X) = Y.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Bijekcja

Definicja

O funkcji $f\colon X \to Y$ mówimy, że jest bijekcją wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona różnowartościowa i „na”.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcja odwrotna

Definicja

Jeżeli funkcja $f\colon X \to Y$ *jest bijekcją, to funkcję* $g\colon Y \to X$ *nazywamy funkcją odwrotną do funkcji* f*, jeżeli*

$$\forall_{x\in X}(g \circ f)(x) = x \quad \text{oraz} \quad \forall_{y\in Y}(f \circ g)(y) = y,$$

gdzie $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Funkcję g oznaczamy wówczas przez f^{-1}.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcja odwrotna

Wniosek

Jeżeli funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, to wykres funkcji i funkcji odwrotnej są symetryczne względem prostej $y = x$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Przykład

Funkcja $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *określona wzorem*

$$f(x) = x^2$$

jest bijekcją.

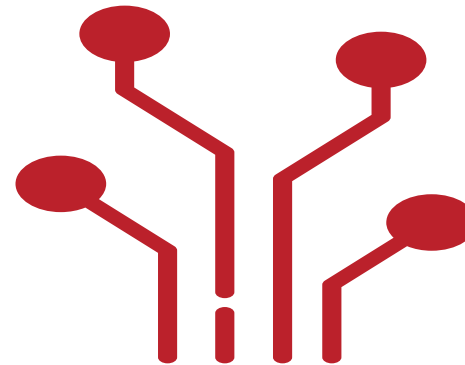
Funkcja do niej odwrotna $f^{-1}\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *jest określona wzorem*

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Definicje funkcji cyklometrycznych



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcje cyklometryczne

Definicja

Funkcje cyklometryczne są to funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych na pewnych przedziałach, na których funkcje trygonometryczne są bijekcjami.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcja arcus sinus

Definicja

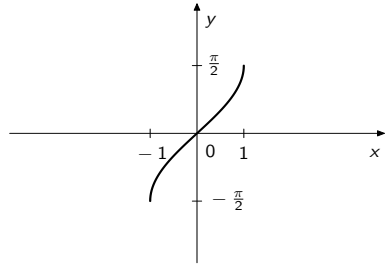
Funkcja arcsin *(arcus sinus) jest to funkcja odwrotna do funkcji sinus na przedziale* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$
$$\arcsin\colon [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcja arcus sinus



Wykres funkcji $y = \arcsin x$

Jest to funkcja rosnąca, nieparzysta.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcja arcus cosinus

Definicja

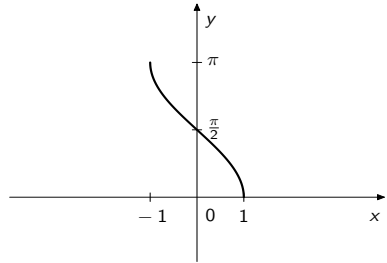
Funkcja $\arccos$ *(arcus cosinus) jest to funkcja odwrotna do funkcji cosinus na przedziale* $[0, \pi]$.

$$\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$$
$$\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcja arcus cosinus



Wykres funkcji $y = \arccos x$

Jest to funkcja malejąca.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcja arcus tangens

Definicja

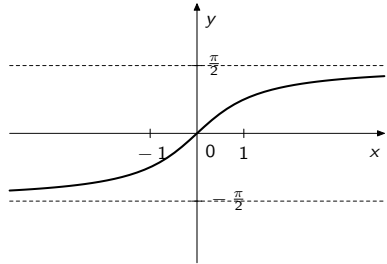
Funkcja arctg (arcus tangens) jest to funkcja odwrotna do funkcji tangens na przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$\text{tg}: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$
$\text{arctg}: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcja arcus tangens



Wykres funkcji $y = \operatorname{arc\,tg} x$

Jest to funkcja rosnąca, nieparzysta.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcja arcus cotangens

Definicja

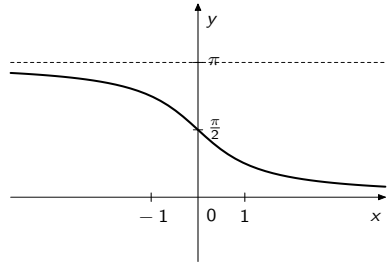
Funkcja arcctg (arcus cotangens) jest to funkcja odwrotna do funkcji cotangens na przedziale $(0, \pi)$.

ctg: $(0, \pi) \to \mathbb{R}$
arcctg: $\mathbb{R} \to (0, \pi)$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcja arcus cotangens



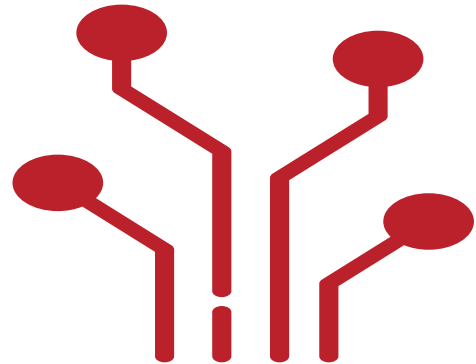
Wykres funkcji $y = \operatorname{arc\,ctg} x$

Jest to funkcja malejąca.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Pochodne funkcji cyklometrycznych



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$
- $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA

Dziękuję za uwagę

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego

Rzeczpospolita Polska

Dofinansowane przez Unię Europejską

POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA



Całka nieoznaczona i jej własności

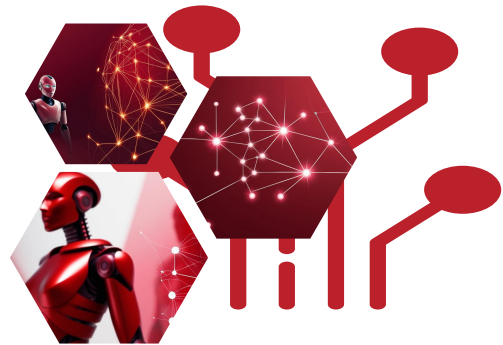
dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Plan wykładu

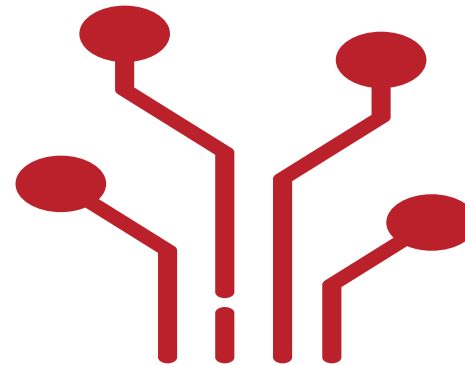
- Definicja całki nieoznaczonej
  - Funkcja pierwotna
  - Całka nieoznaczona
- Podstawowe własności całki nieoznaczonej
  - Całki elementarne
  - Tożsamości i wskazówki
  - Realia algebraiczne
  - Techniki całkowania



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

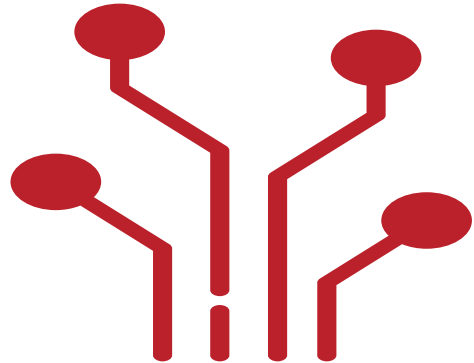
Definicja całki nieoznaczonej



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcja pierwotna



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Definicja funkcji pierwotnej

Definicja

Funkcję F *nazywamy funkcją pierwotną funkcji* f *na przedziale* (a, b) *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$F'(x) = f(x) \quad \text{dla każdego } x \in (a, b).$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Definicja funkcji pierwotnej

Definicja

Funkcję F nazywamy funkcją pierwotną funkcji f na przedziale (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$F'(x) = f(x) \quad \text{dla każdego } x \in (a, b).$$

Uwaga

Funkcja pierwotna nie jest wyznaczona jednoznacznie.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Własności funkcji pierwotnej

Twierdzenie

Jeżeli funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale (a, b), to:

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Własności funkcji pierwotnej

Twierdzenie

Jeżeli funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale (a, b), to:

- $G(x) = F(x) + c$, dla dowolnej stałej $c \in \mathbb{R}$, jest także funkcją pierwotną f na (a, b);

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Własności funkcji pierwotnej

Twierdzenie

Jeżeli funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale (a, b), to:

- $G(x) = F(x) + c$, dla dowolnej stałej $c \in \mathbb{R}$, jest także funkcją pierwotną f na (a, b);
- każdą funkcję pierwotną funkcji f na (a, b) można zapisać w postaci $F(x) + c$ dla pewnej stałej $c \in \mathbb{R}$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Własności funkcji pierwotnej

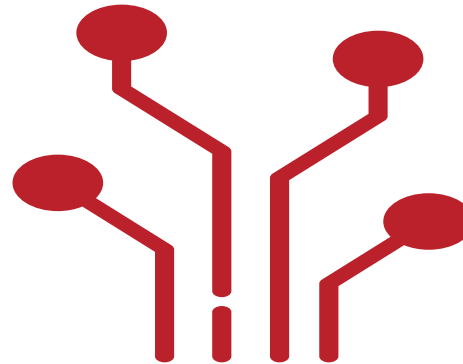
Twierdzenie (warunek dostateczny istnienia)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na pewnym przedziale, to ma na tym przedziale funkcję pierwotną.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Całka nieoznaczona



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Definicja całki nieoznaczonej

Definicja

Całką nieoznaczoną z funkcji f na przedziale (a, b) nazywamy zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Definicja całki nieoznaczonej

Definicja

Całką nieoznaczoną z funkcji f na przedziale (a, b) nazywamy zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f.

Oznaczenie:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Podstawowe fakty

Z definicji wynika, że:

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Podstawowe fakty

Z definicji wynika, że:

- $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x),$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Podstawowe fakty

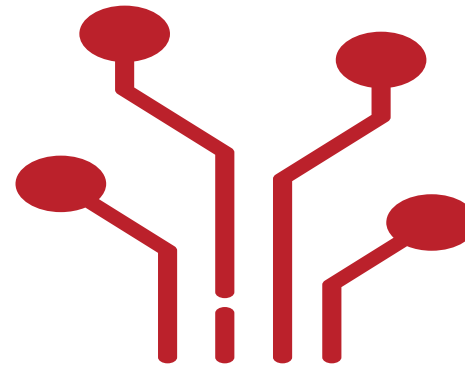
Z definicji wynika, że:

- $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x),$
- $\int f'(x)\,dx = f(x) + c.$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

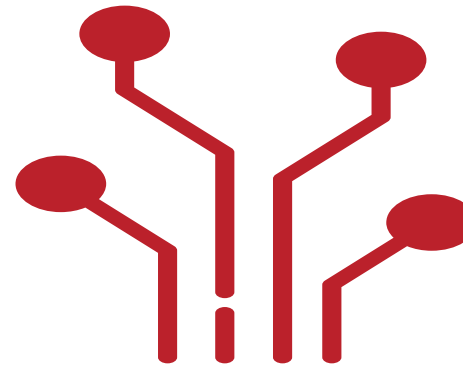
Podstawowe własności całki nieoznaczonej



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Całki elementarne



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

- $\int 0\,dx = c$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

- $\int 0\,dx = c$
- $\int dx = x + c$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

- $\int 0\,dx = c$
- $\int dx = x + c$
- $\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c,\ p \neq -1$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

- $\int 0\,dx = c$
- $\int dx = x + c$
- $\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c,\ p \neq -1$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

- $\int 0\,dx = c$
- $\int dx = x + c$
- $\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c,\ p \neq -1$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

- $\int 0\,dx = c$
- $\int dx = x + c$
- $\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c,\ p \neq -1$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + c$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + c$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + c$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + c$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + c$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + c$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + c$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + c$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + c$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + c$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$
- $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,\ a > 0, a \neq 1$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

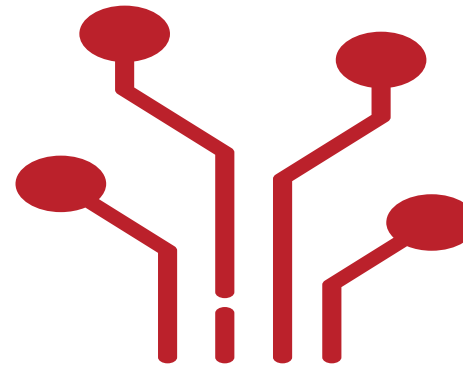
Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + c$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + c$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$
- $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,\ a > 0, a \neq 1$
- $\int e^x\, dx = e^x + c$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Tożsamości i wskazówki



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Warto pamiętać

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Warto pamiętać

- Jeśli $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, to dla $a \neq 0$:

$$\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}\,F(ax) + c.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Warto pamiętać

- Jeśli $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, to dla $a \neq 0$:

$$\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}\,F(ax) + c.$$

- $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Warto pamiętać

- Jeśli $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, to dla $a \neq 0$:

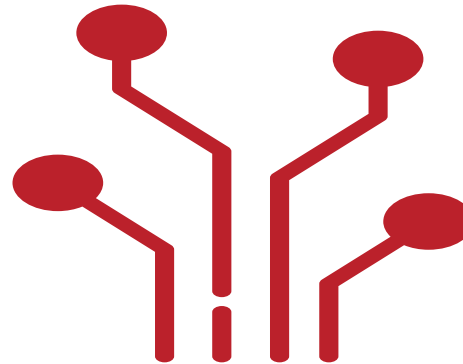
$$\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}\,F(ax) + c.$$

- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c.$
- $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)} + c.$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Realia algebraiczne



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Działania arytmetyczne na całkach

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Działania arytmetyczne na całkach

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g mają funkcje pierwotne, to:

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Działania arytmetyczne na całkach

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g mają funkcje pierwotne, to:

- $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx,$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Działania arytmetyczne na całkach

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g mają funkcje pierwotne, to:

- $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx,$
- $\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx, c \in \mathbb{R}.$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Działania arytmetyczne na całkach

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g mają funkcje pierwotne, to:

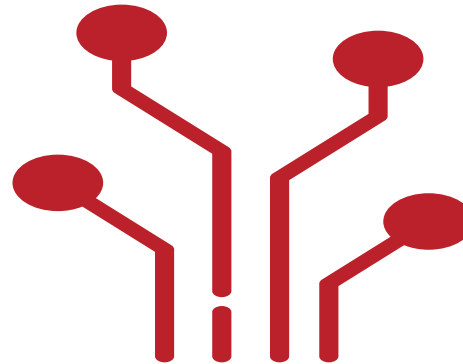
- $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx,$
- $\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx, c \in \mathbb{R}.$

Uwaga

Nie ma analogicznych twierdzeń dla całek z iloczynu ani ilorazu funkcji.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00
Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Techniki całkowania



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Całkowanie przez części

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Całkowanie przez części

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne na przedziale $\langle a, b \rangle$, to

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Całkowanie przez podstawienie

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Całkowanie przez podstawienie

Twierdzenie

Niech:

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Całkowanie przez podstawienie

Twierdzenie

Niech:

1. $f\colon I \to \mathbb{R}$ *będzie ciągła na* I,

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Całkowanie przez podstawienie

Twierdzenie

Niech:

1. $f\colon I \to \mathbb{R}$ *będzie ciągła na* I,
2. $g\colon J \to I$ *ma ciągłą pochodną na* J.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Całkowanie przez podstawienie

Twierdzenie

Niech:

1. $f\colon I \to \mathbb{R}$ *będzie ciągła na* I,
2. $g\colon J \to I$ *ma ciągłą pochodną na* J.

Wówczas

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx \;=\; \int f(t)\, dt \;=\; F(g(x)) + C,$$

gdzie F *jest dowolną funkcją pierwotną funkcji* f.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA

Dziękuję za uwagę

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego

Rzeczpospolita Polska

Dofinansowane przez Unię Europejską

POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA



Całkowanie funkcji wymiernych

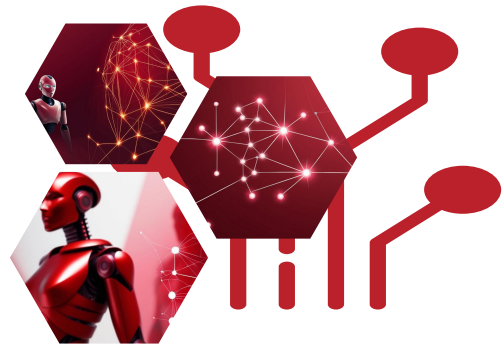
dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Plan wykładu

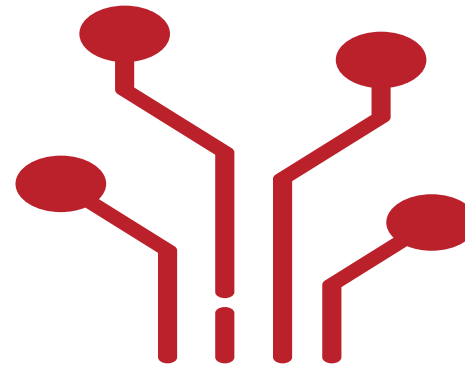
Ułamki proste pierwszego rodzaju
Ułamki proste drugiego rodzaju
Funkcje wymierne i ich rozkłady
Algorytm całkowania



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Ułamki proste pierwszego rodzaju



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Ułamki proste pierwszego rodzaju

Definicja

Funkcją wymierną nazywamy funkcję postaci $w(x) = \frac{l(x)}{m(x)}$, gdzie l oraz m są wielomianami.

Definicja

Funkcję wymierną postaci $\frac{A}{(x+a)^n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $a, A \in \mathbb{R}$, nazywamy *ułamkiem prostym pierwszego rodzaju*.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Obliczanie całek z ułamków prostych pierwszego rodzaju

Do obliczania całek z ułamków prostych pierwszego rodzaju stosujemy podstawienie $x + a = t$ i otrzymujemy:

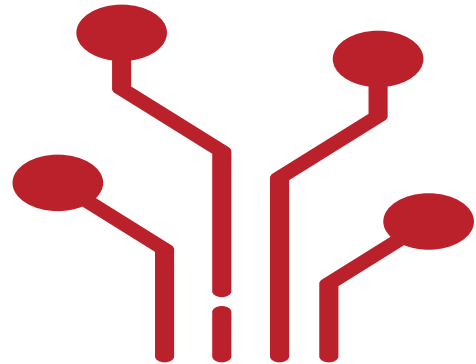
$$\int \frac{A}{x+a}dx = A\ln|x+a| + c,$$

$$\int \frac{A}{(x+a)^n}dx = \frac{-A}{(n-1)(x+a)^{n-1}} + c, \quad \text{gdzie } n \geqslant 2.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Ułamki proste drugiego rodzaju



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Definicja

Funkcję wymierną postaci $\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}$, *gdzie* $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $b, c, B, C \in \mathbb{R}$, *przy czym* $\Delta < 0$, *gdzie* Δ *jest wyróżnikiem trójmianu* x^2+bx+c, *nazywamy ułamkiem prostym drugiego rodzaju.*

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Obliczanie całek z ułamków prostych drugiego rodzaju

Gdy $\mathbf{B = 0}$, obliczamy całkę $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^n}$.

- Sprowadzamy trójmian x^2+bx+c do postaci kanonicznej $(x-p)^2+q$ i stosujemy podstawienie $x-p=\sqrt{q}\cdot t$.
- Dla $n=1$ korzystamy ze wzoru $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + c$.
- Dla $n \geqslant 2$ stosujemy wzór rekurencyjny

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^n} = \frac{t}{(2n-2)(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}}.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Ułamki proste drugiego rodzaju

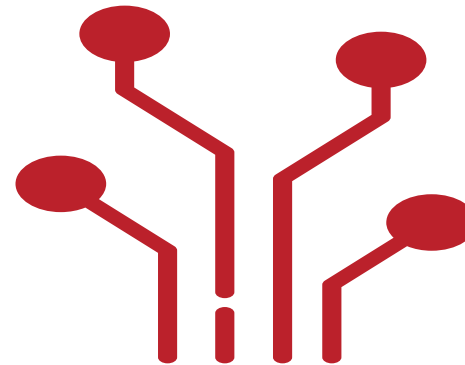
Gdy $B \neq 0$:

- Licznik zapisujemy w postaci $Bx + C = P(2x + b) + Q$, gdzie P i Q są odpowiednio dobranymi stałymi.
- Całkę zapisujemy następująco:
$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^n} dx = P \int \frac{2x + b}{(x^2 + bx + c)^n} dx + Q \int \frac{dx}{(x^2 + bx + c)^n}.$$
- Do całki $\displaystyle\int \frac{2x + b}{(x^2 + bx + c)^n} dx$
stosujemy podstawienie $t = x^2 + bx + c$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcje wymierne i ich rozkłady



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcja wymierna

Definicja

Jeżeli w *jest funkcją wymierną postaci* $w(x) = \frac{l(x)}{m(x)}$, *natomiast stopnie wielomianów* l *i* m *spełniają warunek* $st.l(x) < st.m(x)$, *to funkcję wymierną* $w(x) = \frac{l(x)}{m(x)}$ *nazywamy właściwą, w przeciwnym razie niewłaściwą.*

Twierdzenie

Każdą funkcję wymierną niewłaściwą można przedstawić w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcja wymierna

Wystarczy skorzystać z twierdzenia o rozkładzie wielomianów i zapisać $l(x)$ w postaci:

$$l(x) = m(x)q(x) + r(x), \text{ gdzie } st.r(x) < st.m(x).$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste

Twierdzenie

Każda funkcja wymierna właściwa rzeczywista daje się w sposób jednoznaczny przedstawić w postaci sumy ułamków prostych.
Funkcja wymierna właściwa

$$\frac{p(x)}{a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_r)^{k_r}(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}(x^2+b_2x+c_2)\cdots(x^2+b_sx+c_s)^{l_s}}$$

jest sumą $k_1+k_2+\cdots+k_r$ *ułamków prostych pierwszego rodzaju oraz* $l_1+l_2+\cdots+l_s$ *ułamków prostych drugiego rodzaju, przy czym*

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste

Twierdzenie cd.

- *czynnikowi* $(x - x_i)^{k_i}$ *odpowiada suma* k_i *ułamków prostych pierwszego rodzaju postaci:*

$$\frac{A_{i1}}{x - x_i} + \frac{A_{i2}}{(x - x_i)^2} + \cdots + \frac{A_{ik_i}}{(x - x_i)^{k_i}},$$

gdzie $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{ik_i} \in \mathbb{R}$ *dla* $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$;

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste

Twierdzenie cd.

- *czynnikowi* $(x^2 + b_j x + c_j)^{l_j}$ *odpowiada suma* l_j *ułamków prostych drugiego rodzaju postaci:*

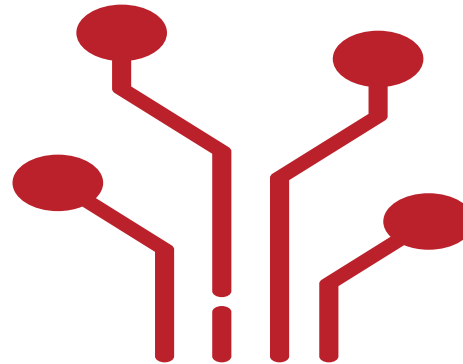
$$\frac{B_{j1}x + C_{j1}}{x^2 + b_j x + c_j} + \frac{B_{j2}x + C_{j2}}{(x^2 + b_j x + c_j)^2} + \ldots + \frac{B_{jl_j}x + C_{jl_j}}{(x^2 + b_j x + c_j)^{l_j}},$$

gdzie $B_{j1}, B_{j2}, \ldots, B_{jl_j}, C_{j1}, C_{j2}, \ldots, C_{jl_j} \in \mathbb{R}$ *dla* $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Algorytm całkowania



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Algorytm całkowania funkcji wymiernych

1. Jeżeli stopień licznika jest większy lub równy stopniowi mianownika, to funkcję wymierną niewłaściwą zapisujemy w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.
2. Mianownik funkcji wymiernej właściwej rozkładamy na czynniki liniowe i nierozkładalne kwadratowe.
3. Zapisujemy teoretyczny rozkład funkcji wymiernej właściwej na ułamki proste pierwszego i drugiego rodzaju.
4. Znajdujemy nieznane współczynniki tego rozkładu.
5. Obliczamy całki poszczególnych składników rozkładu funkcji, tzn. wielomianu i ułamków prostych.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA

Dziękuję za uwagę

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego

Rzeczpospolita Polska

Dofinansowane przez Unię Europejską

POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA



Całkowanie funkcji niewymiernych i trygonometrycznych

dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Plan wykładu

Całkowanie funkcji trygonometrycznych

Całkowanie funkcji niewymiernych

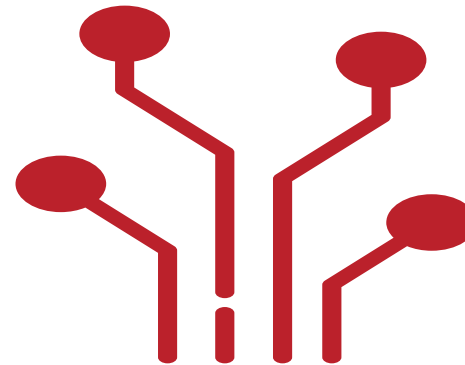
- Podstawienia Eulera
- Funkcje zawierające pierwiastki
- Funkcje zawierające funkcję wykładniczą



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Całkowanie funkcji trygonometrycznych



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Dla całek niektórych typów funkcji trygonometryczych i niewymiernych opracowano podstawienia, które pozwalają zamienić je na całki z funkcji wymiernych, do których można już zastosować algorytm całkowania.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Dla obliczania całek z funkcji postaci: $\sin^n x \cdot \cos^m x$, gdzie $n, m \in \mathbb{N}$ stosujemy następujące podstawienia:

- $n = 2k + 1$ (nieparzyste): wykorzystujemy tożsamość $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, wtedy $\sin^{2k+1} x = (1 - \cos^2 x)^k \sin x$, podstawienie $t = \cos x$
- $m = 2k + 1$ (nieparzyste): wykorzystujemy tożsamość $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, wtedy $\cos^{2k+1} x = (1 - \sin^2 x)^k \cos x$, podstawienie $t = \sin x$
- n, m parzyste: wykorzystujemy tożsamości $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Niech $R(u, v)$ będzie funkcją wymierną dwóch zmiennych. Dla obliczania całek z funkcji postaci $R(\sin x, \cos x)$ stosujemy następujące podstawienia:

- jeżeli $R(-u, v) = -R(u, v)$, to $t = \cos x$;
  wtedy $\sin x = \sqrt{1 - t^2}$ oraz $dx = \dfrac{-dt}{\sqrt{1 - t^2}}$
- jeżeli $R(u, -v) = -R(u, v)$, to $t = \sin x$;
  wtedy $\cos x = \sqrt{1 - t^2}$ oraz $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Niech $R(u, v)$ będzie funkcją wymierną dwóch zmiennych. Dla obliczania całek z funkcji postaci $R(\sin x, \cos x)$ stosujemy następujące podstawienia:

- jeżeli $R(-u, -v) = R(u, v)$, to $t = \text{tg}x$;
  wtedy $\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ oraz $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Jeżeli funkcja podcałkowa ma postać funkcji wymiernej R, w której wszystkie wystąpienia zmiennej zastąpiono funkcją $\sin x$ lub $\cos x$, to korzystamy najpierw z następujących tożsamości trygonometrycznych:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Następnie stosujemy podstawienie uniwersalne: $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Wtedy $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Jeżeli funkcja podcałkowa ma postać $\sin(ax)\cos(bx)$, $\sin(ax)\sin(bx)$ lub $\cos(ax)\cos(bx)$, to korzystamy z następujących tożsamości trygonometrycznych:

$$\sin(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}\big[\sin((a+b)x) + \sin((a-b)x)\big],$$

$$\sin(ax)\sin(bx) = \frac{1}{2}\big[\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x)\big],$$

$$\cos(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}\big[\cos((a+b)x) + \cos((a-b)x)\big],$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

które są konsekwencją wzorów trygonometrycznych

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

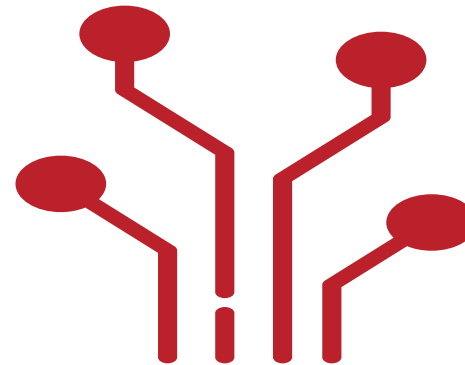
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

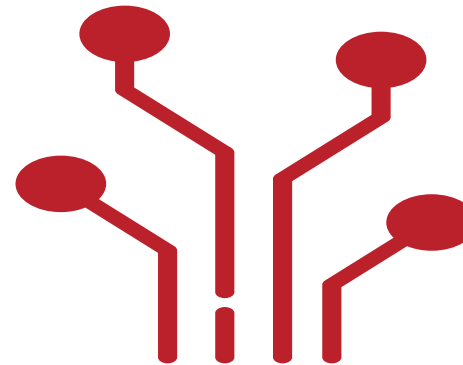
Całkowanie funkcji niewymiernych



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Podstawienia Eulera



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Rozważamy całki postaci $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx$, gdzie R jest funkcją wymierną.

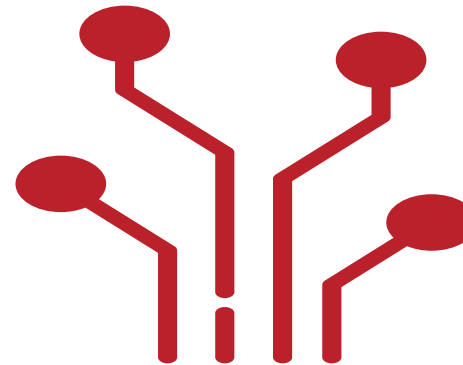
Klasyczne podstawienia Eulera mają postać:

1. jeżeli $a > 0$, to: $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}\,x$;
2. jeżeli $c > 0$, to: $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\,t + \sqrt{c}$;
3. jeżeli $\Delta > 0$, to: $\sqrt{ax^2+bx+c} = t\,(x - x_1)$, gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$ oraz $x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcje zawierające pierwiastki



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

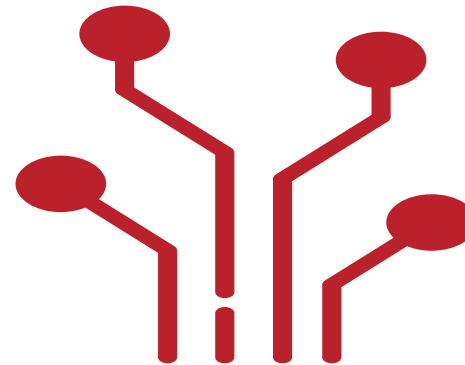
Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Jeżeli funkcja podcałkowa ma postać funkcji wymiernej, w której niektóre wystąpienia zmiennej zastąpiono pierwiastkiem $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, to do otrzymania całki z funkcji wymiernej wystarczy zastosować podstawienie $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcje zawierające funkcję wykładniczą



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Jeżeli funkcja podcałkowa ma postać funkcji wymiernej o argumencie e^x,
to do otrzymania całki z funkcji wymiernej wystarczy zastosować podstawienie $t = e^x$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA

Dziękuję za uwagę

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego

Rzeczpospolita Polska

Dofinansowane przez Unię Europejską

POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA



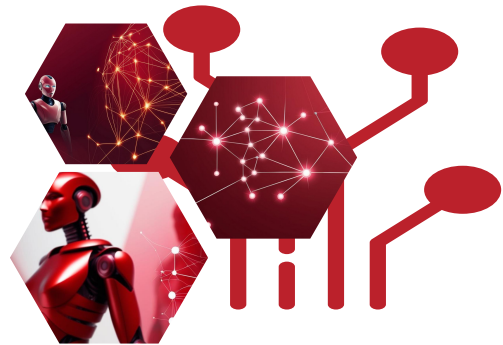
Całka oznaczona i jej interpretacja geometryczna

dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Plan wykładu

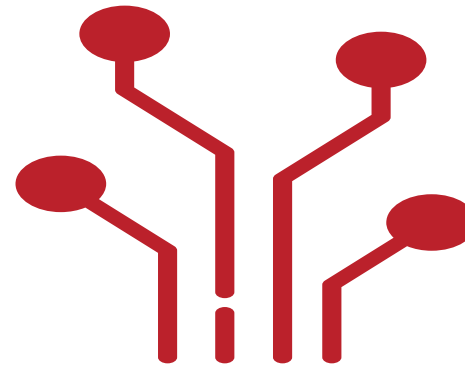


- Definicja całki oznaczonej
  - Podział odcinka
  - Suma całkowa Riemanna
  - Całka oznaczona Riemanna
- Całka Riemanna – interpretacja geometryczna
- Własności całki Riemanna
  - Warunek wystarczający całkowalności funkcji
  - Twierdzenie Newtona-Leibniza
  - Twiedzenie o liniowości całki oznaczonej
  - Twierdzenie o addytywności całki względem przedziału całkowania
  - Twiedzenie o całkowaniu przez części
  - Twiedzenie o całkowaniu przez podstawienie

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

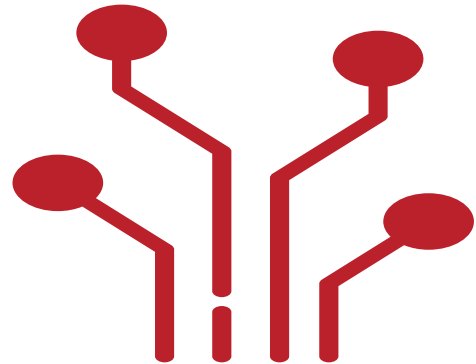
Definicja całki oznaczonej



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Podział odcinka



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

- Niech $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$.
- Dzielimy przedział $\langle a, b\rangle$ na n podprzedziałów dowolnie wybranymi punktami $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ w taki sposób, że

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

- Ten szczególny podział oznaczamy symbolem π.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

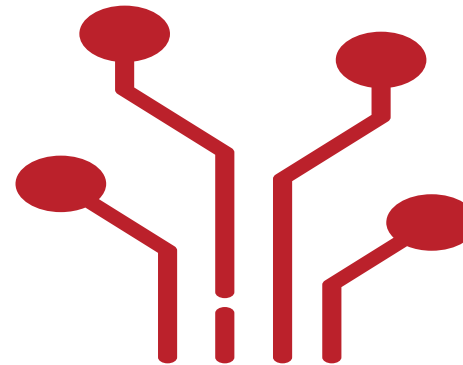
- Największą różnicę pomiędzy kolejnymi punktami podziału $x_i - x_{i-1}$, czyli długość najdłuższego podprzedziału, oznaczamy symbolem $d(\pi)$.
- Liczbę $d(\pi)$ nazywamy **średnicą podziału**.
- W każdym podprzedziale $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ wybieramy dowolnie punkt pośredni $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$.
- Konstruujemy sumę iloczynów

$$f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Suma całkowa Riemanna



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

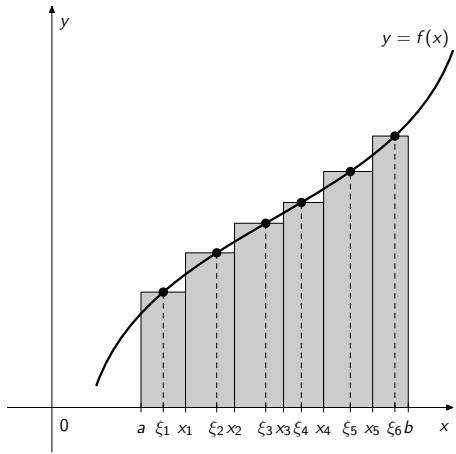
Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Przyjmując upraszczające założenie, że Δx_i oznacza długość i-tego podprzedziału, tzn. $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$, możemy powyższą sumę zapisać krótko jako $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Sumę $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ nazywamy **sumą całkową** z funkcji f na przedziale $\langle a, b\rangle$ odpowiadającą podziałowi π i punktom pośrednim ξ_i.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

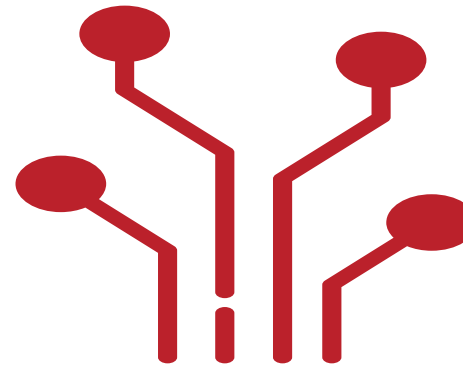
Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Całka oznaczona Riemanna



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Definicja

Jeżeli dla dowolnego ciągu podziałów (π_k) *takich, że*

$$\lim_{k\to\infty} d(\pi_k) = 0$$

istnieje skończona, niezależna od wyboru punktów pośrednich ξ_i*, granica*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

to nazywamy ją **całką oznaczoną Riemanna** *funkcji* f *na przedziale* $\langle a, b\rangle$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Całkę oznaczoną Riemanna oznaczamy symbolem $\int_a^b f(x)dx$.

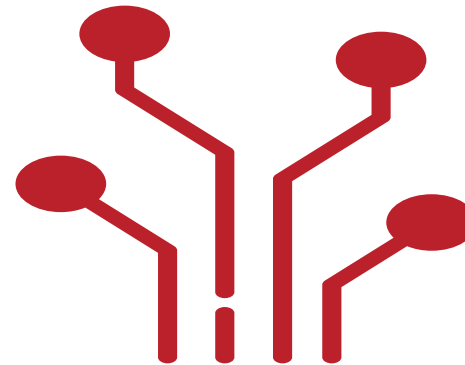
UMOWA:

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx,\ a < b$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Całka Riemanna – interpretacja geometryczna



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

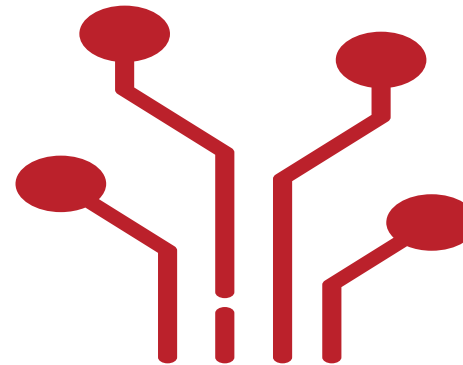
Niech f będzie funkcją ciągłą i nieujemną na przedziale $\langle a, b \rangle$.

Wówczas $\int_a^b f(x)dx$ jest równa polu figury ograniczonej wykresem funkcji f, osią Ox oraz prostymi $x = a$ i $x = b$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

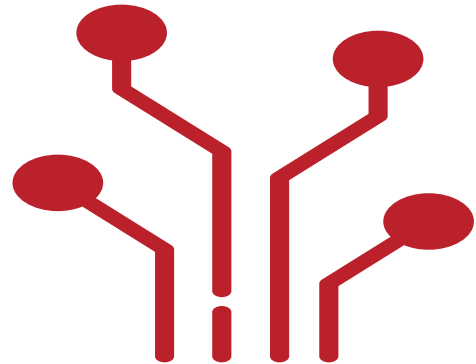
Własności całki Riemanna



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Warunek wystarczający całkowalności funkcji



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest ograniczona na przedziale $\langle a, b\rangle$ i ma na tym przedziale skończoną liczbę punktów nieciągłości pierwszego rodzaju, to jest na nim całkowalna.

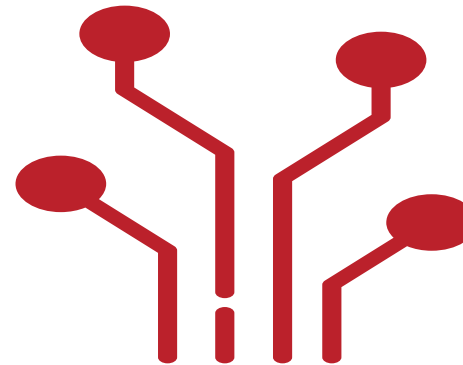
Definicja

Funkcja ma w punkcie $x_0 \in D_f$ nieciągłość pierwszego rodzaju, jeżeli istnieją skończone granice $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ lub $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie Newtona-Leibniza



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $\langle a, b\rangle$, to

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

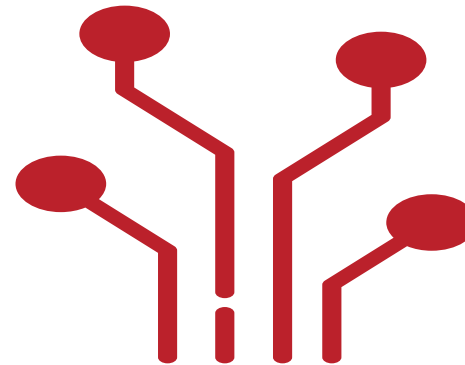
gdzie F oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji f na przedziale $\langle a, b\rangle$.

Uwaga. Zamiast $F(b) - F(a)$ będziemy pisać $F(x)\Big|_a^b$ lub $[F(x)]_a^b$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twiedzenie o liniowości całki oznaczonej



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

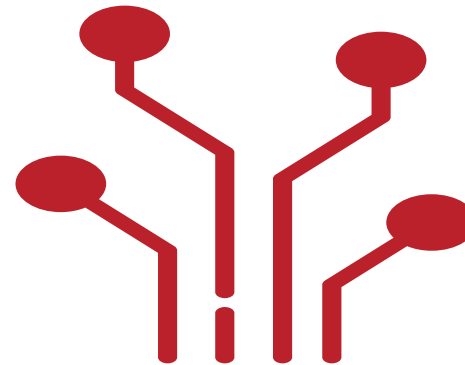
Jeżeli funkcje f i g są całkowalne na przedziale $\langle a, b\rangle$, to

- $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$
- $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx,$
- $\int_a^b (cf(x))\,dx = c\int_a^b f(x)dx,\ \ c \in \mathbb{R}.$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie o addytywności całki względem przedziału całkowania



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

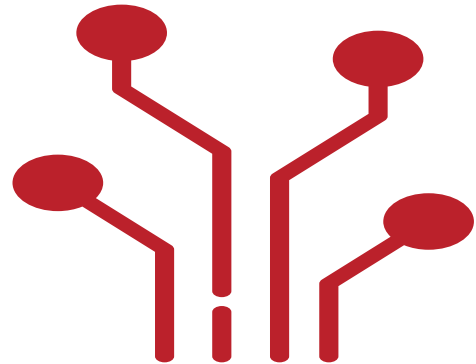
Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $\langle a, b\rangle$ oraz $c \in (a, b)$, to

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twiedzenie o całkowaniu przez części



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

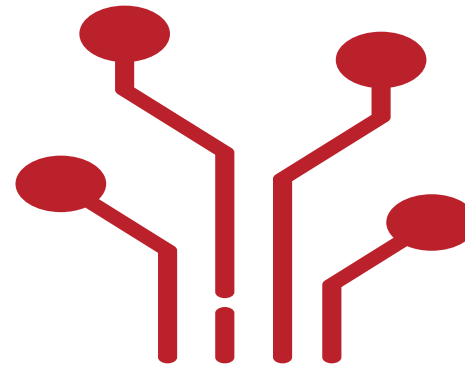
Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne na przedziale $\langle a, b \rangle$, to

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twiedzenie o całkowaniu przez podstawienie



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

Jeżeli

- *funkcja* f *jest ciągła na przedziale* $\langle a, b\rangle$,
- *funkcja* $g\colon \langle \alpha, \beta\rangle \to \langle a, b\rangle$ *jest funkcją „na” oraz ma ciągłą pochodną na przedziale* $\langle \alpha, \beta\rangle$,
- $g(\alpha) = a$ *oraz* $g(\beta) = b$,

to $$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA

Dziękuję za uwagę

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego

Rzeczpospolita Polska

Dofinansowane przez Unię Europejską

POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA



Zastosowania całki oznaczonej

dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Plan wykładu

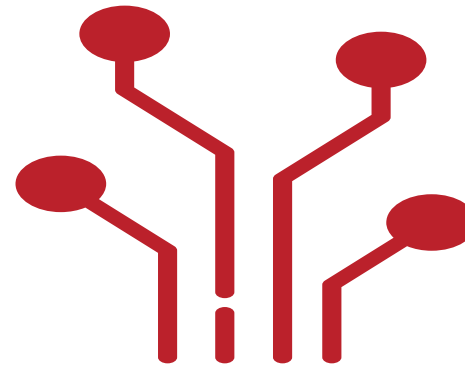
Wartość średnia funkcji
Pole trapezu krzywoliniowego
Długość łuku krzywej
Objętość bryły obrotowej
Pole powierzchni obrotowej
Funkcja górnej granicy całkowania



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Wartość średnia funkcji



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

Jeżeli funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *jest ciągła na przedziale* $[a,b]$*, to istnieje* $c \in [a,b]$ *takie, że* $\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$.

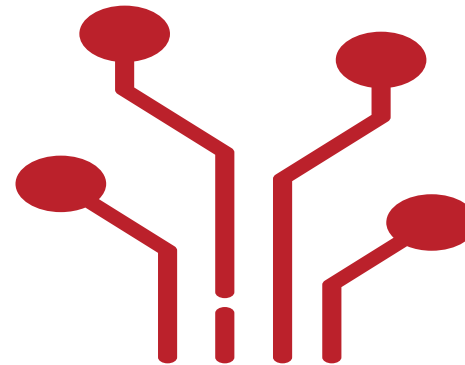
Definicja

Wielkość $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ *nazywamy wartością średnią funkcji* f *na przedziale* $[a,b]$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Pole trapezu krzywoliniowego



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

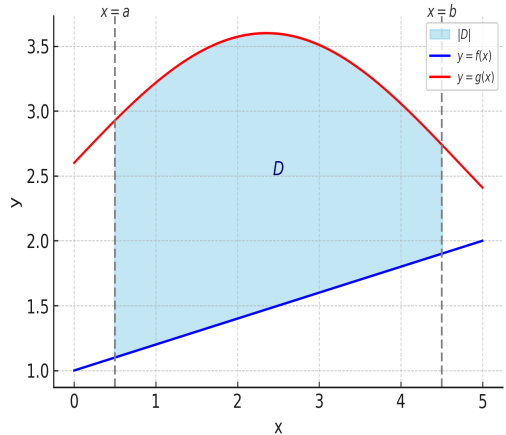
Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Niech funkcje f oraz g będą ciągłe na przedziale $[a, b]$ oraz niech $f(x) \leqslant g(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$. Wtedy pole trapezu krzywoliniowego D ograniczonego wykresami funkcji f i g oraz prostymi $x = a$, $x = b$ wyraża się wzorem:

$$|D| = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

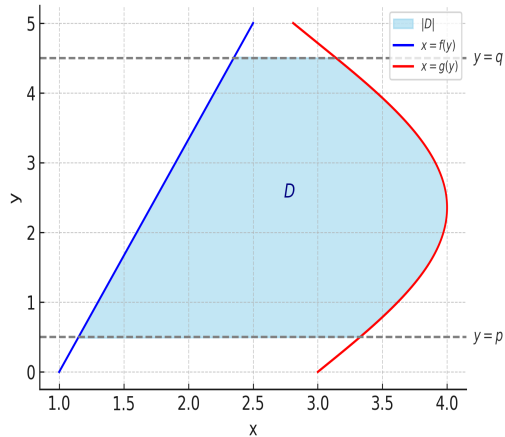
Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Niech funkcje f oraz g będą ciągłe na przedziale $[p, q]$ oraz niech $f(y) \leqslant g(y)$ dla każdego $y \in [p, q]$. Wtedy pole trapezu krzywoliniowego D ograniczonego wykresami funkcji f i g oraz prostymi $y = p$, $y = q$ wyraża się wzorem:

$$|D| = \int_p^q [g(y) - f(y)]dy.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

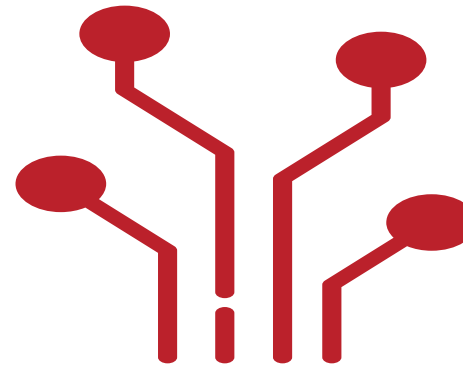
Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Długość łuku krzywej



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Niech funkcja f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$. Wtedy długość łuku krzywej

$$\Gamma = \{(x, f(x)) \colon \ x \in [a, b]\}$$

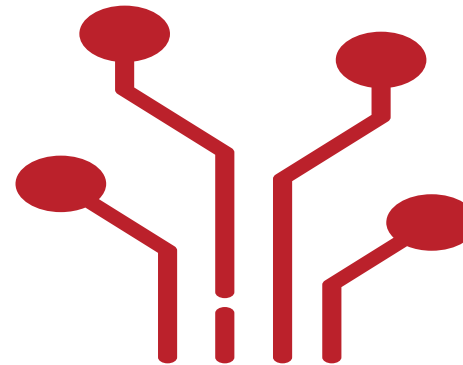
wyraża się wzorem:

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Objętość bryły obrotowej



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

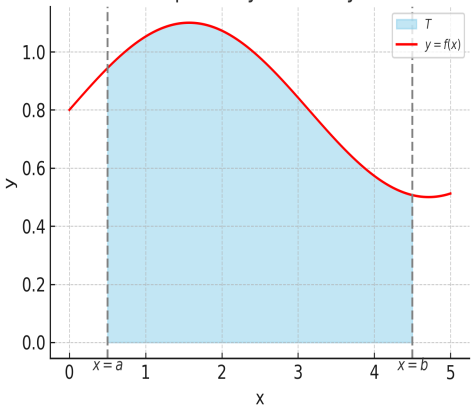
Niech funkcja nieujemna f będzie ciągła na przedziale $[a, b]$. Niech T oznacza trapez krzywoliniowy ograniczony wykresem funkcji f, osią Ox oraz prostymi $x = a, x = b$.

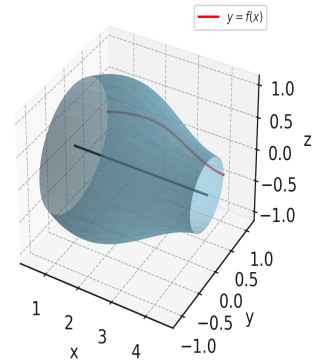
Objętość bryły V powstałej z obrotu trapezu T wokół osi Ox wyraża się wzorem:

$$|V| = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską





Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Niech funkcja nieujemna f będzie ciągła na przedziale $[a, b]$, gdzie $a \geqslant 0$. Niech T oznacza trapez krzywoliniowy ograniczony wykresem funkcji f, osią Ox oraz prostymi $x = a, x = b$.

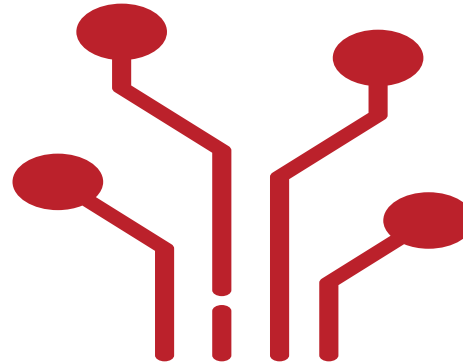
Objętość bryły V powstałej z obrotu trapezu T wokół osi Oy wyraża się wzorem:

$$|V| = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Pole powierzchni obrotowej



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

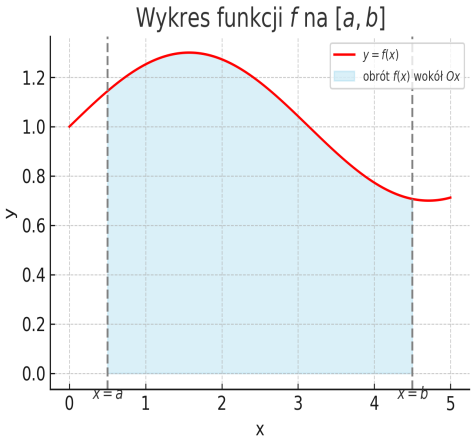
Niech funkcja nieujemna f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$.

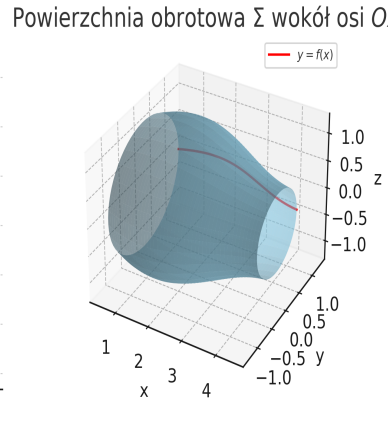
Pole powierzchni Σ powstałej z obrotu wykresu funkcji f wokół osi Ox wyraża się wzorem:

$$|\Sigma| = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską





Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Niech funkcja nieujemna f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$, gdzie $a \geqslant 0$.

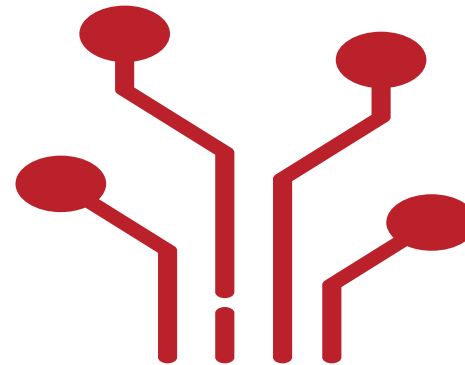
Pole powierzchni Σ powstałej z obrotu wykresu funkcji f wokół osi Oy wyraża się wzorem:

$$|\Sigma| = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Funkcja górnej granicy całkowania



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

Niech funkcja f będzie całkowalna na przedziale $[a, b]$ oraz niech $c \in [a, b]$. Funkcję

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt,$$

gdzie $x \in [a, b]$, nazywamy **funkcją górnej granicy całkowania.**

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$, to funkcja

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt,$$

gdzie $x \in [a, b]$, jest ciągła na przedziale $[a, b]$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$ oraz jest ciągła w punkcie $x_0 \in [a, b]$, to funkcja

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt,$$

gdzie $c \in [a, b]$, ma pochodną właściwą w punkcie x_0 oraz $F'(x_0) = f(x_0)$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA

Dziękuję za uwagę

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego

Rzeczpospolita Polska

Dofinansowane przez Unię Europejską

POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA



Algebra macierzy

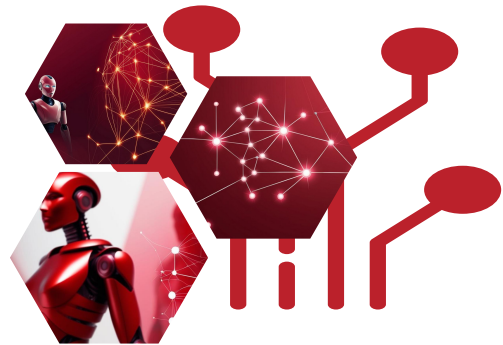
dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Plan wykładu

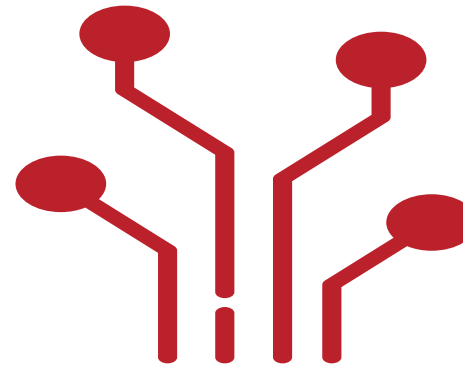
Definicja macierzy
Rodzaje macierzy
Działania na macierzach



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Definicja macierzy



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

- **Macierzą rzeczywistą** wymiaru $m \times n$, gdzie $m \in \mathbb{N}$ oraz $n \in \mathbb{N}$, nazywamy prostokątną tablicę złożoną z mn liczb rzeczywistych ustawionych w m wierszach i n kolumnach.
- Element macierzy A stojący w i-tym wierszu oraz w j-tej kolumnie oznaczamy symbolem a_{ij}.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

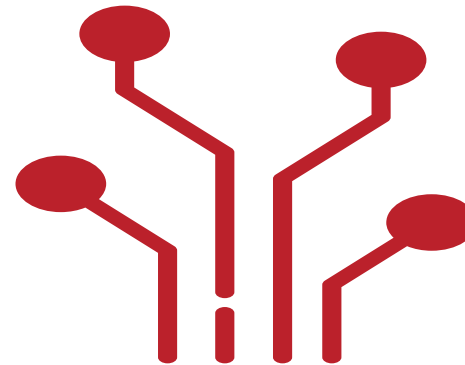
Równość macierzy

Macierze A i B są równe, gdy mają takie same wymiary $m \times n$ oraz $a_{ij} = b_{ij}$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ oraz $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Rodzaje macierzy



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

- **Macierz zerowa** wymiaru $m \times n$ jest to macierz, której wszystkie elementy są równe 0.
- Oznaczamy ją symbolem $\mathbf{0}_{m \times n}$ lub $\mathbf{0}$, gdy znamy jej wymiar.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

- **Macierz kwadratowa** stopnia n jest to macierz wymiaru $n \times n$.
- Elementy a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} macierzy kwadratowej tworzą jej **główną przekątną**:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

- **Macierz trójkątna dolna** jest to macierz kwadratowa stopnia $n \geqslant 2$, której wszystkie elementy stojące nad główną przekątną są równe 0.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Rodzaje macierzy

- **Macierz trójkątna górna** jest to macierz kwadratowa stopnia $n \geqslant 2$, której wszystkie elementy stojące pod główną przekątną są równe 0.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Rodzaje macierzy

- **Macierz diagonalna** jest to macierz kwadratowa stopnia n, której wszystkie elementy stojące poza główną przekątną są równe 0.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Rodzaje macierzy

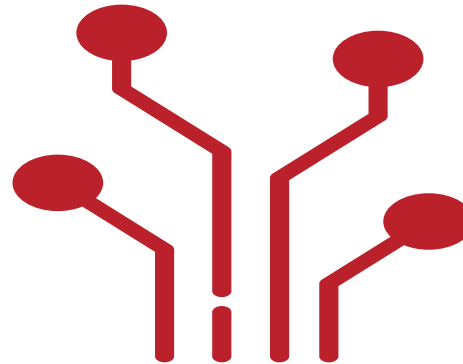
- **Macierz jednostkowa** jest to macierz diagonalna stopnia n, której wszystkie elementy stojące na głównej przekątnej są równe 1.
- Macierz jednostkową stopnia n oznaczamy symbolem I_n.

$$I_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Działania na macierzach



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Dodawanie macierzy

- Niech $A = [a_{ij}]$ oraz $B = [b_{ij}]$ będą macierzami wymiaru $m \times n$.
- **Sumą macierzy** A i B nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$ wymiaru $m \times n$, której elementy określone są wzorem

$$c_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} a_{ij} + b_{ij}$$

dla $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ oraz $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

- Piszemy $C = A + B$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Odejmowanie macierzy

- Niech $A = [a_{ij}]$ oraz $B = [b_{ij}]$ będą macierzami wymiaru $m \times n$.
- **Różnicą macierzy** A i B nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$ wymiaru $m \times n$, której elementy określone są wzorem

$$c_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} a_{ij} - b_{ij}$$

  dla $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ oraz $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Piszemy $C = A - B$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Mnożenie macierzy przez liczbę

- Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą wymiaru $m \times n$, zaś α będzie liczbą rzeczywistą.
- **Iloczynem macierzy A przez liczbę** α nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$ wymiaru $m \times n$, której elementy określone są wzorem

$$c_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha a_{ij}$$

dla $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ oraz $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

- Piszemy $C = \alpha A$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Mnożenie macierzy przez macierz

- Niech macierz $A = [a_{ij}]$ ma wymiar $m \times n$, a macierz $B = [b_{ij}]$ ma wymiar $n \times k$.
- **Iloczynem macierzy** A i B nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$ wymiaru $m \times k$, której elementy określone są wzorem

$$c_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

  dla $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ oraz $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.
- Piszemy $C = AB$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Uwaga

Równość $c_{iji1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$ *oznacza, że element* c_{ij} *stojący w macierzy* C *w* i*-tym wierszu oraz* j*-tej kolumnie otrzymujemy w wyniku mnożenia skalarnego* i*-tego wiersza macierzy* A *przez* j*-tą kolumnę macierzy* B*.*

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Uwaga

Jeżeli liczba kolumn macierzy A nie jest równa liczbie wierszy macierzy B, to mnożenie AB jest niewykonalne.

Uwaga

Mnożenie macierzy nie jest przemienne.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Przykład

- $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$
- $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Przykład

- $4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 12 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} =$
  $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Macierz transponowana

- **Macierzą transponowaną** do macierzy $A = [a_{ij}]$ wymiaru $m \times n$ nazywamy macierz $B = [b_{ij}]$ wymiaru $n \times m$, której elementy określone są wzorem

$$b_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} a_{ji}$$

  dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ oraz $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.
- Macierz transponowaną do macierzy A oznaczamy symbolem A^T.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA

Dziękuję za uwagę

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego

Rzeczpospolita Polska

Dofinansowane przez Unię Europejską

POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA



Wyznaczniki

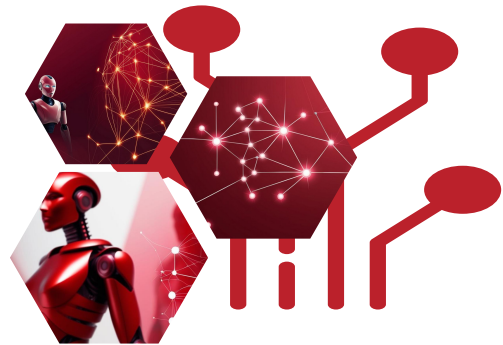
dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Plan wykładu

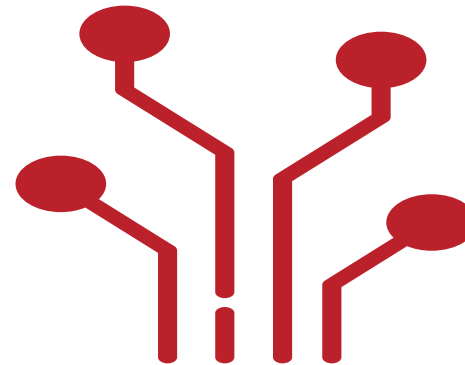
Wyznacznik macierzy i metody jego obliczania
Własności wyznaczników
Macierz odwrotna i jej własności



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Wyznacznik macierzy i metody jego obliczania



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Wyznacznik macierzy

- **Wyznacznikiem rzeczywistej macierzy kwadratowej** $A = [a_{ij}]$ nazywamy liczbę rzeczywistą $\det A$ przyporządkowaną macierzy A w pewien ściśle określony sposób.
- Wyznacznik macierzy A oznaczamy także symbolem $\det[a_{ij}]$ lub $|A|$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Reguła obliczania wyznaczników macierzy stopnia pierwszego

$$\det[a_{11}] = a_{11}$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Reguła obliczania wyznaczników macierzy stopnia drugiego

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Przykład

Obliczyć wyznacznik macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = 5 - 8 = -3$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Reguła Sarrusa obliczania wyznaczników macierzy stopnia trzeciego

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{array}$$

UWAGA! **Reguła ta nie przenosi się na wyznaczniki wyższych stopni.**

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Przykład

Obliczyć wyznacznik macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot (-1) - 5 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 4 \cdot 2 =$$

$$6 + 2 - 20 + 2 - 5 - 24 = -39$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Dopełnienie algebraiczne elementu macierzy

- Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geqslant 2$.
- **Dopełnieniem algebraicznym** elementu a_{ij} macierzy A nazywamy liczbę

$$D_{ij}(-1)^{i+j}\det A_{ij},$$

gdzie A_{ij} oznacza macierz stopnia $n-1$ otrzymaną przez skreślenie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny macierzy A.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Rozwinięcie Laplace'a wyznacznika

- Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geqslant 2$ oraz niech i, j będą ustalonymi liczbami naturalnymi takimi, że $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.
- Wtedy wyznacznik macierzy A można obliczyć na podstawie następujących wzorów:
  - $\det A = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \cdots + a_{in}D_{in}$;
    wzór ten nazywamy rozwinięciem Laplace'a wyznacznika względem i-tego wiersza;
  - $\det A = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \cdots + a_{nj}D_{nj}$;
    wzór ten nazywamy rozwinięciem Laplace'a wyznacznika względem j-tej kolumny.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Wyznacznik macierzy trójkątnej

- Jeżeli $A = [a_{ij}]$ jest macierzą diagonalną lub macierzą trójkątną dolną lub macierzą trójkątną górną stopnia n, to jej wyznacznik jest równy iloczynowi elementów stojących na głównej przekątnej tej macierzy, tzn. $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$.

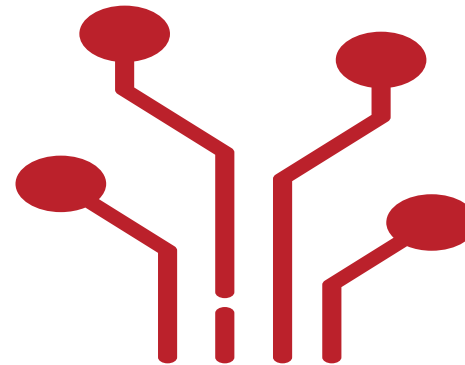
- Przykład

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 5 \cdot 3 = -30$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Własności wyznaczników



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

- Wyznacznik macierzy kwadratowej zawierającej kolumnę złożoną z samych zer lub wiersz złożony z samych zer jest równy 0, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

- Wyznacznik macierzy kwadratowej zawierającej dwie jednakowe (albo proporcjonalne) kolumny lub dwa jednakowe (albo proporcjonalne) wiersze jest równy 0, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & c_1 & \cdots & kc_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & c_2 & \cdots & kc_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & c_n & \cdots & kc_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ kc_1 & kc_2 & \cdots & kc_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

- Wyznacznik macierzy kwadratowej zmieni znak, jeżeli przestawimy w niej między sobą albo dwie kolumny albo dwa wiersze, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

oraz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

- Jeżeli wszystkie elementy pewnej kolumny lub pewnego wiersza macierzy kwadratowej posiadają wspólny czynnik, to można go wyłączyć przed wyznacznik tej macierzy, tzn.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & ca_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & ca_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & ca_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

oraz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

Wyznacznik macierzy kwadratowej nie zmieni się, jeżeli do dowolnej kolumny tej macierzy dodamy inną kolumnę pomnożoną przez dowolną liczbę lub do dowolnego jej wiersza dodamy inny wiersz pomnożony przez dowolną liczbę.

Twierdzenie

$detA = detA^T$ *dla dowolnej macierzy kwadratowej* A.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

(Twierdzenie Cauchy'ego)
Jeżeli A i B są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia, to $det(A \cdot B) = detA \cdot detB$.

Twierdzenie

Dla dowolnej macierzy kwadratowej A oraz dowolnego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest równość $det\left(A^n\right) = (detA)^n$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Przykład

Obliczyć wyznacznik macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -6 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Przykład cd.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -6 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{k_1+k_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ -4 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{k_2+2k_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 4 \\ -4 & 8 & 2 & 1 \\ 4 & 11 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{k_4+4k_3}{=}$$

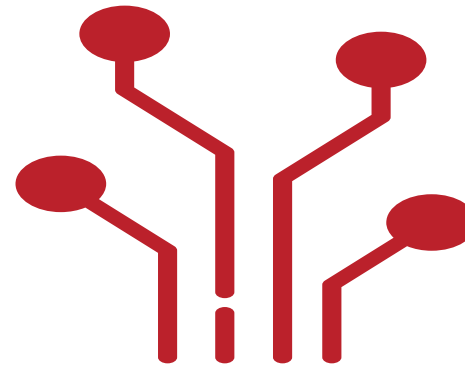
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -4 & 8 & 2 & 9 \\ 4 & 11 & 3 & 10 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 8 & 9 \\ 4 & 11 & 10 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} \overset{k_3-k_2}{=} - \begin{vmatrix} -4 & 8 & 1 \\ 4 & 11 & -1 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} \overset{w_1+w_2}{=}$$

$$- \begin{vmatrix} 0 & 19 & 0 \\ 4 & 11 & -1 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -19 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 19 \cdot (28+3) = 19 \cdot 31 = 589$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Macierz odwrotna i jej własności



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Macierz odwrotna

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n.

Definicja

Macierzą odwrotną *do macierzy* A *nazywamy macierz* A^{-1} *spełniającą warunek* $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, *gdzie* I_n *jest macierzą jednostkową stopnia* n.

Definicja

Jeżeli macierz A *posiada macierz odwrotną* A^{-1}, *to macierz* A *nazywamy* **odwracalną**. *Macierz odwrotna jest wyznaczona jednoznacznie.*

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenia o macierzy odwrotnej

Twierdzenie

Macierz kwadratowa jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $detA \neq 0$.

Twierdzenie

Jeżeli macierz kwadratowa $A = [a_{ij}]$ *jest nieosobliwa, to*

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}[D_{ij}]^T,$$

przy czym $[D_{ij}]$ *oznacza macierz dopełnień algebraicznych elementów* a_{ij} *macierzy* A.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Przykład

- Wyznaczyć, o ile istnieje, macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$.
- $\det A = 4 - 2 = 2 \neq 0$, więc macierz A jest odwracalna
- $[D_{ij}] = \begin{bmatrix} (-1)^2 \cdot (-4) & (-1)^3 \cdot 1 \\ (-1)^3 \cdot 2 & (-1)^4 \cdot (-1) \end{bmatrix}$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Przykład cd.

- $[D_{ij}] = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$
- $[D_{ij}]^T = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$
- $A^{-1} = \frac{1}{\det A}[D_{ij}]^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA

Dziękuję za uwagę

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego

Rzeczpospolita Polska

Dofinansowane przez Unię Europejską

POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA



Układy równań liniowych

dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Plan wykładu

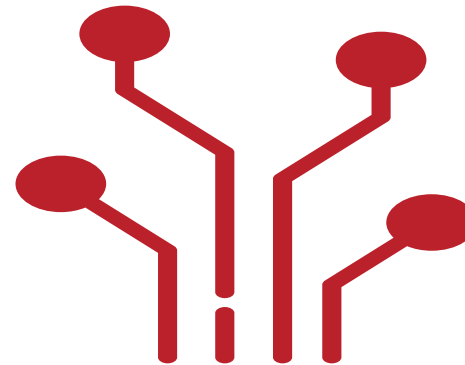
Definicja układu równań liniowych
Twierdzenie Cramera
Metoda eliminacji Gaussa
Twierdzenie Kroneckera–Capellego



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Definicja układu równań liniowych



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Definicja

Układem m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, gdzie $m \in \mathbb{N}$ oraz $n \in \mathbb{N}$, nazywamy układ równań postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \ddots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{R}$ oraz $b_i \in \mathbb{R}$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ oraz $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Macierzowa postać układu równań liniowych

- Układ równań liniowych można zapisać w postaci macierzowej $AX = B$,

gdzie $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$.

- Macierz A nazywamy *macierzą główną* układu równań liniowych, macierz X *macierzą (kolumną) niewiadomych*, zaś macierz B *macierzą (kolumną) wyrazów wolnych*.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Rozwiązanie liniowego układu równań

Definicja

Rozwiązaniem układu równań liniowych nazywamy ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ liczb rzeczywistych spełniających ten układ.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Rozwiązalność liniowego układu równań

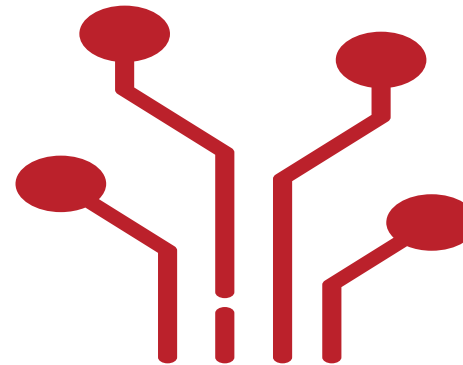
Układ równań liniowych może

- mieć dokładnie jedno rozwiązanie (*układ oznaczony, układ równań niezależnych*),
- mieć nieskończenie wiele rozwiązań (*układ nieoznaczony, układ równań zależnych*),
- nie mieć rozwiązań (*układ sprzeczny*).

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie Cramera



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Kwadratowe układy równań

Niech macierz główna A liniowego układu równań będzie macierzą kwadratową.

Twierdzenie

(Twierdzenie Cramera) Układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest nieosobliwa, tzn. $detA \neq 0$.
Rozwiązanie to dane jest następującymi wzorami Cramera:

$$x_1 = \frac{detA_1}{detA},\ x_2 = \frac{detA_2}{detA},\ \ldots\ x_n = \frac{detA_n}{detA},$$

gdzie macierz A_i otrzymujemy z macierzy A przez zastąpienie i-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Przykład 1

Dla jakiej wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ układ równań

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z + 3t = 3 \\ 3x - ay + z - t = 1 \\ x + 5z + t = 2 \\ -x + y - 2z + 3t = 5 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie?

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Przykład 1

- Obliczamy wyznacznik macierzy głównej układu równań:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & -a & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{k_3-5k_1 \\ k_4-k_1}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -8 & 1 \\ 3 & -a & -14 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^4 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -8 & 1 \\ -a & -14 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 178 - 35a.$$

- Układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0 \Leftrightarrow 178 - 35a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{178}{35}$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Przykład 2

Z układu równań:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ \quad y + z + t = 1 \\ x + 2y + 3z \quad = 2 \\ \quad y + 2z + 3t = -2 \end{cases}$$

wyznaczyć niewiadomą y.

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Przykład 2 – cd.

- $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{w_3 - w_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4.$
- $\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{w_3 - w_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12.$
- Zatem $y = \dfrac{\det A_2}{\det A} = 3.$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Jednorodne układy równań

Definicja

Układ równań nazywamy jednorodnym, gdy kolumna wyrazów wolnych jest macierzą zerową.

Uwaga

Jednorodny układ równań ma zawsze rozwiązanie. Jest to rozwiązanie zerowe.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Jednorodne układy równań

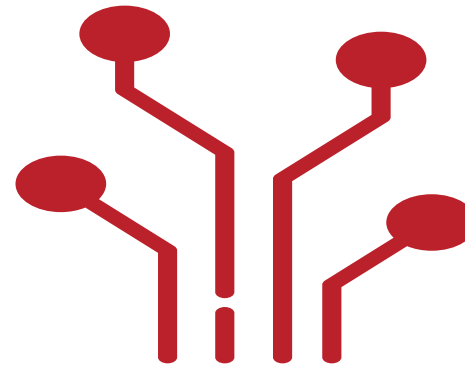
Wniosek

(Wniosek z twierdzenia Cramera) Kwadratowy jednorodny układ równań ma rozwiązanie niezerowe wtedy i tylko wtedy, gdy macierz główna tego układu jest osobliwa.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Metoda eliminacji Gaussa



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Metoda eliminacji Gaussa dla układów Cramera

- Załóżmy najpierw, że dany jest układ równań liniowych w postaci macierzowej $AX = B$, gdzie A jest kwadratową macierzą nieosobliwą.
- Z twierdzenia Cramera wynika, że ma on dokładnie jedno rozwiązanie.
- Zamiast rozwiązywać układ równań w klasycznej postaci, będziemy przekształcać macierz rozszerzoną układu $[A|B]$.

$$[A|B] \overset{\text{I etap}}{\longrightarrow} [A'|B'] \overset{\text{II etap}}{\longrightarrow} [I|R]$$

- A' – macierz trójkątna górna z jedynkami na głównej przekątnej
- R – macierz rozwiązań układu

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Operacje na wierszach macierzy, które nie zmieniają rozwiązań układu równań

- zamiana dwóch wierszy macierzy (zamiana kolejności równań) $w_i \leftrightarrow w_j$
- pomnożenie wiersza przez stałą różną od 0 (pomnożenie stronami równania przez stałą różną od 0) cw_i
- dodanie do elementów pewnego wiersza odpowiadających im elementów innego wiersza pomnożonych przez dowolną liczbę różną od 0 (dodawanie równań stronami) $w_i + cw_j$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

I etap metody eliminacji Gaussa

- Algorytm przekształcania macierzy $[A|B]$ do postaci $[A'|B']$, gdzie macierz A' jest macierzą trójkątną górną z jedynkami na głównej przekątnej:

$$w'_1 = \frac{1}{a_{11}} w_1 \quad - \quad \text{„ustawienie jedynki na głównej przekątnej”}$$

$$\left.\begin{aligned} w'_2 &= w_2 - a_{21} w'_1 \\ w'_3 &= w_3 - a_{31} w'_1 \\ &\dots \\ w'_n &= w_n - a_{n1} w'_1 \end{aligned}\right\} - \quad \text{„wyzerowanie elementów pod otrzymaną jedynką”}$$

- Jeżeli $a_{11} = 0$, to zamieniamy wiersze macierzy tak, aby w pierwszym wierszu i pierwszej kolumnie znalazł się element niezerowy.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

I etap metody eliminacji Gaussa

- Następnie kontynuujemy to postępowanie dla podmacierzy stopnia $n-1$, $n-2$, ... , 2 oraz 1.
- W obliczeniach ręcznych na tym etapie poprzestajemy i rozwiązujemy otrzymany równoważny układ równań, zaczynając od ostatniego równania.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

II etap metody eliminacji Gaussa

Algorytm przekształcenia macierzy górnie trójkątnej $[A'|B']$ do macierzy $[I|R]$, gdzie I jest macierzą jednostkową, zaś R macierzą rozwiązań wyjściowego układu równań:

$$w''_n = w'_n$$
$$w''_{n-1} = w'_{n-1} - a'_{n-1,n} w''_n$$
$$w''_{n-2} = w'_{n-2} - a'_{n-2,n-1} w''_{n-1} - a'_{n-2,n} w''_n$$
$$\dots$$
$$w''_1 = w'_1 - a'_{12} w''_2 - a'_{13} w''_3 - \dots - a'_{1n} w''_n$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Zastosowanie metody eliminacji Gaussa do odwracania macierzy

- Niech A będzie nieosobliwą macierzą kwadratową, zaś I macierzą jednostkową tego samego stopnia, co macierz A.
- Po zastosowaniu obu etapów metody eliminacji Gaussa do macierzy $[A|I]$ otrzymujemy macierz $[I|A^{-1}]$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Metoda eliminacji Gaussa dla macierzy prostokątnych

Stosując metodę eliminacji Gaussa dla dowolnego liniowego układu równań możemy napotkać na następujące sytuacje:

1. wiersz samych zer (równanie tożsamościowe $0 = 0$),
2. dwa wiersze proporcjonalne (dwa równania zależne),
3. brak elementu niezerowego w kolejnej kolumnie (brak możliwości ustawienia elementu niezerowego na głównej przekątnej).

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Metoda eliminacji Gaussa dla macierzy prostokątnych

Stosując metodę eliminacji Gaussa dla dowolnego układu równań liniowych możemy dodatkowo wykonywać następujące operacje:

1. skreślenie wiersza samych zer (stosujemy w sytuacji 1),
2. skreślenie jednego z dwóch wierszy proporcjonalnych (stosujemy w sytuacji 2),
3. zamiana miejscami dwóch kolumn przy jednoczesnej zamianie niewiadomych (stosujemy w sytuacji 3).

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Rozwiązanie prostokątnego układu równań

Po zastosowaniu I etapu metody eliminacji Gaussa do macierzy $[A|B]$ otrzymujemy macierz następującej postaci:

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c||c} & & & & z_1 \\ & A'_{r\times r} & & P_{r\times(n-r)} & z_2 \\ & & & & \vdots \\ & & & & z_r \\ \hline 0\,0 & \dots & 0 & 0 \quad \dots \quad 0 & z_{r+1} \end{array}\right],$$

gdzie A' jest macierzą trójkątną górną, zaś ostatni wiersz może nie wystąpić.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Rozwiązanie prostokątnego układu równań

- Jeżeli $z_{r+1} \neq 0$, to układ jest sprzeczny.
- Jeżeli $n = r$, to układ na dokładnie jedno rozwiązanie.
- Jeżeli ostatni wiersz w macierzy nie występuje oraz $r < n$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, przy czym r niewiadomych występujących w macierzy A' zależy od $n - r$ pozostałych (parametrów) występujących w macierzy P.

W przypadku obliczeń ręcznych poprzestajemy na tym etapie i wyznaczamy rozwiązanie z powyższej macierzy.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Przykład 3

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -6 \\ 3x_1 + 4x_3 - 10x_4 = -7 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases}$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Przykład 3 – cd.

Zastosujemy metodę eliminacji Gaussa.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 & -10 & -7 \\ -1 & 1 & -3 & 4 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} w_2 - 2w_1 \\ w_3 - w_1 \\ w_4 - 3w_1 \\ w_5 + w_1 \\ \longrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & 8 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & -3 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} w_2 \cdot (-\frac{1}{3}) \\ \longrightarrow \end{array}$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Przykład 3 – cd.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -3 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & -3 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_3 + 3w_2 \\ w_4 + 3w_2 \\ w_5 - 2w_2 \\ \longrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{3} & \frac{13}{3} & \frac{13}{3} \end{array}\right] \begin{array}{l} w_3 \cdot \frac{1}{4} \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{3} & \frac{13}{3} & \frac{13}{3} \end{array}\right] \begin{array}{l} w_4 - 3w_3 \\ w_5 + \frac{13}{3}w_3 \\ \longrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{us.} w_4, w_5 \\ \longrightarrow \end{array}$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Przykład 3 – cd.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

Po tych przekształceniach otrzymujemy następujący, równoważny wyjściowemu, układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -1 \\ \quad\; x_2 + \frac{5}{3}x_3 - \frac{8}{3}x_4 = \frac{1}{3} \\ \quad\quad\; x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Przykład 3 – cd.

- Traktując $x_4 = \alpha$ jako parametr, obliczamy x_3 z ostatniego równania: $x_3 = \alpha - 1$.
- Następnie obliczamy x_2 wstawiając $x_3 = \alpha - 1$ do drugiego równania: $x_2 = -\frac{5}{3}x_3 + \frac{8}{3}x_4 + \frac{1}{3} = -\frac{5}{3}(\alpha - 1) + \frac{8}{3}\alpha + \frac{1}{3} = \alpha + 2$.
- Podobnie, podstawiając $x_2 = \alpha + 2$ oraz $x_3 = \alpha - 1$ do pierwszego równania, obliczamy $x_1 = 2\alpha - 1$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Przykład 3 – cd.

- Rozwiązanie omawianego układu równań ma postać:

$$\begin{cases} x_1 = 2\alpha - 1 \\ x_2 = \alpha + 2 \\ x_3 = \alpha - 1 \\ x_4 = \alpha \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- Oznacza to, że układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Rozwiązanie prostokątnego układu równań

W przypadku, gdy układ jest rozwiązalny (nie występuje ostatni wiersz w macierzy M), po zastosowaniu II etapu eliminacji Gaussa do macierzy M otrzymujemy macierz M' postaci:

$$M' = \left[\begin{array}{c|c||c} I_{r\times r} & P'_{r\times(n-r)} & \begin{matrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_r \end{matrix} \end{array}\right].$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Rozwiązanie prostokątnego układu równań

Wówczas rozwiązanie układu przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ \dots \\ z'_r \end{bmatrix} - P' \cdot \begin{bmatrix} y_{r+1} \\ y_{r+2} \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Minor, rząd macierzy

Definicja

Minorem stopnia $k \in \mathbb{N}_+$ macierzy A nazywamy wyznacznik podmacierzy macierzy A utworzonej z elementów macierzy stojących na przecięciu dowolnie wybranych k kolumn i k wierszy.

Uwaga

Macierz wymiaru $m \times n$ ma dokładnie $\binom{m}{k}\binom{n}{k}$ minorów stopnia k, gdzie $1 \leqslant k \leqslant \min\{m, n\}$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Minor, rząd macierzy

Definicja

Rzędem macierzy nazywamy największy stopień jej niezerowego minora.

- Rząd macierzy A będziemy oznaczać symbolem $r(A)$.
- Przyjmujemy, że rząd macierzy zerowej jest równy 0.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

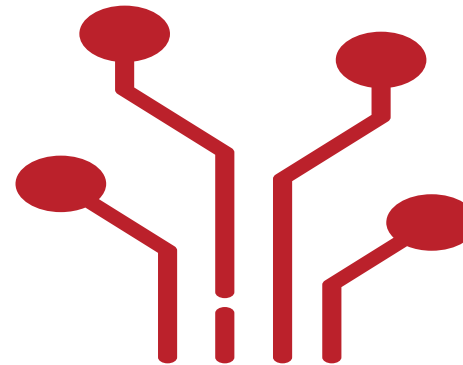
Własności rzędu macierzy

- Rząd macierzy nieosobliwej jest równy jej stopniowi.
- $r(A^T) = r(A)$
- Rząd macierzy nie ulegnie zmianie, gdy:
  1. przestawimy dwa wiersze (dwie kolumny),
  2. wiersze (kolumny) pomnożymy przez liczby różne od 0,
  3. do danego wiersza (kolumny) dodamy kombinację liniową wierszy (kolumn) pozostałych.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie Kroneckera–Capellego



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Definicja

Macierz rozszerzona układu równań jest to macierz powstała z macierzy głównej układu równań poprzez dopisanie do niej kolumny wyrazów wolnych.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Twierdzenie

(Twierdzenie Kroneckera–Capellego) Układ równań liniowych ma co najmniej jedno rozwiązanie, jeśli rząd $r(A)$ macierzy tego układu A jest równy rzędowi $r([A|B])$ macierzy rozszerzonej $[A|B]$, tzn. $r(A) = r([A|B])$.

- *Jeżeli $r(A) = r([A|B]) = r$ oraz $r = n$, gdzie n jest liczbą niewiadomych układu, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.*
- *Jeżeli $r(A) = r([A|B]) = r$ oraz $r < n$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów.*
- *Jeżeli $r(A) \neq r([A|B])$, to układ jest sprzeczny.*

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

POLLUB z nami nowoczesne technologie

POLITECHNIKA LUBELSKA

Dziękuję za uwagę

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego

Rzeczpospolita Polska

Dofinansowane przez Unię Europejską