

Materiały do przedmiotu:

MATEMATYKA II

Ćwiczenia nr 1

Autor:

dr Anna Makarewicz-Trześniewska

mgr Elżbieta Sędziewska



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Spis treści

ĆWICZENIA I -----	4
Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń -----	4
Przykłady zadań z rozwiązaniami -----	6
Zadania do samodzielnego rozwiązywania -----	14
Literatura -----	16
ĆWICZENIA II-----	18
Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń -----	18
Przykłady zadań z rozwiązaniami -----	20
Zadania do samodzielnego rozwiązywania -----	30
Literatura -----	33
ĆWICZENIA III -----	35
Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń -----	35
Przykłady zadań z rozwiązaniami -----	36
Zadania do samodzielnego rozwiązywania -----	44
Literatura -----	45
ĆWICZENIA IV -----	47
Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń -----	47
Przykłady zadań z rozwiązaniami -----	48
Zadania do samodzielnego rozwiązywania -----	53
Literatura -----	55

ĆWICZENIA V -----	57
Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń -----	57
Przykłady zadań z rozwiązaniami -----	58
Zadania do samodzielnego rozwiązywania -----	62
Literatura -----	63
ĆWICZENIA VI -----	65
Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń -----	65
Przykłady zadań z rozwiązaniami -----	66
Zadania do samodzielnego rozwiązywania -----	74
Literatura -----	77
ĆWICZENIA VII -----	79
Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń -----	79
Przykłady zadań z rozwiązaniami -----	82
Zadania do samodzielnego rozwiązywania -----	92
Literatura -----	94
ĆWICZENIA VIII -----	96
Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń -----	96
Przykłady zadań z rozwiązaniami -----	99
Zadania do samodzielnego rozwiązywania -----	105
Literatura -----	106

ĆWICZENIA I

Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń

W tym dziale matematyki podamy wzory na całkowanie pewnych funkcji elementarnych, jak również przykłady funkcji, których funkcje pierwotne nie są funkcjami elementarnymi. Podamy wzory na całkowanie przez części i całkowanie przez podstawienie.

Całki pewnych funkcji elementarnych.

- $\int 0 \, dx = C, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\int x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1, \text{ zakres zmiennej } x \text{ zależy od } \alpha$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C, \quad x \in (-\infty, 0) \text{ lub } x \in (0, \infty)$
- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$
- $\int e^x \, dx = e^x + C, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + C, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \in (k\pi, (k+1)\pi), \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$

- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{-1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x + C, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc} \sin x + C, \quad x \in (-1, 1)$
- $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc} \cos x + C, \quad x \in (-1, 1)$

Przydatne wzory.

- $\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C, \quad \text{gdzie } F \text{ jest funkcją pierwotną funkcji } f,$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C,$
- $\int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = -\frac{1}{f(x)} + C,$
- $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C.$

Poniższe twierdzenie pozwoli nam liczyć całkę z sumy i różnicy funkcji oraz z iloczynu funkcji przez stałą.

Twierdzenie o liniowości całki nieoznaczonej:

Jeśli funkcje f i g mają funkcje pierwotne, to:

1. $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$
2. $\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx,$

$$3. \int c f(x) dx = c \int f(x) dx, \text{ gdzie } c \in \mathbb{R}.$$

W przypadku liczenia pochodnej funkcji mieliśmy także do dyspozycji wzór na pochodną iloczynu i ilorazu. W przypadku całki nieoznaczonej nie mamy do dyspozycji analogicznego, uniwersalnego narzędzia.

Do liczenia całki nieoznaczonej z iloczynu przydatny jest następujący wzór:

Twierdzenie o całkowaniu przez części:

Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne, to

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Podobnie jak w przypadku iloczynu i ilorazu funkcji nie ma ogólnego wzoru na obliczanie pierwotnej, tak i w przypadku złożenia funkcji nie ma ogólnej metody wyznaczania pierwotnej (tak jak to miało miejsce w przypadku pochodnej). W przypadku złożenia pomocnym narzędziem może być następujący wzór na całkowanie przez podstawienie zwany także wzorem na zmianę zmiennych w całce.

Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie:

Jeżeli

1. funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale (a, b) ,
2. funkcja $g : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ ma ciągłą pochodną na przedziale (α, β) ,

to

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt = F(g(t)) + C,$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f oraz $C \in \mathbb{R}$.

Przykłady zadań z rozwiązaniami

Zadanie 1. Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji $f(x) = x^6 + 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x - 7$.

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$ oraz z liniowości całki nieoznaczonej:

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx,$$

oraz

$$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$$

Przejdziemy teraz do rozwiązania zadania.

$$\begin{aligned} & \int (x^6 + 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x - 7) dx \\ &= \int x^6 dx + \int 4x^4 dx - \int 5x^3 dx - \int 9x^2 dx + \int 4x dx - \int 7 dx \\ &= \int x^6 dx + 4 \int x^4 dx - 5 \int x^3 dx - 9 \int x^2 dx + 4 \int x dx - 7 \int dx \\ &= \frac{1}{7}x^7 + 4 \cdot \frac{1}{5}x^5 - 5 \cdot \frac{1}{4}x^4 - 9 \cdot \frac{1}{3}x^3 + 4 \cdot \frac{1}{2}x^2 - 7x + C \\ &= \frac{1}{7}x^7 + \frac{4}{5}x^5 - \frac{5}{4}x^4 - \frac{9}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 - 7x + C. \end{aligned}$$

Zadanie 2. Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji $f(x) = x^9 + \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{x^7}$.

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu tego przykładu skorzystamy z tych samych wzorów co w zadaniu 1 oraz z podstawowych działań na potęgach.

$$\begin{aligned} \int \left(x^9 + \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{x^7} \right) dx &= \int \left(x^9 + x^{2-\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} + x^{-7} \right) dx \\ &= \int x^9 dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int x^{-\frac{3}{2}} dx + \int x^{-7} dx \\ &= \frac{x^{10}}{10} + 2x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} - \frac{x^{-6}}{6} + C. \end{aligned}$$

Zadanie 3. Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2+1}$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+3}{x^2+1} dx &= \int \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1} \right) dx = \int 1 dx + \int \frac{2}{1+x^2} dx \\ &= x + 2 \arctg x + C.\end{aligned}$$

Zadanie 4.

Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji $f(x) = 2 \sin x \cos x$.

Rozwiązanie: W rozwiązaniu tego przykładu wykorzystamy wzór na całkowanie przez podstawienie.

$$\begin{aligned}\int 2 \sin x \cos x dx &= 2 \int \sin x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = 2 \int t dt \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} t^2 + C = \sin^2 x + C.\end{aligned}$$

Zadanie 5. Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji $f(x) = \sqrt{3x+8}$.

Rozwiązanie:

Korzystając z metody całkowania przez podstawienie otrzymujemy

$$\int \sqrt{3x+8} dx = \left| \begin{array}{l} t = 3x+8 \\ dt = 3 dx \\ \frac{1}{3} dt = dx \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9} \sqrt{(3x+8)^3} + C.$$

Zadanie 6. Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji $f(x) = (12x^2+4)(2x^3+2x-2)^{2026}$.

Rozwiązanie:

Przykład ten również ilustruje zastosowanie wzoru na całkowanie przez podstawie-

nie.

$$\begin{aligned} \int (12x^2 + 4)(2x^3 + 2x - 2)^{2026} dx &= \left| \begin{array}{l} t = 2x^3 + 2x - 2 \\ dt = (6x^2 + 2) dx \\ 2 dt = (12x^2 + 4) dx \end{array} \right| \\ &= 2 \int t^{2026} dt = 2 \cdot \frac{t^{2027}}{2027} + C \\ &= \frac{2}{2027} (2x^3 + 2x - 2)^{2027} + C. \end{aligned}$$

Zadanie 7. Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji $f(x) = \frac{1}{e^{8x}}$.

Rozwiązanie:

W przykładzie tym również zastosujemy wzór na całkowanie przez podstawienie.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^{8x}} dx &= \int e^{-8x} dx = \left| \begin{array}{l} t = -8x \\ dt = -8 dx \\ -\frac{1}{8} dt = dx \end{array} \right| = -\frac{1}{8} \int e^t dt = -\frac{1}{8} e^t + C \\ &= -\frac{1}{8} e^{-8x} + c = -\frac{1}{8e^{8x}} + C. \end{aligned}$$

Zadanie 8. Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-16x^4}}$.

Rozwiązanie:

W przykładzie tym również zastosujemy wzór na całkowanie przez podstawienie.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{\sqrt{1-16x^4}} dx &= 2 \int \frac{x}{\sqrt{1-(4x^2)^2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = 4x^2 \\ dt = 8x dx \\ \frac{1}{8} dt = x dx \end{array} \right| \\ &= 2 \cdot \frac{1}{8} \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{4} \arcsin t + C = \frac{1}{4} \arcsin(4x^2) + C. \end{aligned}$$

Zadanie 9. Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji $f(x) = \frac{dx}{e^{-2x} + e^{2x}}$.

Rozwiązanie:

W przykładzie tym również zastosujemy wzór na całkowanie przez podstawienie.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{e^{-2x} + e^{2x}} &= \int \frac{dx}{\frac{1}{e^{2x}} + e^{2x}} = \int \frac{dx}{\frac{1}{e^{2x}} + \frac{(e^{2x})^2}{e^{2x}}} = \int \frac{e^{2x}}{1 + (e^{2x})^2} dx \\ &= \left| \begin{array}{l} t = e^{2x} \\ dt = 2e^{2x} dx \\ \frac{1}{2} dt = e^{2x} dx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1 + t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \arctg t + C = \frac{1}{2} \arctg(e^{2x}) + C.\end{aligned}$$

Zadanie 10. Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji $f(x) = \frac{x+9}{\sqrt[7]{x-3}}$.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int \frac{x+9}{\sqrt[7]{x-3}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = x-3 \\ t+3 = x \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{t+3+9}{\sqrt[7]{t}} dt = \int \frac{t}{\sqrt[7]{t}} dt + \int \frac{12}{\sqrt[7]{t}} dt \\ &= \int t^{1-\frac{1}{7}} dt + 12 \int t^{-\frac{1}{7}} dt = \int t^{\frac{6}{7}} dt + 12 \int t^{-\frac{1}{7}} dt \\ &= \frac{1}{\frac{13}{7}} t^{\frac{13}{7}} + 12 \cdot \frac{7}{6} t^{\frac{6}{7}} + C = \frac{7}{13} (x-3)^{\frac{13}{7}} + 14(x-3)^{\frac{6}{7}} + C.\end{aligned}$$

Zadanie 11. Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji $f(x) = \frac{1}{x \sin^2(\ln x)}$.

Rozwiązanie:

W przykładzie tym również zastosujemy wzór na całkowanie przez podstawienie.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x \sin^2(\ln x)} dx &= \int \frac{1}{\sin^2(\ln x)} \cdot \frac{1}{x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sin^2 t} dt \\ &= -\operatorname{ctg} t + C = -\operatorname{ctg}(\ln x) + C.\end{aligned}$$

Zadanie 12. Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

Rozwiązanie:

Rozważaną całkę obliczymy dokonując podstawienia.

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \, dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} \\ = \ln |t| + c = \ln |\sin x| + C.$$

Zadanie 13. Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji $f(x) = \frac{1}{6x+8}$.

Rozwiązanie:

Zastosujemy wzór $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + c$.

$$\int \frac{1}{6x+8} \, dx = \frac{1}{6} \int \frac{6}{6x+8} \, dx = \frac{1}{6} \int \frac{(6x+8)'}{6x+8} \, dx = \frac{1}{6} \ln |6x+8| + C.$$

Zadanie 14. Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji $f(x) = \frac{1}{1-7x}$.

Rozwiązanie:

Skorzystamy z tego samego wzoru co w poprzednim przykładzie.

$$\int \frac{1}{1-7x} \, dx = -\frac{1}{7} \int \frac{-7}{1-7x} \, dx = -\frac{1}{7} \ln |1-7x| + C.$$

Zadanie 15. Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji $f(x) = 2x \ln x$.

Rozwiązanie:

$$\int 2x \ln x \, dx = \left| \begin{array}{ll} f(x) = \ln x & g'(x) = x \\ f'(x) = \frac{1}{x} & g(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{array} \right| = 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - 2 \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}x^2 \, dx \\ = 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 \ln x - 2 \cdot \frac{1}{2} \int x \, dx = x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Zadanie 16. Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji $f(x) = xe^x$.

Rozwiązanie:

Tym razem również wykorzystamy metodę całkowania przez części.

$$\int xe^x \, dx = \left| \begin{array}{ll} f(x) = x & g'(x) = e^x \\ f'(x) = 1 & g(x) = e^x \end{array} \right| = xe^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = xe^x - e^x + C.$$

Zadanie 17. Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji $f(x) = x^2 e^x$.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na całkowanie przez części otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= \left| \begin{array}{ll} f(x) = x^2 & g'(x) = e^x \\ f'(x) = 2x & g(x) = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - \int 2x \cdot e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx. \end{aligned}$$

Wstawiając obliczenia z poprzedniego przykładu, mamy

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \cdot (x e^x - e^x) + C = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C.$$

Zadanie 18. Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji $f(x) = (3x - 4)e^{8x}$.

Rozwiązanie:

Całkując przez części otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int (3x - 4)e^{8x} dx &= \left| \begin{array}{ll} f(x) = 3x - 4 & g'(x) = e^{8x} \\ f'(x) = 3 & g(x) = \frac{1}{8}e^{8x} \end{array} \right| \\ &= (3x - 4) \cdot \frac{1}{8}e^{8x} - \int 3 \cdot \frac{1}{8}e^{8x} dx \\ &= \left(\frac{3}{8}x - \frac{4}{8}\right)e^{8x} - \frac{3}{8} \int e^{8x} dx = \left(\frac{3}{8}x - \frac{1}{2}\right)e^{8x} - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{8}e^{8x} + C \\ &= \left(\frac{3}{8}x - \frac{1}{2} - \frac{3}{64}\right)e^{8x} + C = \left(\frac{3}{8}x - \frac{35}{64}\right)e^{8x} + C. \end{aligned}$$

Zadanie 19. Stosując całkowanie przez części wyznaczyć funkcję pierwotną dla funkcji $f(x) = (-7x^2 + 9x)\ln x$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
 \int (-7x^2 + 9x) \ln x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} f(x) = \ln x & g'(x) = -7x^2 + 9x \\ f'(x) = \frac{1}{x} & g(x) = -\frac{7}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 \end{array} \right| \\
 &= \left(-\frac{7}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2\right) \ln x - \int \left(-\frac{7}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2\right) \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
 &= \left(-\frac{7}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2\right) \ln x - \int \left(-\frac{7}{3}x^2 + \frac{9}{2}x\right) \, dx \\
 &= \left(-\frac{7}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2\right) \ln x - \left(-\frac{7}{9}x^3 + \frac{9}{4}x^2\right) + C \\
 &= \left(\frac{9}{2}x^2 - \frac{7}{3}x^3\right) \ln x + \frac{7}{9}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + C
 \end{aligned}$$

Zadanie 20. Oblicz całkę $\int \frac{3x-1}{x^2-x-6} \, dx$.

Rozwiązanie:

Na początek rozkładamy mianownik na czynniki, korzystając z miejsc zerowych funkcji kwadratowej są to 3 oraz -2. Następnie zapiszemy ułamek jako sumę dwóch ułamków o nieznanych licznikach A i B . Łatwo widać, że $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$. Ułamek $\frac{3x-1}{x^2-x-6}$ możemy zapisać jako $\frac{3x-1}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$. Aby wyliczyć współczynniki, podstawiamy miejsca zerowe mianownika do równania $3x-1 = A(x+2) + B(x-3)$.

Dla $x = 3$: mamy $3 \cdot 3 - 1 = A(3 + 2)$ więc $8 = 5A$ zatem $A = \frac{8}{5}$

Dla $x = -2$ mamy $3 \cdot (-2) - 1 = B(-2 - 3)$ zatem $-7 = -5B$ więc $B = \frac{7}{5}$

Po wyznaczeniu współczynników zastępujemy pierwotną całkę sumą dwóch prostszych całek. Każda z nich sprowadza się do logarytmu naturalnego zgodnie ze wzorem $\int \frac{1}{x+a} \, dx = \ln|x+a| + C$. Następnie stosujemy prawa logarytmów, aby upo-

rządkować wynik.

$$\begin{aligned}\int \frac{3x-1}{x^2-x-6} dx &= \int \left(\frac{8/5}{x-3} + \frac{7/5}{x+2} \right) dx = \frac{8}{5} \int \frac{1}{x-3} dx + \frac{7}{5} \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= \frac{8}{5} \ln|x-3| + \frac{7}{5} \ln|x+2| + C = \frac{1}{5} (8 \ln|x-3| + 7 \ln|x+2|) + C \\ &= \frac{1}{5} \ln|(x-3)^8(x+2)^7| + C\end{aligned}$$

Zadanie 21. Oblicz całkę $\int \frac{3x+1}{(x-1)^2} dx$.

Rozwiązanie:

Gdy w mianowniku mamy $(x-a)^2$, rozkład musi zawierać dwa ułamki jeden z mianownikiem $(x-a)$ oraz drugi z mianownikiem $(x-a)^2$. Zatem

$$\frac{3x+1}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}.$$

Otrzymujemy więc równanie $3x+1 = A(x-1) + B$. Wyznaczamy współczynniki A i B w następujący sposób:

Dla $x=1$ mamy $3 \cdot 1 + 1 = B$ zatem $B=4$

Dla $x=0$ mamy $3 \cdot 0 + 1 = A(0-1) + 4$ więc $1 = -A + 4$ mamy $A=3$.

Przechodząc do obliczenia całki otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+1}{(x-1)^2} dx &= \int \left(\frac{3}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} \right) dx = 3 \int \frac{1}{x-1} dx + 4 \int (x-1)^{-2} dx \\ &= 3 \ln|x-1| + 4 \cdot \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C = 3 \ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + C\end{aligned}$$

Zadania do samodzielnego rozwiązywania

Zadanie 22. Oblicz podane całki:

1. $\int \frac{3x}{\sqrt{1-81x^4}} dx$

2. $\int \frac{1}{e^{5x}} dx$
3. $\int \frac{dx}{e^{-6x} + e^{6x}}$
4. $\int \frac{x-8}{\sqrt[5]{x+2}} dx$
5. $\int \frac{1}{x \sin^2(\ln x)} dx$
6. $\int \operatorname{tg} x dx$
7. $\int \frac{1}{8x-6} dx$
8. $\int \frac{1}{15-9x} dx$
9. $\int 6x \ln x dx$
10. $\int x^3 e^x dx$
11. $\int (2x-3)e^{4x} dx$
12. $\int (-9x-5) \sin x dx$
13. $\int (3x^3 + 5x + 4) \cos 3x dx$
14. $\int (9x^2 - 6x) \ln x dx$
15. $\int e^{2x} \cos 4x dx$
16. $\int \sin^2 x dx$
17. $\int \cos^7 x dx$
18. $\int \frac{2x+10}{x^2+2x-3} dx$
19. $\int \frac{2x-3}{3x^2-5x+2} dx$
20. $\int \frac{5x-2}{(x+2)^2} dx$
21. $\int \frac{x}{9x^2-12x+4} dx$
22. $\int \frac{x+1}{2x^2+6x+5} dx$



Literatura

- [1] Krywicki, Włodzimierz, i in. *Analiza matematyczna w zadaniach. Cz. 1.* Wydawnictwo Naukowe PWN, 2003.
- [2] Krywicki, Włodzimierz, i in. *Analiza matematyczna w zadaniach. Cz. 2.* Wydawnictwo Naukowe PWN, 2003.
- [3] Gewert, Marian, i in. *Analiza matematyczna 1: przykłady i zadania.* Oficyna Wydawnicza GiS, 2018.



Materiały do przedmiotu:

MATEMATYKA II

Ćwiczenia nr 2

Autor:

dr Anna Makarewicz-Trześniewska

mgr Elżbieta Sędziewska



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



ĆWICZENIA II

Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń

Celem ćwiczeń jest przedstawienie podstawowych metod całkowania całek oznaczonych wraz z ich zastosowaniem m.in. w geometrii.

Twierdzenie Newtona-Leibniza: Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $\langle a; b \rangle$, to

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

gdzie F oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji f na przedziale $\langle a; b \rangle$.

Własności całki oznaczonej: Jeśli funkcje f i g są całkowalne na przedziale $\langle a, b \rangle$, to

1. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$
2. $\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx,$
3. $\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx,$ gdzie $c \in \mathbb{R}.$

Nie ma analogicznych twierdzeń dla całek z iloczynu lub ilorazu funkcji.

Twierdzenie o całkowaniu przez części: Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne na przedziale $\langle a, b \rangle$, to

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie: Jeżeli

1. funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale (a, b) ,
2. funkcja $g : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ ma ciągłą pochodną na przedziale (α, β) ,

3. $g(\alpha) = a$ oraz $g(\beta) = b$

to

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

Interpretacja geometryczna całki oznaczonej:

1. Niech f będzie funkcją ciągłą i nieujemną na przedziale $\langle a; b \rangle$.

2. Wówczas

$$\int_a^b f(x)dx$$

jest równa polu figury ograniczonej wykresem funkcji f , osią Ox i prostymi $x = a$ i $x = b$.

Zastosowania geometryczne całek oznaczonych. Pole trapezu krzywoliniowego.

Niech funkcje f oraz g będą ciągłe na przedziale $\langle a; b \rangle$ oraz niech $f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in \langle a; b \rangle$. Wtedy pole trapezu krzywoliniowego D ograniczonego wykreśami funkcji f i g oraz prostymi $x = a$, $x = b$ wyraża się wzorem:

$$|D| = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$$

Długość krzywej. Niech funkcja f ma ciągłą pochodną na przedziale $\langle a; b \rangle$. Wtedy długość krzywej $\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in \langle a; b \rangle\}$ wyraża się wzorem:

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

Objętość bryły obrotowej. Niech funkcja nieujemna f będzie ciągła na przedziale $\langle a; b \rangle$. Niech T oznacza trapez krzywoliniowy ograniczony wykresem funkcji f , osią Ox oraz prostymi $x = a$; $x = b$. Wtedy objętość bryły V powstałej z obrotu trapezu T wokół osi Ox wyraża się wzorem:

$$|V| = \pi \int_a^b [f(x)]^2dx$$

Natomiast wokół osi Oy :

$$|V| = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

Pole powierzchni obrotowej. Niech funkcja nieujemna f ma ciągłą pochodną na przedziale $< a; b >$. Wtedy pole powierzchni Σ powstałej z obrotu wykresu funkcji f wokół osi Ox wyraża się wzorem:

$$|\Sigma| = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Natomiast wokół osi Oy :

$$|\Sigma| = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Przykłady zadań z rozwiązaniami

Zadanie 23. Oblicz całkę $\int_1^e \ln x dx$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x dx &= \int_1^e 1 \cdot \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} f(x) = \ln x & g'(x) = 1 \\ f'(x) = \frac{1}{x} & g(x) = x \end{array} \right| \\ &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = (e \ln e - 1 \ln 1) - \int_1^e 1 dx \\ &= (e \cdot 1 - 0) - [x]_1^e = e - (e - 1) = 1 \end{aligned}$$

Zadanie 24. Oblicz całkę $\int_0^\pi x \sin x dx$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x \sin x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} f(x) = x & g'(x) = \sin x \\ f'(x) = 1 & g(x) = -\cos x \end{array} \right| \\ &= [-x \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \cdot (-\cos x) \, dx \\ &= (-\pi \cos \pi - (-0 \cos 0)) + \int_0^{\pi} \cos x \, dx \\ &= (-\pi \cdot (-1) + 0) + [\sin x]_0^{\pi} \\ &= \pi + (\sin \pi - \sin 0) = \pi + (0 - 0) = \pi\end{aligned}$$

Zadanie 25. Oblicz całkę $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx$.

Całkę tę obliczymy wykorzystując dwa razy wzór na całkowanie przez części a następnie rozwiązując równanie, gdzie niewiadomą będzie rozważana całka.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx = \left| \begin{array}{ll} f(x) = \sin x & g'(x) = e^x \\ f'(x) = \cos x & g(x) = e^x \end{array} \right| \\ &= [e^x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx \\ &= (e^{\pi/2} \cdot 1 - 0) - \left| \begin{array}{ll} f(x) = \cos x & g'(x) = e^x \\ f'(x) = -\sin x & g(x) = e^x \end{array} \right| \\ &= e^{\pi/2} - \left([e^x \cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx \right) \\ &= e^{\pi/2} - ((0 - 1) + I) = e^{\pi/2} + 1 - I\end{aligned}$$

Rozwiązujemy równanie $I = e^{\pi/2} + 1 - I$:

$$2I = e^{\pi/2} + 1 \implies I = \frac{e^{\pi/2} + 1}{2}$$

Zadanie 26. Oblicz całkę $\int_1^e (\ln x)^2 \, dx$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
 \int_1^e (\ln x)^2 dx &= \left| \begin{array}{ll} f(x) = (\ln x)^2 & g'(x) = 1 \\ f'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} & g(x) = x \end{array} \right| = [x(\ln x)^2]_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx \\
 &= (e \cdot 1^2 - 0) - 2 \left(\left| \begin{array}{ll} f(x) = \ln x & g'(x) = 1 \\ f'(x) = \frac{1}{x} & g(x) = x \end{array} \right| \right) \\
 &= e - 2 \left([x \ln x]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx \right) = e - 2((e \ln e - 1 \ln 1) - [x]_1^e) \\
 &= e - 2(e - (e - 1)) = e - 2(1) = e - 2
 \end{aligned}$$

Zadanie 27. Oblicz całkę $\int_0^2 \sqrt{4x+1} dx$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 \sqrt{4x+1} dx &= \left| \begin{array}{ll} t = 4x+1 \\ dt = 4 dx \\ dx = \frac{1}{4} dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ \hline t & 1 & 9 \end{array} \end{array} \right| == \int_1^9 \sqrt{t} \cdot \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} \int_1^9 t^{1/2} dt \\
 &= \frac{1}{4} \left[\frac{t^{3/2}}{3/2} \right]_1^9 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} [\sqrt{t^3}]_1^9 == \frac{1}{6} (\sqrt{9^3} - \sqrt{1^3}) = \frac{1}{6} (27 - 1) = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}
 \end{aligned}$$

Zadanie 28. Oblicz całkę $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$.

Rozwiązanie:

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx = \left| \begin{array}{ll} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ \begin{array}{c|c|c} x & e & e^2 \\ \hline t & 1 & 2 \end{array} \end{array} \right| == \int_1^2 \frac{1}{t} dt = [\ln |t|]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Zadanie 29. Oblicz całkę $\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$.

Rozwiązanie:

Aby obliczyć powyższą całkę wykorzystamy następujące podstawienie

$$\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx = \int_0^1 x^2 \cdot e^{x^2} \cdot x dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \\ x dx = \frac{1}{2} dt \\ \hline \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ t & 0 & 1 \end{array} \end{array} \right| = \int_0^1 t \cdot e^t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t e^t dt$$

Skorzystamy teraz ze wzoru na całkowanie przez części otrzymując

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 t e^t dt &= \left| \begin{array}{l} f(t) = t \quad g'(t) = e^t \\ f'(t) = 1 \quad g(t) = e^t \end{array} \right| = \frac{1}{2} \left([t e^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt \right) = \\ &= \frac{1}{2} ((1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0) - [e^t]_0^1) = \frac{1}{2} (e - (e^1 - e^0)) = \frac{1}{2} (e - e + 1) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Zadanie 30. Oblicz wartość całki niewłaściwej $\int_0^\infty x e^{-x} dx$.

Rozwiązanie:

$$\int_0^\infty x e^{-x} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x e^{-x} dx$$

Obliczymy całkę nieoznaczoną $\int x e^{-x} dx$ przez części w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \int x e^{-x} dx &= \left| \begin{array}{l} f(x) = x \quad f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^{-x} \quad g(x) = -e^{-x} \end{array} \right| \\ &= -x e^{-x} - \int 1 \cdot (-e^{-x}) dx = -x e^{-x} - e^{-x} = -e^{-x} (x + 1) \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x e^{-x} dx &= \lim_{T \rightarrow \infty} [-e^{-x} (x + 1)]_0^T \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{-(T + 1)}{e^T} - (-e^0 (0 + 1)) \right) \\ &= 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Zadanie 31. Oblicz wartość całki niewłaściwej $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} [\arctg(x)]_0^T \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} (\arctg(T) - \arctg(0)) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Zadanie 32. Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji $f(x) = -x^2 + 4$ oraz $g(x) = x + 2$.

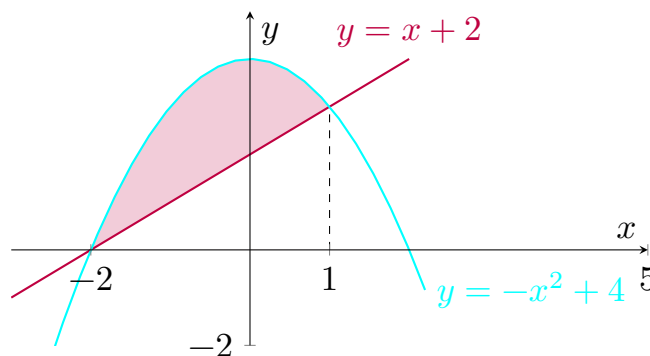
Rozwiązanie:

Na początek wyznaczmy punkty przecięcia wykresów funkcji $f(x) = -x^2 + 4$ oraz $g(x) = x + 2$.

$$-x^2 + 4 = x + 2 \implies x^2 + x - 2 = 0$$

Pierwiastki równania to $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 1$. Obliczymy teraz pole jako całkę oznaczoną w następujący sposób

$$\begin{aligned}P &= \int_{-2}^1 [(-x^2 + 4) - (x + 2)] dx = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1 \\ &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4 \right) = \frac{7}{6} - \left(-\frac{10}{3} \right) = \frac{7}{6} + \frac{20}{6} = \frac{27}{6} = 4,5.\end{aligned}$$



Zadanie 33. Oblicz pole figury ograniczonej wykresami funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$ oraz prostą $x = e$.

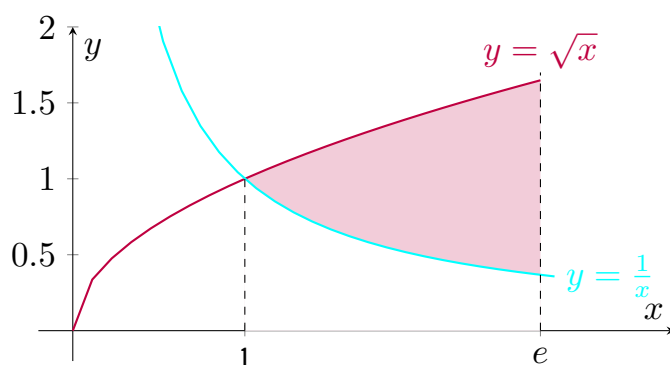
Rozwiązanie:

Wyznaczamy punkt przecięcia wykresów funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ i $g(x) = \sqrt{x}$.

$$\sqrt{x} = \frac{1}{x} \Rightarrow x\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x^{3/2} = 1 \Rightarrow x = 1$$

Pole figury na przedziale $[1, e]$ gdzie $\sqrt{x} \geq \frac{1}{x}$ obliczymy wykorzystując całkę oznaczoną.

$$\begin{aligned} P &= \int_1^e \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x} \right) dx = \int_1^e \left(x^{1/2} - \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \ln |x| \right]_1^e \\ &= \left(\frac{2}{3} e\sqrt{e} - \ln e \right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 1 - \ln 1 \right) = \frac{2}{3} e\sqrt{e} - 1 - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} e\sqrt{e} - \frac{5}{3} \end{aligned}$$



Zadanie 34. Oblicz pole figury ograniczonej od góry wykresami funkcji $f(x) = x^2$ oraz $g(x) = \frac{1}{x}$, osią OX oraz prostą $x = e$.

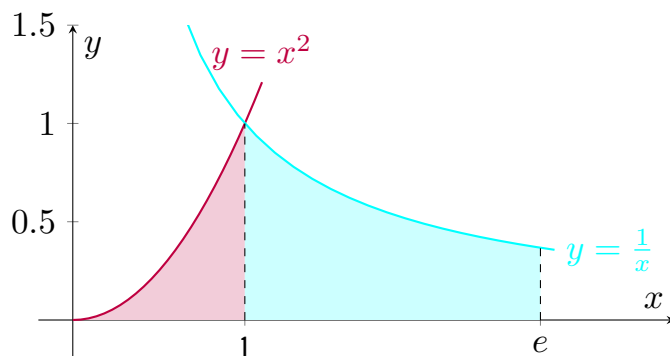
Rozwiązanie:

Na początek wyznaczamy punkt przecięcia funkcji $f(x) = x^2$ i $g(x) = \frac{1}{x}$

$$x^2 = \frac{1}{x} \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

Obszar musimy podzielić na dwa pola.

1. Od $x = 0$ do $x = 1$ pole ograniczone jest od góry parabolą $f(x) = x^2$.
2. Od $x = 1$ do $x = e$ pole ograniczone jest od góry hiperbolą $g(x) = \frac{1}{x}$.

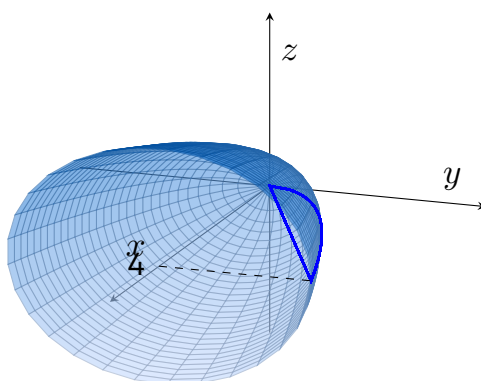


Pole całkowite obliczymy sumując pola powyższych figur $P = P_1 + P_2$

$$P = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^e \frac{1}{x} dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + [\ln |x|]_1^e = \frac{1}{3} - 0 + \ln e - \ln 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

Zadanie 35. Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ wokół osi OX dla $x \in [0, 4]$.

Rozwiązanie:



Objętość V bryły powstałej przez obrót funkcji $f(x)$ wokół osi OX na przedziale $[a, b]$ obliczamy ze wzoru

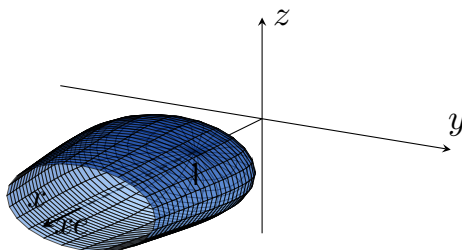
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^4 = \pi \left(\frac{1}{2} \cdot 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 \right) = 8\pi.$$

Zadanie 36. Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót wykresu funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$ wokół osi OX dla $x \in [1, e]$.

Rozwiązanie:



Podstawiając do wzoru na objętość otrzymujemy następującą całkę, którą obliczymy stosując metodę przez podstawienie

$$V = \pi \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left| \begin{array}{c|c|c} t = \ln x & & \\ \hline dt = \frac{1}{x} dx & & \\ \hline x & 1 & e \\ \hline t & 0 & 1 \end{array} \right| = \pi \int_0^1 \frac{t}{e^t} dt = \pi \int_0^1 t e^{-t} dt$$

Następnie będziemy całkować przez części w następujący sposób

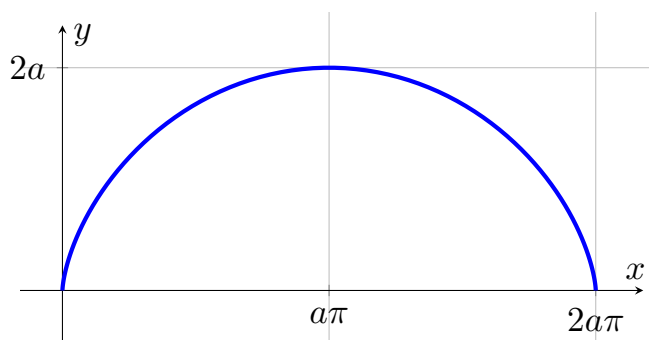
$$\left| \begin{array}{cc} f(t) = t & f'(t) = 1 \\ g'(t) = e^{-t} & g(t) = -e^{-t} \end{array} \right|$$

Objętość bryły wyraża się poprzez:

$$\begin{aligned} V &= \pi \left([t \cdot (-e^{-t})]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot (-e^{-t}) dt \right) = \pi \left([-te^{-t}]_0^1 + \int_0^1 e^{-t} dt \right) \\ &= \pi \left((-1 \cdot e^{-1} - 0) + [-e^{-t}]_0^1 \right) = \pi \left(-e^{-1} + (-e^{-1} - (-e^0)) \right) \\ &= \pi \left(-e^{-1} - e^{-1} + 1 \right) = \pi \left(1 - \frac{2}{e} \right). \end{aligned}$$

Zadanie 37. Oblicz długość jednego łuku cycloidy danej równaniami parametrycznymi $x(t) = a(t - \sin t)$ oraz $y(t) = a(1 - \cos t)$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$.

Rozwiązanie:



Długość łuku L krzywej danej parametrycznie obliczamy ze wzoru

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Na początek wyznaczmy pochodne $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a \sin t$ i wstawimy je do wyrażenia pod pierwiastkiem

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = a^2(1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t).$$

Korzystając z $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ możemy zapisać, że

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = a^2(2 - 2 \cos t) = 2a^2(1 - \cos t)$$

Następnie stosując wzór na sinus połowy kąta [$1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2}$] otrzymujemy

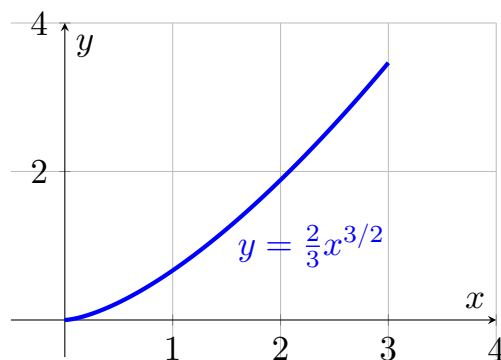
$$\sqrt{2a^2 \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}} = 2a \sin \frac{t}{2}$$

Ponieważ dla $t \in [0, 2\pi]$ funkcja $\sin \frac{t}{2}$ jest nieujemna, więc możemy pominąć wartość bezwzględną a długość łuku rozważanej krzywej wynosi

$$L = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 2a \left[-2 \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = -4a(\cos \pi - \cos 0) = -4a(-1 - 1) = 8a$$

Zadanie 38. Oblicz długość łuku krzywej $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ dla $x \in [0, 3]$.

Rozwiązanie:



Rozwiązanie:

Długość łuku L obliczamy ze wzoru:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Obliczamy pochodną funkcji i podstawiamy do wyrażenia pod pierwiastkiem $1 + [f'(x)]^2$:

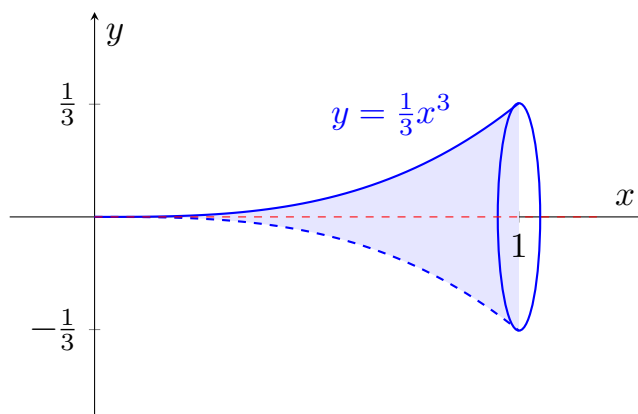
$$f'(x) = \left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} = x^{1/2} = \sqrt{x}.$$

Zatem $1 + (\sqrt{x})^2 = 1 + x$. Długość łuku krzywej $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ możemy zapisać jako

$$\begin{aligned} L &= \int_0^3 \sqrt{1+x} dx = \left| \begin{array}{c|c|c} u=1+x & & \\ du=dx & & \\ \hline x & 0 & 3 \\ \hline u & 1 & 4 \end{array} \right| = \int_1^4 u^{1/2} du = \left[\frac{2}{3}u\sqrt{u} \right]_1^4 = \frac{2}{3}(4\sqrt{4} - 1\sqrt{1}) \\ &= \frac{2}{3}(8 - 1) = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Zadanie 39. Oblicz pole S powierzchni powstałej przez obrót łuku krzywej $f(x) = \frac{1}{3}x^3$, gdzie $x \in [0, 1]$, wokół osi OX .

Rozwiązanie:



Korzystamy ze wzoru na pole powierzchni obrotowej bryły:

$$S = 2\pi \int_0^1 f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Obliczamy pochodną i podstawiamy do wzoru. $f'(x) = x^2 \Rightarrow [f'(x)]^2 = x^4$ Zatem

$$S = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{3} x^3 \sqrt{1 + x^4} dx = \frac{2}{3} \pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + x^4} dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 + x^4 \\ dt = 4x^3 dx \\ x^3 dx = \frac{1}{4} dt \\ \hline \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ t & 1 & 2 \end{array} \end{array} \right|$$

$$= \frac{2}{3} \pi \cdot \frac{1}{4} \int_1^2 t^{1/2} dt = \frac{\pi}{6} \left[\frac{2}{3} t^{3/2} \right]_1^2 = \frac{\pi}{9} (2\sqrt{2} - 1)$$

Zadania do samodzielnego rozwiązywania

Zadanie 40. Oblicz całki oznaczone

1. $\int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx.$
2. $\int_0^\pi x^2 \sin x dx.$

3. $\int_0^1 x^2 e^{3x} dx.$
4. $\int_1^e \ln^2 x dx.$
5. $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx.$
6. $\int_0^{1/2} \arcsin x dx.$
7. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx.$
8. $\int_1^2 \frac{1}{x^2+5x+4} dx.$
9. $\int_0^1 x \ln(1+x^2) dx,$
10. $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2} dx.$
11. $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^4} dx$
12. $\int_0^\infty x^2 \cdot e^{-\frac{x}{2}} dx.$
13. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1} dx.$
14. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx.$
15. $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx.$
16. $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$
17. $\int_0^\infty e^{-x} dx.$
18. $\int_0^\infty x \cdot e^{-x^2} dx.$
19. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x} dx.$
20. $\int_2^6 \frac{1}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} dx.$
21. $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx.$



Zadanie 41. Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $f(x) = xe^{-x}$, osią OX oraz prostą $x = 1$.

Zadanie 42. Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji $f(x) = \ln x$ oraz $g(x) = 1 - x$ i osią OX .

Zadanie 43. Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ oraz $g(x) = x^3$.

Zadanie 44. Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$ na przedziale $[0, \pi/2]$.

Zadanie 45. Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, osią OX oraz prostą $x = e$.

Zadanie 46. Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$ oraz prostą $x = \ln 2$.

Zadanie 47. Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót wokół osi OX wykresu funkcji $f(x) = x\sqrt{\sin x}$ dla $x \in [0, \pi]$.

Zadanie 48. Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót wokół osi OX wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$ dla $x \in [0, 1]$.

Zadanie 49. Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót wokół osi OX wykresu funkcji $f(x) = \ln x$ dla $x \in [1, e]$.

Zadanie 50. Oblicz długość łuku krzywej $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\ln x$ dla $x \in [1, e]$.

Zadanie 51. Oblicz długość łuku krzywej $y = \ln(\sin x)$ dla $x \in [\pi/3, \pi/2]$.

Zadanie 52. Oblicz pole S powierzchni powstałej przez obrót wokół osi OX łuku krzywej $f(x) = \sqrt{x}$ dla $x \in [0, 2]$.

Zadanie 53. Oblicz pole S powierzchni powstałej przez obrót wokół osi OX łuku krzywej $f(x) = \sqrt{4 - x}$ dla $x \in [0, 4]$.

Zadanie 54. Oblicz pole S powierzchni powstałej przez obrót wokół osi OX łuku krzywej $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ dla $x \in [0, \sqrt{3}]$.

Literatura

- [1] Krywicki, Włodzimierz, i in. *Analiza matematyczna w zadaniach. Cz. 1.* Wydawnictwo Naukowe PWN, 2003.
- [2] Krywicki, Włodzimierz, i in. *Analiza matematyczna w zadaniach. Cz. 2.* Wydawnictwo Naukowe PWN, 2003.
- [3] Gewert, Marian, i in. *Analiza matematyczna 1: przykłady i zadania.* Oficyna Wydawnicza GiS, 2018.



Materiały do przedmiotu:

MATEMATYKA II

Ćwiczenia nr 3

Autor:

dr Anna Makarewicz-Trześniewska

mgr Elżbieta Sędziewska



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



ĆWICZENIA III

Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń

Obliczanie całki oznaczonej funkcji jest jednym z podstawowych zagadnień analizy matematycznej. W wielu praktycznych problemach funkcja podcałkowa bywa znana jedynie w postaci tabeli wartości lub jest zbyt złożona, aby znaleźć jej całkę analitycznie. W takich sytuacjach stosuje się metody numeryczne całkowania, które polegają na przybliżonym wyznaczaniu wartości całki

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

poprzez zastąpienie funkcji prostszymi funkcjami na krótkich odcinkach przedziału $[a, b]$.

Przedział całkowania dzielimy na n części, w szczególności poprzez równoodległe punkty x_i , gdzie:

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Złożony wzór prostokątów

Najprostsza metoda polega na przybliżeniu pola pod wykresem funkcji sumą pól prostokątów. Dla punktów środkowych:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right).$$

Błąd globalny:

$$|E_P| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \max_{[a,b]} |f''(x)|$$

Złożony wzór trapezów

Funkcję na każdym podprzedziale zastępuje się odcinkiem prostej:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right].$$

Błąd globalny:

$$|E_T| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{[a,b]} |f''(x)|$$

Złożona metoda Simpsona

Funkcję aproksymuje się parabolą (wielomianem drugiego stopnia). Dla n parzystych mamy wzór

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + f(x_n) \right].$$

Błąd globalny:

$$|E_S| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

Metoda Simpsona jest najdokładniejsza spośród przedstawionych metod, ponieważ błąd maleje proporcjonalnie do h^4 .

Przykłady zadań z rozwiązaniami

Zadanie 55. Obliczyć przybliżenie

$$\int_0^2 (x^2 + 1)dx$$

metodą prostokątów środkowych dla $n = 4$.

Rozwiązanie:

Długość przedziałów podziału: $h = \frac{2-0}{4} = 0.5$

Punkty podziału: $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1, x_3 = 1.5, x_4 = 2$.

Punkty środkowe:

$$x_0 + \frac{h}{2} = 0.25, x_1 + \frac{h}{2} = 0.75, x_2 + \frac{h}{2} = 1.25, x_3 + \frac{h}{2} = 1.75$$

Wartości funkcji podcałkowej w punktach środkowych:

$$f(0.25) = 1.0625$$

$$f(0.75) = 1.5625$$

$$f(1.25) = 2.5625$$

$$f(1.75) = 4.0625$$

Stąd, stosując wzór na przybliżenie metodą prostokątów mamy:

$$\int_0^2 (x^2 + 1)dx \approx 0.5(1.0625 + 1.5625 + 2.5625 + 4.0625) = 0.5(9.25) = 4.625$$

Zadanie 56. Obliczyć metodą trapezów

$$\int_1^3 x^2 dx$$

dla $n = 2$.

Rozwiązanie:

Długość przedziałów podziału: $h = 1$.

Punkty podziału: $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$.

Wartości funkcji podcałkowej w punktach podziału: $f(1) = 1, f(2) = 4, f(3) = 9$.

Przybliżona wartość całki:

$$\int_1^3 x^2 dx \approx \frac{1}{2} [1 + 2 \cdot 4 + 9] = \frac{18}{2} = 9$$

Wartość dokładna całki wynosi:

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^3 = \frac{1}{3} \cdot 27 - \frac{1}{3} \cdot 1 = 9 - \frac{1}{3} = 8.\overline{6}.$$

Zadanie 57. Obliczyć stosując wzór Simpsona

$$\int_0^2 \frac{1}{1+x^2} dx$$

dla $n = 4$.

Rozwiązanie: Długość przedziałów podziału: $h = 0.5$

Punkty podziału: $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1, x_3 = 1.5, x_4 = 2$

Wartości funkcji podcałkowej w punktach podziału:

$$f(0) = 1$$

$$f(0.5) = 0.8$$

$$f(1) = 0.5$$

$$f(1.5) = 0.3077$$

$$f(2) = 0.2$$

Stosujemy złożony wzór Simpsona:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{1+x^2} dx &\approx \frac{0.5}{3} [1 + 4(0.8 + 0.3077) + 2(0.5) + 0.2] = \\ &= \frac{1}{6} [1 + 4(1.1077) + 1 + 0.2] = \frac{1}{6} (6.6308) = 1.1051 \end{aligned}$$

Zadanie 58.

Dla funkcji $f(x) = e^x$ na przedziale $[0, 1]$ obliczyć przybliżenie całki dla $n = 2$ metodami:

(a) prostokątów środkowych

(b) trapezów

[c] Simpsona

oraz porównać z wartością dokładną.

Rozwiązanie:

Wartość dokładna:

$$I = \int_0^1 e^x dx = e - 1 \approx 1.718281828$$

Podział: $h = \frac{1-0}{2} = 0.5$, punkty: $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1$.

Metoda prostokątów środkowych

Punkty środkowe: 0.25, 0.75

$$I_R \approx 0.5 (e^{0.25} + e^{0.75}) = 0.5(1.284025417 + 2.117000017) = 1.700512717$$

Metoda trapezów

$$I_T \approx \frac{0.5}{2} [1 + 2\sqrt{3} + e] = 0.25(1 + 2 \cdot 1.648721271 + 2.718281828) = 1.753931093$$

Metoda Simpsona

$$I_S \approx \frac{0.5}{3} (1 + 4e^{0.5} + e) = \frac{1}{6} (1 + 6.594885083 + 2.718281828) = 1.718861152$$

Porównanie błędów

$$|I - I_R| \approx 0.017769111$$

$$|I - I_T| \approx 0.035649265$$

$$|I - I_S| \approx 0.000579324$$

Widzimy, że metoda Simpsona jest najdokładniejsza.

Zadanie 59. Zmierzono prędkość obiektu co 2 sekundy:

t [s]	0	2	4	6	8
$v(t)$ [m/s]	0	3	5	4	2

Obliczyć przebytą drogę w czasie 8 s metodą:

[a] trapezów

(b) Simpsona.

Rozwiązanie: Przebyta droga dana jest wzorem:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

Krok całkowania: $h = 2$.

Metoda trapezów

$$S_T = \frac{2}{2} [0 + 2 \cdot (3 + 5 + 4) + 2] = 26[\text{m}]$$

Metoda Simpsona

$$S_S = \frac{2}{3} [0 + 4 \cdot (3 + 4) + 2 \cdot (5) + 2] = \frac{2}{3} \cdot 40 = 26.67[\text{m}]$$

Zadanie 60. Oszacuj błąd przybliżenia całki

$$I = \int_0^2 \ln(x+1) dx$$

metodą Simpsona dla $n = 4$ podprzedziałów.

Rozwiązanie: Wzór na błąd metody Simpsona:

$$|E_S| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Mamy $f(x) = \ln(x+1)$.

Kolejne pochodne:

$$f'(x) = \frac{1}{x+1},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2},$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(x+1)^3},$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4}.$$

Na przedziale $[0, 2]$ maksimum modułu czwartej pochodnej jest w $x = 0$:

$$\max |f^{(4)}(x)| = 6.$$

Podstawiamy do wzoru:

$$|E_S| \leq \frac{(2-0)^5}{180 \cdot 4^4} \cdot 6.$$

$$|E_S| \leq \frac{32}{180 \cdot 256} \cdot 6 = \frac{192}{46080} = \frac{1}{240}.$$

$$|E_S| \leq 0.00417.$$

Błąd metody Simpsona nie przekracza 0.00417.

Zadanie 61. Obliczyć przybliżenie całki

$$I = \int_3^7 \sqrt{x} dx$$

metodą Simpsona dla $n = 2$ na dwa sposoby:

- [a] bezpośrednio na przedziale $[a, b]$
- [b] po sprowadzeniu całki do przedziału $[0, 1]$

Rozwiązanie:

1. Rozwiązanie bezpośrednio na $[a, b]$

Krok całkowania:

$$h = \frac{7-3}{2} = 2$$

Punkty podziału:

$$x_0 = 3, \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 7$$

Wartości funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ w punktach x_i :

$$f(3) = 1.7321, \quad f(5) = 2.2361, \quad f(7) = 2.6458$$

Wzór Simpsona:

$$I_S = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

$$I_S = \frac{2}{3}(1.7321 + 4 \cdot 2.2361 + 2.6458) = 8.8815$$

2. Rozwiązanie po zmianie przedziału na $[0, 1]$ Wprowadzamy podstawienie liniowe:

$$x = 3 + 4t, \quad dx = 4dt$$

Granice:

$$x = 3 \rightarrow t = 0, \quad x = 7 \rightarrow t = 1$$

Całka:

$$I = \int_0^1 \sqrt{3 + 4t} \cdot 4dt$$

Niech $f(t) = 4\sqrt{3 + 4t}$.

Krok całkowania:

$$h = \frac{1 - 0}{2} = 0.5$$

Punkty podziału:

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 0.5, \quad t_2 = 1$$

Wartości funkcji f w punktach x_i :

$$f(0) = 4\sqrt{3} = 6.9282$$

$$f(0.5) = 4\sqrt{5} = 8.9443$$

$$f(1) = 4\sqrt{7} = 10.5830$$

Wzór Simpsona:

$$I_S = \frac{h}{3}[f(t_0) + 4f(t_1) + f(t_2)]$$

$$I_S = \frac{0.5}{3}(6.9282 + 4 \cdot 8.9443 + 10.5830) = 8.8815$$

Zadanie 62. Przybliżyć całkę

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

metodą Simpsona przy podziale na $n = 6$ podprzedziałów.

Rozwiązanie:

Krok całkowania

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{6} = 0.1667$$

Punkty podziału:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.1667, \quad x_2 = 0.3334, \quad x_3 = 0.5001, \\ x_4 = 0.6668, \quad x_5 = 0.8335, \quad x_6 = 1.002$$

Tabela 1: Wartości funkcji $f(x) = e^{-x^2}$ w punktach podziału.

x_i	$f(x_i)$
0.0000	1.0000
0.1667	0.9726
0.3333	0.8948
0.5000	0.7787
0.6667	0.6411
0.8333	0.4992
1.0000	0.3677

Wzór metody Simpsona dla $n = 6$:

$$I \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)]$$

Zatem:

$$I \approx \frac{0.1667}{3} [1 + 4(0.9726) + 2(0.8948) + 4(0.7787) \\ + 2(0.6411) + 4(0.4992) + 0.3677] \\ = \frac{0.1667}{3} \cdot 13.4415 \\ \approx 0.7469$$

Przybliżenie całki metodą Simpsona przy $n = 6$ podprzedziałach:

$$I \approx 0.7469$$

Zadania do samodzielnego rozwiązywania

Zadanie 63. Obliczyć metodą trapezów ($n = 4$):

$$\int_0^2 e^x dx$$

Zadanie 64. Obliczyć metodą prostokątów dla punktów środkowych ($n = 5$):

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx$$

Zadanie 65. Obliczyć metodą Simpsona ($n = 6$):

$$\int_0^3 (2x^3 - x + 1) dx$$

Zadanie 66. Dane:

t	0	1	2	3	4
v	0	2	3	2	1

Obliczyć drogę metodą trapezów i Simpsona.

Zadanie 67. Dane pomiarowe temperatury w ciągu dnia:

t [h]	0	4	8	12	16	20
$T(t)$ [°C]	10	12	18	22	19	14

Oszacować średnią temperaturę w ciągu doby metodą Simpsona.

Zadanie 68. Dana jest całka:

$$\int_0^2 (x^3 - 2x + 1) dx.$$

Obliczyć przybliżenia metodami: prostokątów środkowych, trapezów i Simpsona dla $n = 2$. Porównać z wartością dokładną.

Zadanie 69. Ile podprzedziałów potrzeba, aby błąd metody Simpsona dla

$$\int_0^1 e^x dx$$

był mniejszy niż 10^{-4} .

Zadanie 70. Obliczyć przybliżenie całki

$$I = \int_{10}^{11} e^x dx$$

metodą trapezów dla $n = 2$ na dwa sposoby:

- [a] bezpośrednio na przedziale $[a, b]$
- [b] po sprowadzeniu całki do przedziału $[0, 1]$.

Literatura

- [1] Kincaid, David, i in. *Analiza numeryczna*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2006.
- [2] M. Dryja, J. i M. Jankowscy: *Przegląd metod i algorytmów numerycznych. Cz. 1*. WNT, Warszawa 1982.
- [3] J. Krupka, A. Miękina, R.Z. Morawski, L.J. Opalski: *Wstęp do metod numerycznych. Dla studentów elektroniki i technik informacyjnych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2009.
- [4] J. M. Jankowscy: *Przegląd metod i algorytmów numerycznych. Cz. 2*. WNT, Warszawa 1981.

Materiały do przedmiotu:

MATEMATYKA II

Ćwiczenia nr 4

Autor:

dr Anna Makarewicz-Trześniewska

mgr Elżbieta Sędziewska



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



ĆWICZENIA IV

Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń

Celem ćwiczeń jest zapoznanie się z pewnymi metodami rozwiązywania wybranych typów równań różniczkowych zwyczajnych metodami analitycznymi.

Równaniem różniczkowym rzędu pierwszego nazywamy równanie postaci

$$y' = f(x, y),$$

gdzie y oznacza niewiadomą funkcję zmiennej x , zaś f jest funkcją ciągłą na pewnym obszarze $D \in \mathbb{R}^2$.

Równaniem różniczkowym o rozdzielonych zmiennych nazywamy równanie różniczkowe postaci

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

1. Jeśli istnieje y_0 takie, że $h(y_0) = 0$, to funkcja stała $y(x) = y_0$ jest rozwiązaniem tego równania.
2. Jeśli $h(y) \neq 0$, to równanie o rozdzielonych zmiennych można zapisać w postaci różniczkowe

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$$

3. Jeśli funkcje g i h są ciągłe, to rozwiązanie równania różniczkowego znajdujemy całkując

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$$

Równaniem różniczkowym jednorodnym względem x i y nazywamy równanie różniczkowe postaci

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

1. Równanie takie rozwiązujemy poprzez sprowadzenie go do równania o rozdzielonych zmiennych przez podstawienie

$$\frac{y}{x} = t$$

czyli $y = t \cdot x$

2. Funkcje t oraz y są funkcjami zmiennej x , więc po zróżniczkowaniu tej równości stronami względem x otrzymujemy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \cdot x + t$$

czyli $y' = \frac{dt}{dx} \cdot x + t$

3. Po podstawieniu y oraz y' do równania wyjściowego, otrzymujemy równanie o rozdzielonych zmiennych.

Równaniem różniczkowym liniowym nazywamy równanie różniczkowe postaci

$$y' + p(x)y = q(x)$$

1. Jeśli $q(x) \neq 0$ to powyższe równanie nazywamy **równaniem różniczkowym liniowym niejednorodnym**.

2. Jeśli $q(x) = 0$ to powyższe równanie ma postać

$$y' + p(x)y = 0$$

i nazywamy je **równaniem różniczkowym liniowym jednorodnym**.

Przykłady zadań z rozwiązaniami

Zadanie 71. Rozwiąż równanie różniczkowe:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 + 1}$$

z warunkiem początkowym $y(0) = 5$.

Rozwiązanie:

Zacznijemy od rozdzielania zmiennych i zapisania y' jako $\frac{dy}{dx}$. Dokonując elementarnych operacji otrzymamy:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x}{x^2 + 1} dx$$

Całkując obustronnie powyższe równanie można zauważyć, że należy obliczyć następujące całki:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$$

Łatwo zauważyć, że: $\int \frac{1}{y} dy = \ln |y|$. Natomiast całkę $\int \frac{2x}{x^2+1}$ obliczymy korzystając ze wzoru

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)|$$

Zauważmy, że licznik $[2x]$ jest dokładnie pochodną mianownika $[x^2 + 1]$. W takim przypadku rozważana całka to:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \ln(x^2 + 1)$$

Ostatecznie:

$$\ln |y| = \ln(x^2 + 1) + C$$

Aby uprościć nasze dalsze obliczenia zamiast pisać $+C$, zapiszemy $+\ln |C|$

$$\ln |y| = \ln(x^2 + 1) + \ln |C|,$$

a następnie wykorzystamy działania na logarytmach:

$$\ln |y| = \ln |C(x^2 + 1)|$$

Zatem

$$y = C(x^2 + 1)$$

Po podstawieniu warunku początkowego $y(0) = 5$ [czyli $x = 0$ i $y = 5$] do otrzymanego rozwiązania otrzymamy:

$$5 = C(0^2 + 1) \implies C = 5$$

Rozwiązanie równania jest zatem postaci:

$$y = 5(x^2 + 1)$$

Zadanie 72. Rozwiąż równanie różniczkowe jednorodne:

$$y' = \frac{y^2 + xy}{x^2}$$

z warunkiem początkowym $y(1) = 1$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że:

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{xy}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}.$$

Podstawiając:

$$t = \frac{y}{x} \implies y = t \cdot x$$

$$y' = t'x + t$$

do rozwiązywanego równania mamy:

$$t'x + t = t^2 + t$$

Zatem:

$$t'x = t^2.$$

Po rozdzieleniu zmiennych i podstawieniu $t' = \frac{dt}{dx}$ otrzymamy:

$$x \frac{dt}{dx} = t^2 \implies \frac{dt}{t^2} = \frac{dx}{x}$$

Całkując obustronnie powyższe równanie możemy zapisać, że

$$\int t^{-2} dt = \int \frac{1}{x} dx,$$

$$-\frac{1}{t} = \ln|x| + C$$

Wracając do zmiennej y mamy, że $t = \frac{y}{x}$, to $\frac{1}{t} = \frac{x}{y}$:

$$-\frac{x}{y} = \ln|x| + C.$$

Z warunku $y(1) = 1$ wyznaczmy stałą C . Podstawiamy $x = 1$ oraz $y = 1$ do otrzy-

manego rozwiązania otrzymamy:

$$-\frac{1}{1} = \ln(1) + C \Rightarrow C = -1$$

Podstawiając C do rozwiązania mamy, że:

$$-\frac{x}{y} = \ln|x| - 1$$

Po przekształceniach zapisujemy ostateczną postać rozwiązania

$$y = \frac{x}{1 - \ln|x|}.$$

Zadanie 73. Rozwiąż równanie różniczkowe liniowe niejednorodne:

$$y' - 2y = 4x.$$

Rozwiązanie:

Rozwiązanie składa się z dwóch części: $y = y_o + y_s$ czyli rozwiązanie ogólne równania jednorodnego + rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego. Aby rozwiązać równanie jednorodnego przyjmujemy, że

$$y' - 2y = 0.$$

Jest to równanie o rozdzielonych zmiennych:

$$\frac{dy}{dx} = 2y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2dx \Rightarrow \ln|y| = 2x + C.$$

Zatem

$$y_o = Ce^{2x}$$

Rozwiązanie szczególne y_s znajdziemy metodą przewidywań. Przyjrzyjmy się prawej stronie oryginalnego równania $q(x) = 4x$. Jest to wielomian pierwszego stopnia. Przewidujemy więc, że rozwiązanie szczególne też będzie wielomianem pierwszego stopnia:

$$y_s = Ax + B.$$

Teraz obliczymy pochodną naszego przewidywanego rozwiązania: $y'_s = A$ i podsta-

wimy y_s oraz y'_s do równania, które mieliśmy rozwiązać $y' - 2y = 4x$. Zatem

$$A - 2(Ax + B) = 4x$$

$$A - 2Ax - 2B = 4x.$$

Wyznaczamy współczynniki A i B porównując obie strony równania i otrzymujemy $-2A = 4 \Rightarrow A = -2$ oraz $A - 2B = 0$. Podstawiamy $A = -2$ do równania i otrzymujemy $-2 = 2B \Rightarrow B = -1$. Zatem nasze rozwiązanie szczególne to:

$$y_s = -2x - 1$$

Ostateczne rozwiązanie równania $y' - 2y = 4x$ to:

$$y = y_j + y_p$$

$$y = Ce^{2x} - 2x - 1.$$

Zadanie 74. Rozwiąż równanie różniczkowe liniowe niejednorodne:

$$y' - 2y = e^{3x}.$$

Rozwiązanie:

Na początek rozwiążemy równanie:

$$y' - 2y = 0.$$

Rozdzielając zmienne i całkując obustronnie otrzymujemy:

$$\frac{dy}{dx} = 2y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2dx \Rightarrow \ln |y| = 2x + C \Rightarrow y_o = C \cdot e^{2x}.$$

Skorzystamy teraz z metody uzmienniania stałej, zakładając że stała C nie jest stałą, ale funkcją $C(x)$ możemy zapisać, że

$$y = C(x) \cdot e^{2x}$$

Obliczamy pochodną y' i otrzymamy:

$$y' = C'(x) \cdot e^{2x} + C(x) \cdot (2e^{2x})$$

Podstawiamy y oraz y' do rozwiązywanego równania $y' - 2y = e^{3x}$ dostając:

$$(C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x}) - 2(C(x)e^{2x}) = e^{3x}.$$

Po skróceniu mamy

$$C'(x)e^{2x} = e^{3x}.$$

Wykonując proste przekształcenia mamy, że

$$C'(x) = \frac{e^{3x}}{e^{2x}} = e^x.$$

Całkujemy obustronnie powyższe równanie aby znaleźć $C(x)$ i otrzymujemy

$$C(x) = \int e^x dx = e^x + C_1$$

Podstawiamy wyliczone $C(x)$ do naszego wzoru na y otrzymując rozwiązanie postaci

$$y = (e^x + C_1) \cdot e^{2x}.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązywania

Zadanie 75. Rozwiąż równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych:

$$y' = \frac{3x^2 y}{x^3 + 1}$$

z warunkiem początkowym $y(0) = 2$.

Zadanie 76. Rozwiąż równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych:

$$y' = y \cdot \operatorname{ctg}(x)$$

z warunkiem początkowym $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.

Zadanie 77. Rozwiąż równanie różniczkowe jednorodne:

$$y' = \frac{x + 2y}{x}$$

z warunkiem początkowym $y(1) = 2$.

Zadanie 78. Rozwiąż równanie różniczkowe jednorodne:

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$$

z warunkiem początkowym $y(1) = 2$.

Zadanie 79. Rozwiąż równanie różniczkowe liniowe niejednorodne:

$$y' + y = x^2 + 1$$

z warunkiem początkowym $y(0) = 0$.

Zadanie 80. Rozwiąż równanie różniczkowe liniowe metodą uzmienniania stałej:

$$y' + y \cdot \operatorname{tg}(x) = \cos(x)$$

z warunkiem początkowym $y(0) = 1$.

Zadanie 81. Rozwiąż równanie różniczkowe liniowe niejednorodne:

$$y' + 2y = x^2 + 2x.$$

Zadanie 82. Rozwiąż równanie różniczkowe liniowe metodą uzmienniania stałej:

$$y' - \frac{y}{x} = x \ln(x).$$

Zadanie 83. Rozwiąż równanie różniczkowe Bernoulliego:

$$y' + xy = xy^3.$$

Zadanie 84. Rozwiąż równanie różniczkowe Bernoulliego:

$$y' - xy = -e^{-x^2} y^3.$$

Literatura

- [1] Marian Gewert, i in. *Równania różniczkowe zwyczajne. Teoria, przykłady, zadania.* Oficyna Wydawnicza GiS, 2025.
- [2] Krysicki, Włodzimierz, i in. *Analiza matematyczna w zadaniach. Cz. 2.* Wydawnictwo Naukowe PWN, 2003.

Materiały do przedmiotu:

MATEMATYKA II

Ćwiczenia nr 5

Autor:

dr Anna Makarewicz-Trześniewska

mgr Elżbieta Sędziewska



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



ĆWICZENIA V

Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń

Celem ćwiczeń jest przedstawienie podstawowych algorytmów stosowanych do znajdowania przybliżonych rozwiązań równań różniczkowych pierwszego rzędu z warunkiem początkowym. Niejednokrotnie nie znamy analitycznej postaci rozwiązania początkowego z czego wynika konieczność stosowania metod numerycznych.

Rozważamy zagadnienie początkowe opisane równaniami

$$x'(t) = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Rozwiązaniem numerycznym jest tablica przybliżeń x_i wartości dokładnego rozwiązania x w punktach t_i , czyli szukamy wartości funkcji w punktach siatki: $t_i = t_0 + ih$, gdzie h jest krokiem całkowania.

Metoda Eulera

Jest to najprostsza metoda oparta na wzorze Taylora. Opisuje ją wzór:

$$x(t+h) \approx x(t) + hf(t, x).$$

Jest to metoda rzędu 1 [błąd globalny $O(h)$].

Metoda Heuna

Najpierw wykonujemy krok predykcji [Euler], a następnie poprawkę:

$$x(t+h) \approx x(t) + \frac{1}{2}(F_1 + F_2),$$

gdzie

$$F_1 := hf(t, x), \quad F_2 := hf(t+h, x + F_1)$$

Stąd

$$x(t+h) \approx x(t) + \frac{h}{2} [f(t, x) + f(t+h, x + hf(t, x))].$$

Metoda ma rząd 2 [błąd globalny $O(h^2)$] i jest znacznie dokładniejsza.

Przykłady zadań z rozwiązaniami

Zadanie 85. Znaleźć numeryczne rozwiązanie metodą Eulera na odcinku $[0, 0.3]$ z krokiem $h = 0,1$ zagadnienia początkowego:

$$x'(t) = x(t), \quad x(0) = 1.$$

Rozwiązanie:

Mamy, że $f(t, x) = x(t)$.

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, & x_0 &= 1 \\ t_1 &= 0.1, & x_1 &= x(t_1) \approx x(t_0) + hf(t_0, x_0) = 1 + 0.1 \cdot 1 = 1.1 \\ t_2 &= 0.2, & x_2 &= x(t_2) \approx x(t_1) + hf(t_1, x_1) = 1.1 + 0.1 \cdot 1.1 = 1.21 \\ t_3 &= 0.3, & x_3 &= x(t_3) \approx x(t_2) + hf(t_2, x_2) = 1.21 + 0.1 \cdot 1.21 = 1.331 \end{aligned}$$

Zadanie 86. Rozwiązać równanie z poprzedniego zadania stosując metodę Heuna. Porównać z rozwiązaniem dokładnym $x = e^t$.

Rozwiązanie:

Krok 1:

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_0 + hf(x_0, t_0) = 1 + 0.1 \cdot 1 = 1.1 \\ x_1 &= x_0 + \frac{h}{2} [f(t_0, x_0) + f(t_1, x_1^*)] = 1 + \frac{0.1}{2}(1 + 1.1) = 1.105 \end{aligned}$$

Krok 2:

$$\begin{aligned} x_2^* &= x_1 + hf(x_1, t_1) = 1.105 + 0.1 \cdot 1.105 = 1.2155 \\ x_2 &= x_1 + \frac{h}{2} [f(t_1, x_1) + f(t_2, x_2^*)] = 1.105 + \frac{0.1}{2}(1.105 + 1.2155) = 1.221025 \end{aligned}$$

Krok 3:

$$\begin{aligned} x_3^* &= x_2 + hf(x_2, t_2) = 1.221025 + 0.1 \cdot 1.221025 = 1.3431275 \\ x_3 &= x_2 + \frac{h}{2} [f(t_2, x_2) + f(t_3, x_3^*)] = 1.221025 + \frac{0.1}{2}(1.221025 + 1.3431275) = \\ &= 1.349232625 \end{aligned}$$

Tabela 2: Porównanie wyników numerycznych i rozwiązania dokładnego

n	t_n	Euler	Heun	e^t
0	0.0	1.000	1.000000	1.000000
1	0.1	1.100	1.105000	1.105171
2	0.2	1.210	1.221025	1.221403
3	0.3	1.331	1.349233	1.349859

Zadanie 87. Rozważamy równanie różniczkowe:

$$x' = x - t^2 + 1, \quad x(0) = 0.5$$

Znaleźć numeryczne przybliżenie wartości $x(0.4)$ stosując metodę Eulera z krokiem $h = 0.1$.

Rozwiązanie:

Mamy $f(t, x) = x - t^2 + 1$.

Wyznaczamy punkty podziału

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 0.1, \quad t_2 = 0.2, \quad t_3 = 0.3, \quad t_4 = 0.4.$$

Dana jest wartość początkowa $x_0 = x(0) = 0.5$.

Wyznaczamy kolejne przybliżenia:

Krok 1:

$$x_1 = x(0.1) = x_0 + hf(t_0, x_0) = 0.5 + 0.1 \cdot (0.5 - 0^2 + 1) = 0.65$$

Krok 2

$$x_2 = x(0.2) = x_1 + hf(t_1, x_1) = 0.65 + 0.1(0.65 - 0.1^2 + 1) = 0.814$$

Krok 3

$$x_3 = x(0.3) = x_2 + hf(t_2, x_2) = 0.814 + 0.1(0.814 - 0.2^2 + 1) = 0.9914$$

Krok 4

$$x_4 = x(0.4) = x_3 + hf(t_3, x_3) = 0.9914 + 0.1(0.9914 - 0.3^2 + 1) = 1.18154$$

Zatem przybliżona wartość wynosi $x(0.4) = 1.18154$.

Zadanie 88. Znaleźć numeryczne rozwiązanie metodą Heuna na $[0, 0.4]$ z krokiem $h = 0.2$ zagadnienia początkowego:

$$x' = -2x, \quad x(0) = 1.$$

Rozwiązanie:

Mamy, że $f(t, x) = -2x$. Będziemy szukać rozwiązania przybliżonego w punktach:

$$t_0 = 0, \quad t_1 = t_0 + h = 0.2, \quad t_2 = t_1 + h = 0.4$$

Krok 1:

$$x_1^* = x(0) + hf(t_0, x_0) = 1 + 0.2 \cdot (-2 \cdot 1) = 0.6$$

$$\begin{aligned} x_1 = x(0.2) &= x(0) + \frac{h}{2} [f(t_0, x_0) + f(t_1, x_1^*)] \\ &= 1 + 0.1(-2 \cdot 1 + -2 \cdot 0.6) = 0.68 \end{aligned}$$

Krok 2:

$$x_2^* = x(0.2) + hf(t_1, x_1) = 0.68 + 0.2 \cdot (-2 \cdot 0.68) = 0.408$$

$$\begin{aligned} x_2 = x(0.4) &= x(0.2) + \frac{h}{2} [f(t_1, x_1) + f(t_2, x_2^*)] \\ &= 0.68 + 0.1(-2 \cdot 0.68 + -2 \cdot 0.408) = 0.4624 \end{aligned}$$

Zadanie 89. Stosując metodę Eulera i Heuna znaleźć numeryczne przybliżenie rozwiązania równania

$$x' = x^2 - t, \quad x(0) = 0,$$

na przedziale $[0, 0.3]$ gdzie $h = 0.1$.

Rozwiązanie:

Mamy $f(t, x) = x^2 - t$. Szukamy rozwiązania w punktach

$$t_0 = 0, \quad t_1 = t_0 + h = 0.1, \quad t_2 = t_1 + h = 0.2 \quad t_3 = t_2 + h = 0.3$$

Metoda Eulera

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = x(0.1) \approx x(t_0) + hf(t_0, x_0) = 0 + 0.1 \cdot (0^2 - 0) = 0$$

$$x_2 = x(0.2) \approx x(t_1) + hf(t_1, x_1) = 0 + 0.1(0^2 - 0.1) = -0.01$$

$$x_3 = x(0.3) \approx x(t_2) + hf(t_2, x_2) = -0.01 + 0.1((-0.01)^2 - 0.2) = -0.02999$$

Metoda Heuna

Krok 1:

$$x_1^* = x(0) + hf(t_0, x_0) = 0 + 0.1 \cdot (0^2 - 0) = 0$$

$$\begin{aligned} x_1 = x(0.1) &= x(0) + \frac{h}{2} [f(t_0, x_0) + f(t_1, x_1^*)] = \\ &= 0 + 0.05 \cdot (0 + -0.1) = -0.005 \end{aligned}$$

Krok 2:

$$x_2^* = x(0.1) + hf(t_1, x_1) = -0.005 + 0.1 \cdot ((-0.005)^2 - 0.1) = -0.0149975$$

$$\begin{aligned} x_2 = x(0.2) &= x(0.1) + \frac{h}{2} [f(t_1, x_1) + f(t_2, x_2^*)] = \\ &= -0.005 + 0.05 \cdot ((-0.005)^2 - 0.1 + (-0.0149975)^2 - 0.2) = \\ &= -0.0199875 \end{aligned}$$

Krok 3:

$$\begin{aligned} x_3^* &= x(0.2) + hf(t_2, x_2) = -0.0199875 + 0.1 \cdot ((-0.0199875)^2 - 0.2) = \\ &= -0.03994755 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 = x(0.3) &= x(0.2) + \frac{h}{2} [f(t_2, x_2) + f(t_3, x_3^*)] = \\ &= -0.0199875 + 0.05 \cdot ((-0.0199875)^2 - 0.2 + (-0.03994755)^2 - 0.3) = \\ &= -0.04488773 \end{aligned}$$

Tabela 3: Numeryczne rozwiązania równania $x' = x^2 - t$, $x(0) = 0$

n	t_n	Euler	Heun
0	0.0	0.0000	0.00000000
1	0.1	0.0000	-0.00500000
2	0.2	-0.0100	-0.0199875
3	0.3	-0.0299	-0.04488773

Zadania do samodzielnego rozwiązywania

Zadanie 90. Znaleźć metodą Eulera numeryczne przybliżenie $x(0.4)$, gdy:

$$x' = 2t + x, \quad x(0) = 0, \quad h = 0.2$$

Zadanie 91. Obliczyć metodą Heuna wartość $x(0.3)$, gdy:

$$x' = t - x, \quad x(0) = 1, \quad h = 0.1.$$

Zadanie 92. Niech:

$$x' = x - t^2 + 1, \quad x(0) = 0.5, \quad h = 0.2$$

Wykonać dwa kroki metodą Eulera i Heuna i porównać wyniki.

Zadanie 93. Wykonać 5 kroków metodą Eulera dla zagadnienia początkowego

$$x' = 3x, \quad x(0) = 1,$$

dla $h = 0.1$.

Zadanie 94. Porównać rozwiązania metodą Eulera i Heuna dla $x' = t + x$, $x(0) = 0$, $h = 0.25$.

Zadanie 95. Zbadać wpływ zmniejszenia kroku o połowę na błąd metody Eulera.

Zadanie 96. Niech

$$x' = t^2 - x, \quad x(0) = 1$$

Obliczyć $x(0.2)$:

- (a) metodą Eulera $h = 0.1$
- (b) metodą Heuna $h = 0.1$
- (c) porównać z dokładnym rozwiązaniem $x(t) = t^2 - 2t + 2 - e^{-t}$.

Literatura

- [1] Kincaid, David, i in. *Analiza numeryczna*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2006.
- [2] M. Dryja, J. i M. Jankowscy: *Przegląd metod i algorytmów numerycznych. Cz. 1*. WNT, Warszawa 1982.
- [3] Leszek Marcinkowski, *Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych*, Uniwersytet Warszawski, 2011



Materiały do przedmiotu:

MATEMATYKA II

Ćwiczenia nr 6

Autor:

dr Anna Makarewicz-Trzeźniewska

mgr Elżbieta Sędzielewska



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



ĆWICZENIA VI

Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń

Celem ćwiczeń jest zapoznanie się z podstawami rachunku macierzowego oraz opanowanie elementarnych działań na macierzach. Są to pojęcia powszechnie stosowane w matematyce, fizyce i zastosowaniach inżynierskich.

Macierze zapisujemy w postaci prostokątnych tablic liczb ułożonych w wierszach i kolumnach:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

lub w wersji uproszczonej $A = [a_{ij}]_{n \times m}$. Macierz A to macierz wymiaru $n \times m$, gdzie n oznacza liczbę wierszy, zaś m liczbę kolumn. Wprowadzimy kilka pojęć dotyczących macierzy:

- **macierz kwadratowa stopnia n** , to macierz dla której $m = n$
- **przekątna główna macierzy**, to zbiór elementów a_{ij} , dla których $i = j$
- **macierz zerowa 0** $= [0]_{n \times m}$, to macierz dowolnego wymiaru złożona z samych zer
- **macierz diagonalna**, to macierz kwadratowa, której wszystkie elementy poza główną przekątną są równe zero
- **macierz jednostkowa (I)** jest to macierz diagonalna o elementach na głównej przekątnej równych jeden
- **macierz trójkątna górna (dolna)**, to macierz kwadratowa, której wszystkie elementy stojące pod (nad) główną przekątną są równe zero
- **macierz transponowana A^T** , to macierz, która powstaje z macierzy $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ przez zamianę wierszy na kolumny, tj. $A^T = [a_{ji}]_{m \times n}$.

Dwie macierze A i B są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam wymiar i wszystkie odpowiadające sobie elementy są sobie równe.

Jeżeli $A = [a_{ij}]_{n \times m}$, $B = [b_{ij}]_{n \times m}$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$, to definiujemy działania

- **dodawanie macierzy:** $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{n \times m}$
- **iloczyn przez skalar:** $\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{n \times m}$.

Iloczyn macierzy $A_{n \times m} \cdot B_{m \times p}$ jest określony tylko wtedy, gdy liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B . Macierz wynikowa $C = A \cdot B$ ma wymiar $n \times p$, a jej elementy c_{ij} oblicza się ze wzoru:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}.$$

Elementem neutralnym dodawania macierzy jest macierz zerowa. Elementem neutralnym mnożenia macierzy jest macierz jednostkowa.

Macierz odwrotną A^{-1} do macierzy kwadratowej A nazywamy taką macierz kwadratową, że $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Przykłady zadań z rozwiązaniami

Zadanie 97. Wykonaj następujące działania arytmetyczne dla podanych macierzy.

(a) $2A + B$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 5 & 8 & -5 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

(b) $B + 2A - 3C$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(c) $2A - \pi B + C$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -3\pi & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(d) $2A^T - 2B$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

(e) $A + 2B^T - C^T$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 8 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(f) $A \cdot B$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 8 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(g) $A^T \cdot (A - B)$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 2 \end{bmatrix},$$

Rozwiązania:

(a)

$$2A + B = 2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 5 & 8 & -5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -5 & 11 & 8 \\ 10 & 17 & -8 & 12 \end{bmatrix}$$

(b)

$$B + 2A - 3C = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 4 & 16 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 15 & 6 \\ 3 & 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -16 & 13 \\ 5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$2A = \begin{bmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 4 \end{bmatrix}, \quad -\pi B = \begin{bmatrix} -5\pi & -2\pi \\ -7\pi & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -3\pi & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2A - \pi B + C = \begin{bmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5\pi & -2\pi \\ -7\pi & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3\pi & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8\pi & 5 \\ -9\pi & 3 \end{bmatrix}$$

(d)

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad -2B = \begin{bmatrix} -4 & -10 \\ -2 & 0 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$2A^T - 2B = 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -10 \\ -2 & 0 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -2 & 2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

(e)

$$B^T = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 8 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + 2B^T - C^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 2 & 10 \\ 4 & 2 & 0 \\ 16 & 16 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -9 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -4 & 9 \\ 3 & 0 & 2 \\ 19 & 23 & 5 \end{bmatrix}$$

(f)

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 8 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \cdot 5 + 2 \cdot 0 + 8 \cdot 3 & 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 8 \cdot 0 & 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 8 \cdot 3 \\ 1 \cdot 5 + 1 \cdot 0 + 8 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 8 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 8 \cdot 3 \\ 5 \cdot 5 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 5 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 5 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 49 & 0 & 45 \\ 29 & 0 & 30 \\ 28 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

(g)

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad A - B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T \cdot (A - B) = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-6) & 2 \cdot 0 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot (-1) + 8 \cdot (-6) & 3 \cdot 0 + 8 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 12 \\ -51 & 48 \end{bmatrix}$$

Zadanie 98. Wyznacz macierz X.

[a] $X + A \cdot B = C^T$

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

[b] $A^T \cdot B^T - 2X = 3C$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 13 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$$

[c] $X^T + A \cdot B^T = 2C \cdot B^T$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

[d] $AX + 2B = C \cdot D$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{5}{2} & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązania:

[a]

$$X + A \cdot B = C^T \implies X = C^T - A \cdot B$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix},$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 3 \\ 5 \cdot (-2) & 5 \cdot 3 \\ 8 \cdot (-2) & 8 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -10 & 15 \\ -16 & 24 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -10 & 15 \\ -16 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 8 & -16 \\ 9 & -27 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A^T \cdot B^T - 2X = 3C \implies -2X = 3C - A^T \cdot B^T \implies X = -\frac{3}{2} \cdot C + \frac{1}{2} (A^T \cdot B^T)$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad -\frac{3}{2}C = \begin{bmatrix} -\frac{39}{2} & -3 \\ -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{33}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^T \cdot B^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 5 \cdot 4 & 2 \cdot 5 + 5 \cdot 8 \\ 0 \cdot 2 + 3 \cdot 4 & 0 \cdot 5 + 3 \cdot 8 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 & 1 \cdot 5 + 0 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 50 \\ 12 & 24 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{39}{2} & -3 \\ -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{33}{2} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 24 & 50 \\ 12 & 24 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{15}{2} & 22 \\ \frac{9}{2} & 12 \\ 1 & -14 \end{bmatrix}$$

(c)

$$X^T + A \cdot B^T = 2C \cdot B^T \implies X^T = 2C - A \cdot B^T$$

$$2C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -6 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + (-2) \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) & 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$X^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -6 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \implies X = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

(d)

$$AX + 2B = C \cdot D$$

$$2B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}, \quad C \cdot D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot D = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \cdot X_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Iloczyn macierzy o wymiarach 3×2 z macierzą X ma dać macierz o wymiarach 3×2 , stąd macierz X musi być wymiarów 2×2 .

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ c & d \\ -a & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierze będą równe, jeśli wszystkie odpowiednie elementy są równe. Mamy zatem układ równań:

$$\begin{cases} a+c = -4 \\ b+d = 1 \\ c = -3 \\ d = 1 \\ -a = 1 \\ -b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 1 \end{cases}$$

Stąd:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 99. Oblicz potęgi podanych macierzy.

(a) A^4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) B^3

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązania:

(a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 4 \cdot 1 + 3 \cdot 4 & 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 16 & 17 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 16 & 17 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 16 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \cdot 9 + 8 \cdot 16 & 9 \cdot 8 + 8 \cdot 17 \\ 16 \cdot 9 + 17 \cdot 16 & 16 \cdot 8 + 17 \cdot 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 209 & 208 \\ 416 & 417 \end{bmatrix}$$

(b)

$$B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 4 & 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 4 & 4 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 & 4 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 0 & 4 \\ 0 & 9 & 0 \\ 8 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 4 \\ 0 & 9 & 0 \\ 8 & 0 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 9 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 4 & 9 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 4 \cdot 0 & 9 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 9 \cdot 0 + 0 \cdot 4 & 0 \cdot 0 + 9 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 9 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 8 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 9 \cdot 4 & 8 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 9 \cdot 0 & 8 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 9 \cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 25 & 0 & 22 \\ 0 & 27 & 0 \\ 44 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

Zadanie 100. Sprawdź, czy macierz B jest macierzą odwrotną do macierzy A .

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{2a} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązania:

(a)

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$$

Odpowiedź: Macierz B nie jest macierzą odwrotną do macierzy A .

(b)

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{2a} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot \frac{1}{a} + 1 \cdot 0 & a \cdot (-\frac{1}{2a}) + 1 \cdot \frac{1}{2} \\ 0 \cdot \frac{1}{a} + 2 \cdot 0 & 0 \cdot (-\frac{1}{2a}) + 2 \cdot \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{2a} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \cdot a + (-\frac{1}{2a}) \cdot 0 & \frac{1}{a} \cdot 1 + (-\frac{1}{2a}) \cdot 2 \\ 0 \cdot a + \frac{1}{2} \cdot 0 & 0 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Odpowiedź: Macierz B jest macierzą odwrotną do macierzy A .

(c)

$$\begin{aligned}
 A \cdot B &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 2 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 3 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 0 + 0 \cdot (-\frac{1}{2}) + 0 \cdot 1 & -1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-3) + 0 \cdot 3 & -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \\ (-3) \cdot 0 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 1 \cdot 1 & (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 3 & (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 B \cdot A &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot (-3) & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ (-\frac{1}{2}) \cdot 0 - 3 \cdot (-1) + 1 \cdot (-3) & (-\frac{1}{2}) \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & (-\frac{1}{2}) \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-3) & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Odpowiedź: Macierz B jest macierzą odwrotną do macierzy A .

Zadania do samodzielnego rozwiązywania

Zadanie 101. Wykonaj następujące działania arytmetyczne dla podanych macierzy.

(a) $2A - B$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -5 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

(b) $2A - B + 3C$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

(c) $eA - B + 2eC$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -e \\ 0 & 4e \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

(d) $3A + B^T$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \\ 5 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix},$$

(e) $A^T - 3B + 2C^T$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 9 & 1 \\ 5 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \\ -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(f) $A \cdot B$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

(g) $(A + B^T) \cdot C$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Zadanie 102. Wyznacz macierz X .

(a) $A \cdot B + X = 2C^T$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) $2X - A = B \cdot C^T + 2A$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) $2X^T + A = 2C \cdot B^T$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$$

(d) $X - A^T = B \cdot C$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & - & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 103. Oblicz potęgi podanych macierzy.

(a) A^3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) B^4

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(c) C^3

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(d) D^4

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Zadanie 104. Sprawdź, czy macierz B jest macierzą odwrotną do macierzy A .

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(e)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}$$

Literatura

- [1] Jurlewicz, Teresa, i in. *Algebra liniowa I: przykłady i zadania*. Oficyna Wydawnicza GiS, 2005.
- [2] Jurlewicz, Teresa, i in. *Algebra liniowa I: definicje, twierdzenia, wzory*. Oficyna Wydawnicza GiS, 2005.
- [3] Topp, Jerzy. *Algebra liniowa*. Wyd. 2. Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk, 2019.

Materiały do przedmiotu:

MATEMATYKA II

Ćwiczenia nr 7

Autor:

dr Anna Makarewicz-Trześniewska

mgr Elżbieta Sędziewska



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



ĆWICZENIA VII

Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń

Ćwiczenia dotyczą metod obliczania wyznacznika macierzy. Jest to pojęcie kluczowe przy praktycznych zastosowaniach macierzy, np przy rozwiązywaniu układów równań.

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej A stopnia n nazywamy liczbę $\det(A)$ przyporządkowaną w sposób jednoznaczny na podstawie jej elementów. Pozwala określić czy dana macierz jest odwracalna. Macierz kwadratowa jest odwracalna [istnieje dla niej macierz odwrotna] wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik macierzy jest różny od zera.

Metody obliczania wyznacznika macierzy:

1. Macierz kwadratowa stopnia 1

$$\det[a_{11}] = a_{11}$$

2. Macierz kwadratowa stopnia 2

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

3. Macierz kwadratowa stopnia 3 – reguła Sarrusa

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Wzór można łatwo zastosować dopisując po prawej stronie macierzy jej dwie pierwsze kolumny i sumując iloczyny elementów przekątnej głównej i przekątnych nad diagonalną i odejmując iloczyny elementów przeciwprzekątnych.

Reguła ta nie przenosi się na wyznaczniki macierzy wyższych stopni.

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geq 2$. **Dopełnieniem algebraicznym** elementu a_{ij} macierzy A nazywamy liczbę

$$d_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

gdzie A_{ij} oznacza macierz stopnia $n - 1$ otrzymaną przez skreślenie i -tego wiersza i j -tej kolumny macierzy A .

4. Rozwinięcie Laplace'a

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geq 2$ oraz niech i, j będą ustalonymi liczbami naturalnymi takimi, że $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Wtedy wyznacznik macierzy A można obliczyć na podstawie następujących wzorów:

$$\det A = a_{i1}d_{i1} + a_{i2}d_{i2} + \dots + a_{in}d_{in}$$

wzór nazywamy rozwinięciem Laplace'a względem i -tego wiersza

$$\det A = a_{1j}d_{1j} + a_{2j}d_{2j} + \dots + a_{nj}d_{nj}$$

wzór nazywamy rozwinięciem Laplace'a względem j -tej kolumny.

5. Macierz diagonalna, trójkątna górna lub dolna

Jeżeli macierz $A = [a_{ij}]$ jest macierzą diagonalną lub macierzą trójkątną stopnia n , to jej wyznacznik jest równy iloczynowi elementów stojących na głównej przekątnej tej macierzy, tj. $\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$.

6. Metoda przekształceń elementarnych

Metoda ta polega na przekształceniu danej macierzy do postaci macierzy trójkątnej wykorzystując jedynie przekształcenia elementarne na wierszach macierzy tj.:

- dodawanie do wybranego wiersza kombinacji liniowej pozostałych wierszy
- zamiana kolejności wierszy.

Własności wyznaczników:

- Wyznacznik macierzy kwadratowej zawierającej kolumnę lub wiersz złożony z samych zer jest równy 0.

- Wyznacznik macierzy kwadratowej zawierającej dwie jednakowe kolumny lub dwa jednakowe wiersze jest równy 0.
- Wyznacznik macierzy kwadratowej zawierającej dwie kolumny proporcjonalne lub dwa wiersze proporcjonalne jest równy 0.
- Wyznacznik macierzy kwadratowej zmieni znak, jeżeli przestawimy w niej między sobą dwa wiersze albo dwie kolumny.
- Jeżeli wszystkie elementy pewnej kolumny lub pewnego wiersza macierzy kwadratowej posiadają wspólny czynnik, to można go wyłączyć przed wyznacznik tej macierzy.
- Wyznacznik macierzy kwadratowej nie zmieni się jeśli do dowolnej kolumny tej macierzy dodamy inną kolumnę pomnożoną przez pewną stałą lub do dowolnego wiersza dodamy inny wiersz pomnożony przez pewną stałą.
- $\det A = \det A^T$ dla dowolnej macierzy kwadratowej A
- Jeżeli A i B są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia, to $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.
- Dla dowolnej macierzy kwadratowej A oraz dowolnego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest równość $\det(A^n) = (\det A)^n$.

Macierz kwadratową A nazywamy **macierzą nieosobliwą**, jeżeli jej wyznacznik $\det A \neq 0$. W przeciwnym przypadku mówimy, że A jest osobliwa. Macierz kwadratowa jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa.

Jeżeli macierze A i B są tego samego stopnia i są odwracalne oraz $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, to macierze A^{-1} , A^T , AB , αA , A^n są również odwracalne i zachodzą następujące równości:

$$\begin{aligned} \det(A^{-1}) &= (\det A)^{-1}, & (A^{-1})^{-1} &= A, & (A^T)^{-1} &= (A^{-1})^T, \\ (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1}, & (\alpha A)^{-1} &= \frac{1}{\alpha}A^{-1}, & (A^n)^{-1} &= (A^{-1})^n. \end{aligned}$$

Metody wyznaczania macierzy odwrotnej:

1. Metoda dopełnień algebraicznych

Macierz odwrotną można wyznaczyć ze wzoru:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot [d_{ij}]^T$$

gdzie $[d_{ij}]^T$ to transponowana macierz dopełnień algebraicznych.

2. Metoda eliminacji Gaussa–Jordana

Polega na utworzeniu macierzy rozszerzonej:

$$[A \mid I]$$

i wykonywaniu operacji elementarnych na wierszach do momentu, gdy lewa część przyjmie postać macierzy jednostkowej. Wówczas prawa część stanowi macierz odwrotną:

$$[I \mid A^{-1}]$$

Metoda ta jest szeroko stosowana w obliczeniach numerycznych oraz w programach komputerowych.

Przykłady zadań z rozwiązaniami

Zadanie 105. Oblicz wyznacznik macierzy, wykorzystując podstawowe wzory oraz regułę Sarrusa.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(d)

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązania:

[a]

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 5$$

[b]

$$\det B = \det \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = (-1) \cdot 0 - 2 \cdot 5 = -10$$

[c]

$$\det C = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & -2 & 5 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \det C &= 2 \cdot 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 \cdot 5 - (-2) \cdot 0 \cdot 3 - 5 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \cdot (-1) = \\ &= 0 + 2 + 60 - 0 - 10 + 8 = 60 \end{aligned}$$

[d]

$$\det D = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 5 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \det D &= 0 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 5 \cdot 4 \cdot 0 - 1 \cdot 3 \cdot 1 = \\ &= 0 + 8 + 30 + 4 - 0 - 3 = 39 \end{aligned}$$

Zadanie 106. Oblicz wyznacznik macierzy stosując metodę rozwinięcia Laplace'a.

[a]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

[c]

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

[b]

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

[d]

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Rozwiązania:

(a) Rozwinięcie względem pierwszego wiersza:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = 4 \cdot 7 - 6 \cdot 5 = 28 - 30 = -2, \quad \det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = 3 \cdot 7 - 0 \cdot 5 = 21$$

$$\det A = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) \cdot 21 = -44$$

(b) Rozwinięcie względem trzeciej kolumny:

$$\det B = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = (-1) \cdot 1 - 4 \cdot 3 = -13, \quad \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 - 4 \cdot 0 = 2$$

$$\det B = 1 \cdot (-13) + 2 \cdot (-1) \cdot 2 = -17$$

(c) Rozwinięcie względem czwartego wiersza:

$$\det C = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-1)^{4+1} \det \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot (-1)^{4+4} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = -2 \cdot (4 \cdot 0 - 2 \cdot 1) = 4$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$1 \cdot (4 \cdot 5 - 2 \cdot 0) + 2 \cdot (3 \cdot 2 - 0 \cdot 4) = 20 + 6 = 26$$

$$\det C = (-1) \cdot 4 + 3 \cdot 26 = 74$$

(d) Rozwinięcie względem pierwszego wiersza:

$$\det D = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot (1 \cdot 6 - 2 \cdot 2) = 6$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} = 4 \cdot (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = 4 \cdot (-1) \cdot (5 \cdot 6 - 0 \cdot 2) = -120$$

$$\det D = 2 \cdot 6 + (-1) \cdot (-120) = 132$$

Zadanie 107. Oblicz wyznacznik macierzy sprowadzając macierz do postaci trójkątnej.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

(d)

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązania:

[a]

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \stackrel{w_2 - 4w_1}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \stackrel{w_3 - 7w_1}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} =$$

$$\stackrel{w_3 - 2w_2}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot 0 = 0$$

[b]

$$\det B = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix} \stackrel{k_1 \leftrightarrow k_2}{=} -\det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \stackrel{w_3 + 2w_1}{=} -\det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\stackrel{w_3 - 9w_2}{=} -\det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix} = -[(-1) \cdot 1 \cdot (-24)] = -24$$

[c]

$$\det C = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \stackrel{w_2 - 2w_1}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \stackrel{w_3 - 3w_1}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -7 & -6 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\stackrel{w_4 - 4w_1}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -7 & -6 \\ 0 & -6 & -7 & -13 \end{bmatrix} \stackrel{w_3 + 5w_2}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & -41 \\ 0 & -6 & -7 & -13 \end{bmatrix} =$$

$$\stackrel{w_4 + 6w_2}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & -41 \\ 0 & 0 & -1 & -55 \end{bmatrix} \stackrel{w_4 - \frac{1}{2}w_2}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & -41 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{69}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot -\frac{69}{2} = 69$$

(d)

$$\begin{aligned} \det D &= \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \stackrel{w_3 - 3w_2}{=} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 1 \\ -11 & -1 & -16 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \stackrel{w_4 - 2w_2}{=} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 1 \\ -11 & -1 & -16 & 0 \\ -5 & -3 & -8 & 0 \end{bmatrix} = \\ &\stackrel{w_2 \leftrightarrow w_4}{=} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -5 & -3 & -8 & 0 \\ -11 & -1 & -16 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{w_2 - \frac{1}{2}w_3}{=} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ -11 & -1 & -16 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \\ &\stackrel{w_1 + \frac{3}{16}w_3}{=} \begin{bmatrix} -\frac{1}{16} & \frac{13}{16} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ -11 & -1 & -16 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{w_1 + \frac{13}{40}w_2}{=} \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ -11 & -1 & -16 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= -\left(\frac{1}{10} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot (-16) \cdot 1\right) = -4 \end{aligned}$$

Zadanie 108. Wyznacz macierz odwrotną (o ile istnieje).

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

(d)

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(e)

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązania:

(a)

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

Macierz A jest macierzą nieosobliwą, istnieje macierz odwrotna.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot [d_{ij}]^T = 1 \cdot \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) Obliczymy wyznacznik macierzy metodą Laplace'a stosując rozwinięcie wzdłuż pierwszego wiersza.

$$\begin{aligned} \det B &= \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= 2 \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 1) - 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) = -3 \end{aligned}$$

Macierz B jest odwracalna. Wyznamy macierz dopełnień algebraicznych.

$$\begin{aligned} d_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, & d_{12} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, & d_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \\ d_{21} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, & d_{22} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, & d_{23} &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4, \\ d_{31} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, & d_{32} &= -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, & d_{33} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

$$[d_{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad [d_{ij}]^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Ostatecznie:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \cdot [d_{ij}]^T = -\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(c)

$$\det C = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\det C = 6 + 0 + 1 - 0 - 4 - 0 = 3 \neq 0$$

Macierz C jest macierzą odwracalną. Elementy macierzy dopełnień algebraicznych:

$$d_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad d_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad d_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$d_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad d_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad d_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$d_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad d_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad d_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

$$[d_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix}, \quad [d_{ij}]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \cdot [d_{ij}]^T = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix}$$

(d)

$$\det D = 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 8 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot (6 - 15) + 8 \cdot (5 - 4) = -1$$

Ponieważ $\det D \neq 0$ wyznaczmy macierz odwrotną. Skorzystamy z metody eliminacji Gaussa-Jordana. Utwórzmy macierz rozszerzoną.

$$[D \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Doprowadzimy lewą część powyższej macierzy do macierzy jednostkowej stosując operacje elementarne na wierszach. Najpierw przekształcimy lewą część macierzy do trójkątnej górnej, gdzie na głównej przekątnej będą same jedynki. Element a_{11} jest już równy 1, więc teraz wyzerujemy elementy w pierwszej kolumnie. Zrobimy to odejmując od drugiego wiersza podwojony wiersz pierwszy a następnie odejmując od trzeciego wiersza wiersz pierwszy.

$$\xrightarrow{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Znowu mamy 1 na głównej przekątnej. Wykorzystamy wiersz 2 do wyzerowania elementów pod główną przekątną w drugiej kolumnie.

$$\xrightarrow{w_3 + 2w_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)w_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

Ponieważ na głównej przekątnej w trzecim wierszu stała liczba -1 to przemnożymy cały trzeci wiersz przez skalar. Teraz przystępujemy do zerowania elementów nad główną przekątną. Za pomocą wiersza 3 wyzerujemy elementy w trzeciej kolumnie, a następnie używając wiersza drugiego wyzerujemy elementy w kolumnie drugiej.

$$\xrightarrow{\begin{matrix} w_1 - 3w_3 \\ w_2 + 3w_3 \end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - 2w_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

Otrzymaliśmy macierz postaci $[I \mid D^{-1}]$. Ostatecznie:

$$D^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

(e)

$$\det E = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 1) - (2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = 2 \cdot (8 - 2 - 2) - 3 = 5$$

Macierz E jest macierzą nieosobliwą. Znajdziemy macierz odwrotną metodą eliminacji Gaussa-Jordana.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}w_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2-w_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{2}{3}w_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3-w_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1-\frac{1}{2}w_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{3}{4}w_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_4-w_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} w_1+\frac{1}{3}w_3 \\ w_2-\frac{2}{3}w_3 \end{matrix}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{4}{5}w_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} w_1-\frac{1}{4}w_4 \\ w_2+\frac{1}{2}w_4 \\ w_3-\frac{3}{4}w_4 \end{matrix}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{array} \right]$$

Zatem

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Zadania do samodzielnego rozwiązywania

Zadanie 109. Oblicz wyznacznik macierzy, wykorzystując podstawowe wzory oraz regułę Sarrusa.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

(d)

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(e)

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

(f)

$$F = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 110. Oblicz wyznacznik macierzy stosując metodę rozwinięcia Laplace'a.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

(e)

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(d)

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(f)

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Zadanie 111. Oblicz wyznacznik macierzy sprowadzając macierz do postaci trójkątnej.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

(d)

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 8 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(e)

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 10 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(f)

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 9 \\ 1 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Zadanie 112. Wyznacz macierz odwrotną (o ile istnieje).

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

(e)

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(d)

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(f)

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Literatura

- [1] Jurlewicz, Teresa, i in. *Algebra liniowa I: przykłady i zadania*. Oficyna Wydawnicza GiS, 2005.
- [2] Jurlewicz, Teresa, i in. *Algebra liniowa I: definicje, twierdzenia, wzory*. Oficyna Wydawnicza GiS, 2005.
- [3] Topp, Jerzy. *Algebra liniowa*. Wyd. 2. Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk, 2019.

Materiały do przedmiotu:

MATEMATYKA II

Ćwiczenia nr 8

Autor:

dr Anna Makarewicz-Trześniewska

mgr Elżbieta Sędziewska



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



ĆWICZENIA VIII

Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń

Ćwiczenia dotyczą rozwiązywania układów równań liniowych. Podamy pewne metody rozwiązywania układów równań liniowych oraz twierdzenie, dzięki któremu możliwe będzie określenie typu układu równań (oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny) bez konieczności rozwiązywania.

Układem m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, x_2, \dots, x_n$, gdzie $m \in \mathbb{N}$ oraz $n \in \mathbb{N}$, nazywamy układ równań postaci:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{R}$ oraz $b_i \in \mathbb{R}$ dla $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ oraz $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Układ równań liniowych można zapisać w postaci macierzowej:

$$AX = B,$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Macierz A nazywamy macierzą główną układu równań liniowych, macierz X macierzą (kolumną) niewiadomych, zaś macierz B macierzą (kolumną) wyrazów wolnych.

Przejdziemy teraz do omówienia **kwadratowych układów równań**.

1. Niech macierz główna A liniowego układu równań będzie macierzą kwadratową.

2. Twierdzenie (Cramera)

Układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest nieosobliwa, tzn. $\det A \neq 0$. Rozwiązanie to dane jest następującymi wzorami Cramera:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \\ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n = \frac{\det A_n}{\det A} \end{cases}$$

gdzie macierz A_i otrzymujemy z macierzy A przez zastąpienie i-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych.

Jeśli macierz A jest nieosobliwa, tzn. $\det A \neq 0$ to rozwiązanie możemy znaleźć poprzez wyznaczenie macierzy odwrotnej, wtedy $X = A^{-1}B$.

Metoda eliminacji Gaussa dla układów Cramera.

1. Załóżmy najpierw, że dany jest układ równań liniowych w postaci macierzowej $AX = B$, gdzie A jest kwadratową macierzą nieosobliwą.

2. Z twierdzenia Cramera wynika, że ma on dokładnie jedno rozwiązanie.

3. Zamiast rozwiązywać układ równań w klasycznej postaci, będziemy przekształcać macierz rozszerzoną układu $[A \mid B]$.

- I etap $[A \mid B] \rightarrow [A' \mid B']$, gdzie A' – macierz trójkątna górna z jedynkami na głównej przekątnej.

- II etap $[A \mid B] \rightarrow [A' \mid B'] \rightarrow [I \mid R]$, gdzie R – macierz rozwiązań układu.

Operacje na wierszach macierzy, które nie zmieniają rozwiązań układu równań:

- zamiana dwóch wierszy macierzy (zamiana kolejności równań) $w_i \leftrightarrow w_j$
- pomnożenie wiersza przez stałą różną od 0 (pomnożenie stronami równania przez stałą różną od 0) cw_i .
- dodanie do elementów pewnego wiersza odpowiadających im elementów innego wiersza pomnożonych przez dowolną liczbę różną od 0 (dodawanie równań stronami) $w_i + cw_j$.

Twierdzenie Kroneckera-Capelliego.

Rozważmy układ m równań liniowych o n niewiadomych. Niech U będzie macierzą o wymiarze $m \times (n + 1)$ powstałą z macierzy A wymiaru $m \times n$ przez dołączenie do macierzy A dodatkowej kolumny – wektora prawej strony B , tj.

$$U = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Tak utworzoną macierz U nazywamy **macierzą uzupełnioną rozważanego układu**.

Twierdzenie Kroneckera-Capelliego mówi, że układ równań posiada rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rzędy macierzy A oraz U są równe, tj. $\text{rz } A = \text{rz } U$. Ponadto:

- jeżeli $\text{rz } A = \text{rz } U = n$ (n – liczba niewiadomych), to rozwiązanie to jest jedyne;
- jeżeli $\text{rz } A = \text{rz } U = r < n$, to rozwiązań jest nieskończenie wiele i zależą one od $n - r$ parametrów;
- jeżeli $\text{rz } A \neq \text{rz } U$, to układ równań jest sprzeczny.

Przykłady zadań z rozwiązaniami

Zadanie 113. Stosując twierdzenie Cramera, rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x + 3y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 5. \end{cases}$$

Rozwiązania:

Wyznacznik głównej macierzy układu obliczymy stosując metodę Laplace'a w następujący sposób:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(6 + 1) - 1(2 - 3) - 1(-1 - 9) = 14 + 1 + 10 = 25.$$

Ponieważ $|A| \neq 0$ to układ jest oznaczony. Obliczymy wyznaczniki pomocnicze:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4(7) - 1(-3) - 1(-16) = 28 + 3 + 16 = 47,$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2(-3) - 4(2 - 3) - 1(2) = -6 + 4 - 2 = -4,$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2(16) - 1(2) + 4(-10) = 32 - 2 - 40 = -10.$$

Powyższe wyznaczniki można też obliczyć korzystając z metody Sarrusa. Ostateczne otrzymujemy rozwiązanie postaci:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{47}{25}, \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = -\frac{4}{25}, \quad z = \frac{|A_z|}{|A|} = -\frac{2}{5}$$

Zadanie 114. Rozwiąż układ równań metodą macierzy odwrotnej:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Szukane rozwiązanie możemy zapisać w postaci $X = A^{-1} \cdot B$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aby wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy A skorzystamy ze wzoru

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (D_{ij})^T.$$

Na początek obliczymy wyznacznik macierzy A :

$$\det A = 2 \cdot (1 - 4) - 1 \cdot (-1 - 6) + 1 \cdot (2 + 3) = -6 + 7 + 5 = 6.$$

Następnie należy wyznaczyć dopełnienia algebraiczne D_{ij}

$$\begin{aligned} D_{11} &= + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 & D_{12} &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7 \\ D_{13} &= + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 & D_{21} &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \\ D_{22} &= + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 & D_{23} &= - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \\ D_{31} &= + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 & D_{32} &= - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \\ D_{33} &= + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \end{aligned}$$

Transpozycja macierzy dopełnień algebraicznych $(D_{ij})^T$ wygląda następująco:

$$(D_{ij})^T = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 7 & -5 & -3 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Macierz odwrotna A^{-1} można zapisać w następujący sposób:

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 7 & -5 & -3 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązaniem rozważanego układu równań jest

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 7 & -5 & -3 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Zatem: $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2$.

Zadanie 115. Rozwiąż układ równań metodą eliminacji Gaussa:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

Rozwiązania:

Zapisujemy macierz rozszerzoną układu równań $[A|B]$ i wykonujemy operacje elementarne na wierszach:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Następnie określamy rzędy macierzy:

$$\text{rz}(A) = 2, \quad \text{rz}([A|B]) = 2, \quad n = 3$$

Ponieważ $\text{rz}(A) = \text{rz}([A|B]) = 2 < n$, układ posiada nieskończenie wiele rozwią-

zań zależnych od $n - \text{rz}(A) = 3 - 2 = 1$ parametru. Wyznamy teraz rozwiązanie ogólne. Przyjmujemy parametr $z = t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$ i z przekształconej macierzy otrzymujemy równania:

$$\begin{aligned} -3y - z &= -9 \implies -3y = -9 + t \implies y = 3 - \frac{1}{3}t \\ x + y + z &= 6 \implies x = 6 - \left(3 - \frac{1}{3}t\right) - t \implies x = 3 - \frac{2}{3}t \end{aligned}$$

Rozwiązaniem ogólnym układu jest:

$$\begin{cases} x = 3 - \frac{2}{3}t \\ y = 3 - \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}$$

Zadanie 116. Rozwiąż układ równań metodą eliminacji Gaussa:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 1 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 9 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zapiszemy macierz rozszerzoną układu równań $[A|B]$ i wykonamy operacje elementarne na wierszach ustawiając 1 w miejscu a_{11} macierzy $[A|B]$ i wyzerujemy elementy znajdujące się pod elementem a_{11} :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & -4 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & -4 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_2 - 2w_1 \\ w_3 - w_1 \\ w_4 - 4w_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right]$$

Następnie wyzerujemy elementy pod a_{22} :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3+w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right]$$

Z otrzymanej postaci schodkowej wyznaczamy rzędy macierzy:

- $\text{rz}(A) = 2$ [mamy dwa niezerowe wiersze w macierzy głównej i łatwo znajdziemy niezerowy wyznacznik typu 2×2].
- $\text{rz}([A|B]) = 3$ bo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{w_4-2.5w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Zatem

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 2 = -2 \neq 0.$$

Ponieważ $\text{rz}(A) \neq \text{rz}([A|B])$, a w szczególności:

$$2 \neq 3$$

to układ równań jest sprzeczny. Ostatnie dwa wiersze macierzy odpowiadają równaniom:

$$0 = 2 \quad \text{oraz} \quad 0 = 5$$

co potwierdza nasze wnioski z twierdzenia Kroneckera-Capellego, że układ nie posiada rozwiązań.

Zadanie 117. Rozwiąż układ równań metodą eliminacji Gaussa:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Macierz rozszerzoną układu równań zapiszemy w postaci $[A|B]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 8 \end{array} \right]$$

Rozpoczniemy od wyzerowania pierwszej kolumny pod elementem a_{11} :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_2 - 2w_1 \\ w_3 - w_1 \\ w_4 - 3w_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -4 \end{array} \right]$$

Wyzerujemy teraz pewne elementy drugiej kolumny znajdujące się pod elementem a_{22} . Wykonujemy operację: $w_4 + w_2$ i otrzymamy:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -5 \end{array} \right]$$

Wyzerujemy teraz elementy trzeciej kolumny znajdujące się pod elementem a_{33} . W tym celu wykonamy operację: $w_4 + 3w_3$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right]$$

Z uzyskanej postaci schodkowej wyznaczamy niewiadome w następujący sposób: z czwartego wiersza:

$$4x_4 = 4 \implies x_4 = 1$$

Z trzeciego wiersza:

$$x_3 + 2x_4 = 3 \implies x_3 + 2(1) = 3 \implies x_3 = 1$$

Z drugiego wiersza:

$$x_2 - x_3 - x_4 = -1 \Rightarrow x_2 - 1 - 1 = -1 \Rightarrow x_2 = 1$$

Z pierwszego wiersza:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \Rightarrow x_1 + 1 + 1 + 1 = 4 \Rightarrow x_1 = 1$$

Rozwiązaniem układu jest:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Możemy też kontynuować zerowanie elementów macierzy w postaci schodkowej nad główną przekątną w następujący sposób:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{4}w_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} w_3 - 2w_4 \\ w_2 + w_4 \\ w_1 - w_4 \end{matrix}} \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} w_2 + w_3 \\ w_1 - w_3 \end{matrix}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Zadania do samodzielnego rozwiązywania

Zadanie 118. Stosując twierdzenie Cramera, rozwiąż poniższy układ równań liniowych:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

Zadanie 119. Rozwiąż układ równań metodą macierzy odwrotnej:

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x + 2y + 2z = 9 \\ x + 2y + 3z = 10 \end{cases}$$

Zadanie 120. Rozwiąż układ równań metodą eliminacji Gaussa:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = 1 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

Zadanie 121. Rozwiąż układ równań metodą eliminacji Gaussa:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3 \\ 2x_1 + 3x_3 + 3x_5 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 - x_5 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 2 \end{cases}$$

Zadanie 122. Metodą eliminacji Gaussa rozwiąż poniższy układ równań liniowych:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

Literatura

- [1] Jurlewicz, Teresa, i in. *Algebra liniowa I: przykłady i zadania*. Oficyna Wydawnicza GiS, 2005.

- [2] Jurlewicz, Teresa, i in. *Algebra liniowa I: definicje, twierdzenia, wzory*. Oficyna Wydawnicza GiS, 2005.
- [3] Topp, Jerzy. *Algebra liniowa*. Wyd. 2. Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk, 2019.

