

Ćwiczenia z fizyki

dr Maciej Czarnacki

Wydział Matematyki i Informatyki Technicznej, PL

Plan prezentacji

- Rachunek wektorowy
- Rachunek różniczkowy i całkowy
- Kinematyka punktu materialnego
- Dynamika punktu materialnego i bryły sztywnej
- Oscylator harmoniczny, wahadło matematyczne i fizyczne
- Hydrostatyka i termodynamika
- Elektrostatyka, elektryczność i magnetyzm

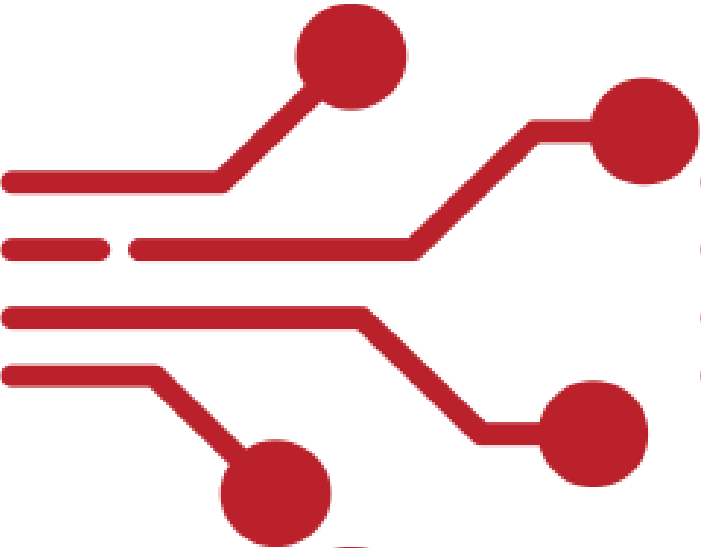


2

Plan prezentacji

- Optyka geometryczna i falowa
- Fizyka współczesna
- Mechanika kwantowa
- Analiza eksperymentów fizycznych na podstawie danych pomiarowych

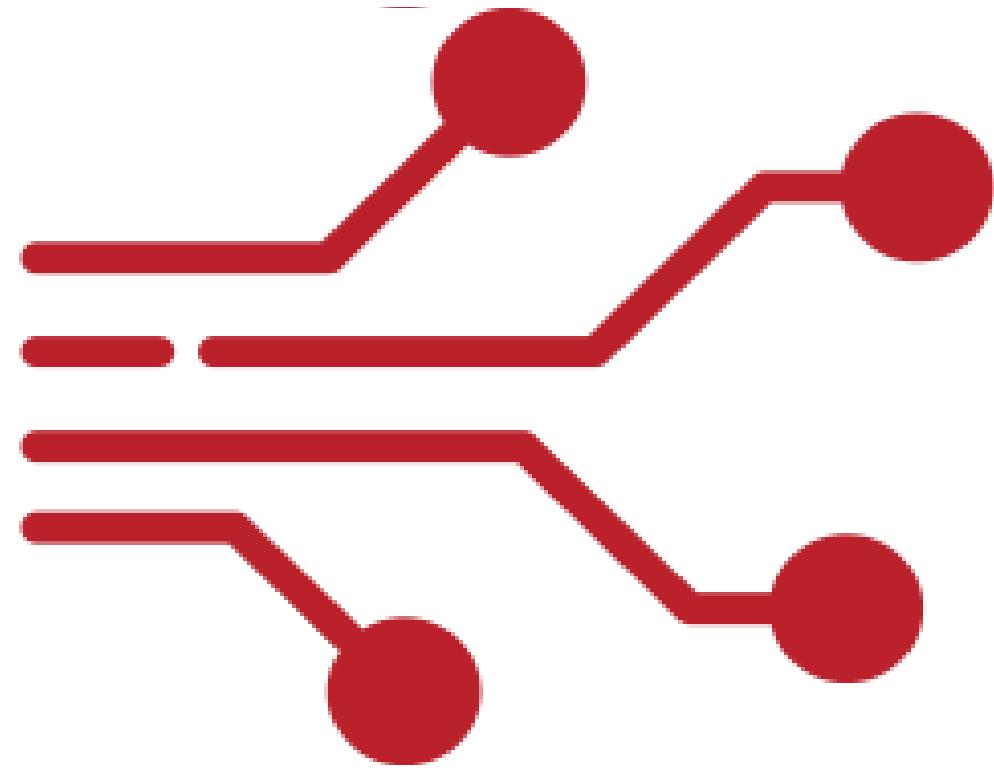




Celem niniejszej prezentacji jest zebranie podstawowej wiedzy potrzebnej do zrozumienia procesu oraz nauczania się rozwiązywania zadań obliczeniowych z fizyki. Na początku każdego z rozdziałów zamieszczony jest zbiór potrzebnych równań. Następnie przedstawione jest rozwiązanie od jednego do kilku zadań z danego działu fizyki. Na końcu każdego rozdziału znajdują się zadania do samodzielnego rozwiązania.

4

Rachunek wektorowy



5

Rachunek wektorowy

Działania dla dwóch wektorów:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

Suma wektorów:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

Różnica wektorów:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$$

Mnożenie wektora przez liczbę:

$$r\vec{a} = (ra_x, ra_y, ra_z)$$

Długość wektora:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Iloczyn skalarny:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$

Iloczyn wektorowy:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} + a_x b_y \vec{k} \\ &\quad - a_y b_x \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_z b_y \vec{i} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} \\ &\quad + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} \\ &\quad + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \end{aligned}$$

Wektory

Zadanie 1.

Obliczyć sumę, różnicę, długości oraz iloczyn skalarny i iloczyn wektorowy następujących wektorów: $\vec{a} = (1, -5, 4)$, $\vec{b} = (0, 3, -3)$.
Dodatkowo wyznaczyć kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Wektory

Rozwiązanie zadanie 1.

Dane: $\vec{a} = (1, -5, 4)$, $\vec{b} = (0, 3, -3)$

Szukane: $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$, α

Suma i różnica wektorów

$$\vec{a} + \vec{b} = (1 + 0, -5 + 3, 4 - 3) = (1, -2, 1)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (1 - 0, -5 - 3, 4 + 3) = (1, -8, 7)$$

Długość wektorów

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + 4^2} = \sqrt{42}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Iloczyn skalarny

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 0 + (-5) \cdot 3 + 4 \cdot (-3) = 0 - 15 - 12 = -27$$

8

Wektory

Rozwiązanie zadanie 1.

Iloczyn wektorowy

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = ((-5)(-2) - 4 \cdot 3, 4 \cdot 0 - 1 \cdot (-3), 1 \cdot 3 - (-5) \cdot 0) = (3, 3, 3)$$

Kąt między wektorami

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-27}{\sqrt{42}\sqrt{18}} = -0,9818$$

$$\alpha = \arccos(\cos \alpha) = 169,11^\circ$$

Wektory

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Dla danych dwóch wektorów $\vec{a} = (-5, -7, 3)$ i $\vec{b} = (1, 1, -4)$ obliczyć sumę, różnicę, długości wektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, długości ich sumy oraz różnicy. Policzyć iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ oraz wyznaczyć kąt między nimi. Policzyć iloczyn skalarny wektorów powstałych z sumy i różnicy oraz wyznaczyć kąt między tymi wektorami

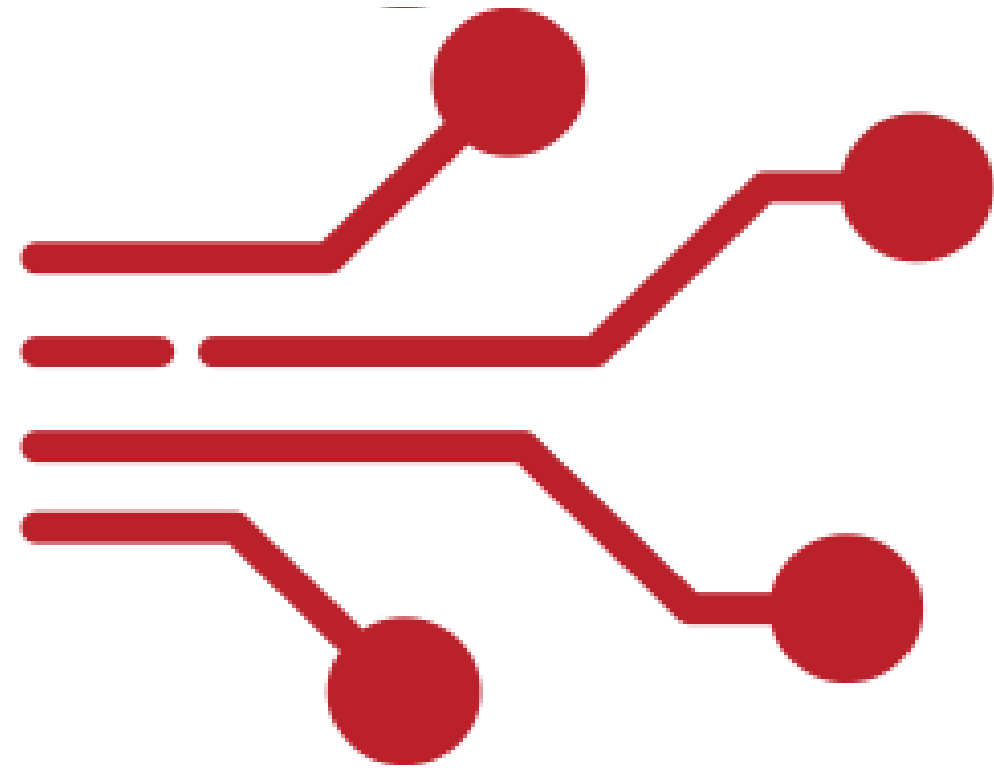
10

Wektory

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Dla danych dwóch wektorów $\vec{a} = (-1, 7, -3)$ i $\vec{b} = (5, -1, -2)$ obliczyć iloczyn skalarny oraz wyznaczyć kąt między nimi. Obliczyć iloczyn wektorowy tych wektorów.

Rachunek różniczkowy i całkowy



Rachunek różniczkowy

Podstawowe pochodne funkcji przydatne w fizyce:

$$f(x) = a$$

$$f'(x) = 0$$

$$f(x) = a \cdot x^m$$

$$f'(x) = amx^{(m-1)}$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = \tan x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cot^2 x}$$

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Podstawowe zasady obliczania pochodnych:

$$(af)'(x) = af'(x)$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \text{gdzie } g(x) \neq 0$$

$$f'(x) = h'(g(x))g'(x) \quad \text{gdzie } f(x) = h(g(x))$$

13

Rachunek różniczkowy

Zadanie 1.

Dwa punkty poruszały się wzdłuż jednej prostej zgodnie z równaniami ruchu $x_1(t) = 2t$ i $x_2(t) = 10 - 2t^2$.

Wyznacz funkcję zależności czasu odległości między tymi punktami. Oraz wyznacz chwilę czasu t dla której te dwa punkty były najbliżej.

14

Rachunek różniczkowy

Rozwiązanie zadania 1.

Odległość między punktami zapiszemy jako wartość bezwzględna różnicy ich współrzędnych

$$d(t) = |x_1(t) - x_2(t)| = |2t - 10 - 2t^2|$$

Chwilę t , dla której ta funkcja przyjmuje minimum obliczymy z warunku zerowania się pochodnej dla tej funkcji

$$d'(t) = |2 - 4t| = 0$$

$$t = 0,5s$$

15

Rachunek różniczkowy

Zadanie do samodzielnego rozwiązania

Dwa punkty poruszają się w płaszczyźnie xy . Położenia w funkcji czasu t (w sekundach) podane są parametrycznie:

$$r_1(t) = (2t, t^2) \text{ i } r_2(t) = (5 - t, 4 - 2t) \text{ dla } t \geq 0.$$

Wyznacz zależność od czasu odległości między tymi punktami.

Znajdź chwilę czasu t , dla której odległość ta była najmniejsza.

Pamiętaj o wektorowym dodawaniu współrzędnych.

16

Rachunek całkowy

Podstawowe całki funkcji przydatne w fizyce:

$$\int 0 dx = C$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int a dx = ax + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

17

Rachunek całkowy

Zadanie 1.

Oblicz pracę wykonaną przez siłę opisaną jako funkcję zmiennej położenia postaci

$$F(x) = 5e^{-x} + 2 \sin x$$

gdzie $x \in [0, \pi]m$.

Rozwiązanie zadania 1.

$$W = \int_0^{\pi} F(x) dx = \int_0^{\pi} (5^{-x} + 2 \sin x) dx$$

Rozdzielamy całkę na sumę całek

$$W = \int_0^{\pi} 5^{-x} dx + \int_0^{\pi} 2 \sin x dx$$

Rachunek całkowy

Rozwiązanie zadania 1.

Pierwsza całka

$$\int_0^{\pi} 5e^{-x} dx = 5[-e^{-x}]_0^{\pi} = 5(1 - e^{-\pi}) \approx 4,784$$

Druga całka

$$\int_0^{\pi} 2 \sin x dx = 2[-\cos x]_0^{\pi} = 2(1 + 1) = 4$$

Zatem praca wynosi

$$W = 4,784 + 4 = 8,784J$$

19

Rachunek całkowy

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Oblicz ładunek zgromadzony na kondensatorze w trakcie ładowania go prądem elektrycznym o następującym przebiegu w czasie

$$I(t) = 3e^{-2t} + 4 \cos t$$

gdzie $t \in [0,2]s$.

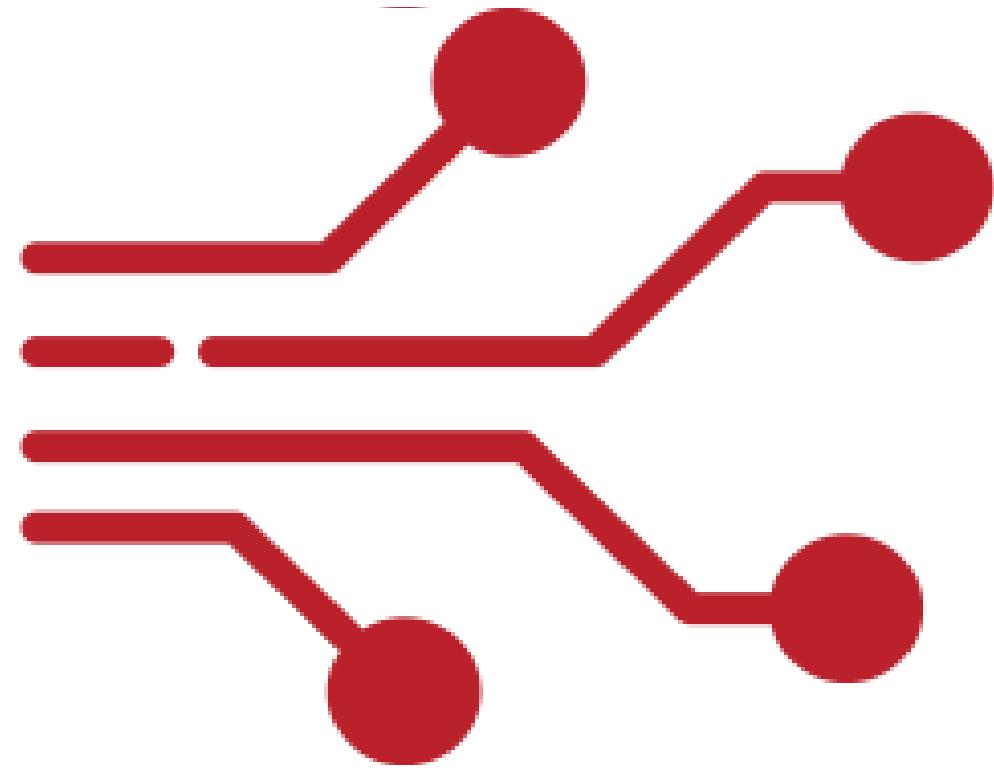
Oblicz drogę przebytą przez ciało w ruchu zmiennym, dla którego przyspieszenie opisane jest funkcją

$$a(t) = 3t^{-1} + 6e^{-t}$$

gdzie $t \in [0,1]s$.

20

Kinematyka punktu materialnego



21

Kinematyka punktu materialnego

Droga i prędkość w ruchu jednostajnym prostoliniowym:

$$s = s_0 + vt$$

$$v = \frac{s}{t}$$

Droga, prędkość i przyspieszenie w ruchu jednostajnie zmiennym:

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$v(t) = v_0 + at$$

$$a = \frac{v_k - v_p}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Prędkość kątowna i liniowa oraz przyspieszenie dośrodkowe w ruchu jednostajnym po okręgu:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}$$

$$v = r\omega$$

$$a_d = \frac{v^2}{r}$$

Kąt, prędkość kątowna i przyspieszenie kątowe w ruchu jednostajnym po okręgu:

$$\phi(t) = \frac{\epsilon t^2}{2} + \omega_0 t + \phi_0$$

$$\omega(t) = \epsilon t + \omega_0$$

$$\epsilon = \frac{\omega_k - \omega_p}{\Delta t}$$

Kinematyka punktu materialnego

Zadanie 1.

Punkt materialny porusza się ruchem jednostajnym po prostej z prędkością $v = 3m/s$. W chwili $t_0 = 0s$ jego położenie wynosi $x_0 = -5m$.

Dane:

$v = 3m/s$, $x_0 = -5m$ dla $t_0 = 0s$, $t = 12s$, $t_1 = 4s$, $t_2 = 10s$

Rozwiązanie:

Dla ruchu jednostajnego po prostej:

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0)$$

Położenie w $t = 12s$

$$x(12) = -5m + 3m/s \cdot 12s = 36m$$

Przemieszczenie i droga między $t_1 = 4s$ i $t_2 = 10s$

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = v(t_2 - t_1)$$

$$\Delta x = 3m/s \cdot (10s - 4s) = 18m$$

Droga przebyta w ruchu jednostajnym prostoliniowym (bez zmiany kierunku) jest równa wartości bezwzględnej przemieszczenia, więc droga $s = 18m$.

23

Kinematyka punktu materialnego

Zadanie 2.

Dwa ciała poruszając się z prędkościami v_1 i v_2 wzdłuż linii prostej.

Kiedy poruszają się w przeciwnych kierunkach to odległość między nimi zmniejsza się o $s_1 = 200m$ w czasie każdych $t_1 = 5s$. Kiedy poruszają się w tym samym kierunku to z tymi samymi prędkościami to odległość między nimi zwiększa się o

$s_2 = 40m$ w czasie każdych $t_2 = 8s$. Obliczyć prędkości v_1 i v_2 .

Kinematyka punktu materialnego

Rozwiązanie zadania 2.

Dane: $s_1 = 200m$, $t_1 = 5s$, $s_2 = 40m$, $t_2 = 8s$

Szukane: v_1 i v_2

Tworzymy układ równań opisujących obydwa przypadki ruchu względnego ciał:

$$\frac{s_1}{t_1} = v_1 + v_2$$

$$\frac{s_2}{t_2} = v_1 - v_2$$

Dodając stronami otrzymujemy rozwiązanie v_1

$$2v_1 = \frac{s_1}{t_1} + \frac{s_2}{t_2}$$

$$v_1 = \frac{s_1 t_2 + s_2 t_1}{2 t_1 t_2}$$

Odejmując równania stronami otrzymujemy

$$2v_2 = \frac{s_1}{t_1} - \frac{s_2}{t_2}$$

$$v_2 = \frac{s_1 t_2 - s_2 t_1}{2 t_1 t_2}$$

Podstawiając do równań dane otrzymujemy:

$$v_1 = \frac{200m \cdot 8s + 40m \cdot 5s}{2 \cdot 5s \cdot 8s} = 22,5m/s$$

$$v_2 = \frac{200m \cdot 8s - 40m \cdot 5s}{2 \cdot 5s \cdot 8s} = 17,5m/s$$

25

Kinematyka punktu materialnego

Zadanie 3.

Z armaty został wystrzelony pocisk z prędkością początkową równą

$v_1 = 300 \text{ m/s}$ pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do poziomu. Wyznaczyć parametry lotu pocisku takie jak: zasięg, maksymalna wysokość toru pocisku, czas od wystrzału do uderzenia w ziemię oraz równanie toru. Przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

26

Kinematyka punktu materialnego

Rozwiązanie zadania 3.

Dane: $v_1=300\text{m/s}$, $\alpha = 30^\circ$, $g = 9,81\text{m/s}^2$

Szukane: z , $h_{\max}$, t , $y(x)$

W tym zadaniu mamy do czynienia ze złożeniem dwóch ruchów – jednostajnego w poziomie oraz jednostajnie opóźnionego w pionie. Należy rozłożyć prędkość na składowe dla kierunku poziomego i pionowego:

$$\begin{aligned}v_x &= v_0 \cos \alpha \\v_y &= v_0 \sin \alpha\end{aligned}$$

Korzystając z równań na położenie w ruchu jednostajnym prostoliniowym oraz jednostajnie opóźnionym wyznaczmy parametry lotu oraz równanie toru w kolejnych krokach.

$$\begin{aligned}x(t) &= v_{0x}t = v_0 \cos \alpha t \\y(t) &= v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}\end{aligned}$$

27

Kinematyka punktu materialnego

Dla ruchu w pionie wiemy, że dla maksymalnej wysokości pocisku prędkość w pionie wynosi 0.

$$v_0 \sin \alpha - gt = 0$$

Stąd możemy wyznaczyć czas połowę trwania ruchu $t_{1/2}$:

$$t_{1/2} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g},$$

Zatem całkowity czas trwania ruchu wynosi:

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

Wstawiając ten wynik do równania na $y(t)$ otrzymujemy maksymalną wysokość pocisku:

$$h = y(t_{1/2}) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Podstawiając całkowity czas trwania ruchu do równania na położenie w poziomie $x(t)$ otrzymujemy zasięg pocisku:

$$z = v_0 \cos \alpha \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

W celu uproszczenia powyższego wyrażenia należy skorzystać z tożsamości trygonometrycznej:

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

$$z = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Kinematyka punktu materialnego

W celu wyprowadzenia równania toru ruchu należy pozbyć się z równań czasu wyznaczając czas z równania na x i wstawiając do równania na y :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

$$y(x) = v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{gx^2}{2v_0 \cos \alpha}$$

$$y(x) = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0 \cos \alpha}$$

Mając wszystkie równania możemy podstawić do nich odpowiednie wielkości i wyliczyć szukane wartości.

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2 \cdot 300 \text{ m/s} \sin 30^\circ}{9,81 \text{ m/s}^2} = 30,6 \text{ s}$$

$$h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{(300 \text{ m/s})^2 \sin^2 30^\circ}{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} = 1146,8 \text{ m}$$

29

Kinematyka punktu materialnego

Obliczmy zasięg dla pocisku:

$$Z = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{(300\text{m/s})^2 \sin(2 \cdot 30^\circ)}{9,81\text{m/s}^2} = 7945,2\text{m}$$

Wyliczmy współczynniki równania toru ruchu:

$$y(x) = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0 \cos \alpha}$$
$$y(x) = 0,57x - 0,19x^2$$

30

Kinematyka punktu materialnego

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Punkt materialny porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym po okręgu o promieniu $R = 30cm$ z przyspieszeniem liniowym

$a_s = 6cm/s^2$. Wyznacz po jakim czasie t od ruszenia z miejsca przyspieszenie dośrodkowe będzie 3 razy większe od przyspieszenia liniowego.

31

Kinematyka punktu materialnego

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Koło w urządzeniu mechanicznym wykonuje $n = 500$ obrotów w ciągu minuty. Czas zatrzymania urządzenia wynosi $t = 2min$. Zakładając, że ruch koła w trakcie zatrzymywania urządzenia jest jednostajnie opóźniony, oblicz ile obrotów wykona koło do czasu zatrzymania.

32

Kinematyka punktu materialnego

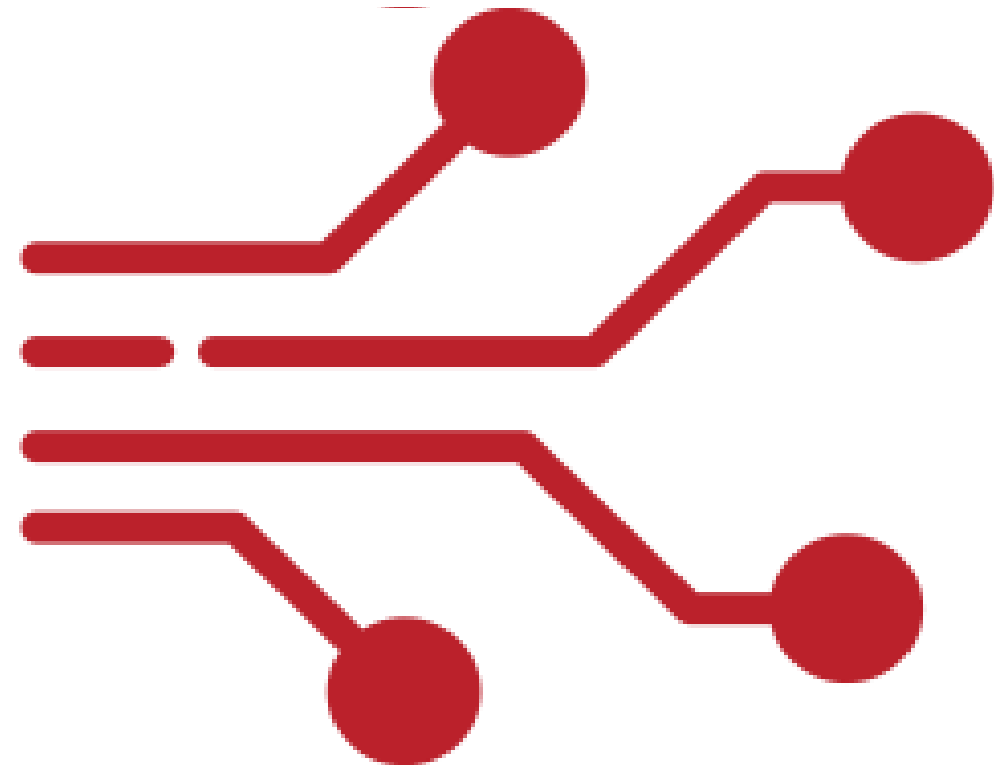
Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zrzucono z wieży kamień pionowo w dół bez prędkości początkowej.

Po upływie czasu t_1 kamień był na wysokości h_1 , natomiast po upływie czasu t_2 na wysokości h_2 . Obliczyć wysokość wieży, z której zrzucono kamień.

33

Dynamika punktu materialnego i bryły sztywnej



Dynamika

Pęd:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Siła:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Praca:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$
$$W = F s \cos \alpha$$

Moc:

$$P = \frac{W}{t}$$

Energia potencjalna w jednorodnym polu grawitacyjnym Ziemi:

$$E_p = mgh$$

Energia kinetyczna:

$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2}$$

Moment pędu:

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$$
$$J = I\omega$$

Moment siły:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$
$$\vec{M} = I\vec{\epsilon}$$

Moment bezwładności:

$$I = mr^2$$

Energia kinetyczna w ruchu obrotowym:

$$E_{kin,rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

35

Dynamika

Zadanie 1.

Wyznaczyć jak daleko przemieści się klocek o masie $m = 10kg$ ześlizgujący się po równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 45^\circ$ z wysokości $h = 5m$. Ruch po powierzchni równi odbywa się bez tarcia, natomiast po powierzchni płaskiej z tarciem gdzie współczynnik tarcia wynosi $\mu = 0,5$. Ile upłynie czasu do zatrzymania klocka.

36

Dynamika

Rozwiązanie zadanie 1.

Z zasady zachowania energii policzymy prędkość końcową u dołu równi

$$mgh = 1/2mv^2$$

$$v = \sqrt{2gh} = 9,9m/s$$

Droga pokonana na równi pochyłej

$$L = \frac{L}{\sin \alpha} = 7,071m$$

Dla ruchu po powierzchni poziomej jedyną niezrównoważoną siłą działającą na klocek jest tarcie działające przeciwnie do ruchu klocka. Zatem mamy do czynienia z ruchem jednostajnie opóźnionym gdzie z drugiej zasady dynamiki mamy

$$ma = \mu mg$$

$$a = \mu g = 4,905m/s^2$$

Dynamika

Rozwiązanie zadanie 1.

Czas hamowania do zatrzymania policzymy z

$$t_2 = \frac{v}{a} = 2,019s$$

Droga przebyta po powierzchni poziomej

$$s = 1/2at_2^2 = \frac{2gh}{2\mu g} = 10m$$

Czas potrzebny na zjechanie klocka z równi

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{a_r}} = \sqrt{\frac{2h / \sin \alpha}{g \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2h}{g \sin^2 \alpha}} = 1,428s$$
$$t = t_1 + t_2 = 3,437s$$

38

Dynamika

Zadanie 2.

Rozważ jednorodną kulę o masie $M=2\text{kg}$ i promieniu $R=0,1\text{m}$.

1. Wyznacz moment bezwładności kuli względem osi przechodzącej przez jej środek.
2. Oblicz moment bezwładności tej kuli względem osi stycznej do jej powierzchni.

Dla jednorodnej kuli mamy:

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

39

Dynamika

Rozwiązanie zadanie 2.

Dane: $M = 2kg$, $R = 0,1m$

Szukane: I_0 , I_R

Moment bezwładności kuli względem osi symetrii wynosi

$$I_0 = \frac{2}{5}MR^2 = 0,008kg \cdot m^2$$

Korzystając z prawa Steinera wyznaczymy moment bezwładności dla tej samej kuli ale względem osi przesuniętej równoległej i stycznej do powierzchni kuli

$$I_R = I_0 + MR^2 = 0,008 + 2 \cdot 0,01 = 0,028kg \cdot m^2$$

40

Dynamika

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Oblicz przyspieszenie z jakim będzie się staczał bez poślizgu jednorodny walec o masie $m=3\text{kg}$, promieniu $r=10\text{cm}$ z równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 45^\circ$.

Moment bezwładności walca:

$$I = \frac{1}{2}mr^2$$

41

Dynamika

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Jadący samochód z prędkością $v = 100 \text{ km/h}$ o masie $m = 2,5 \text{ t}$ w pewnym momencie zaczyna hamować. Wyznaczyć jaka jest siła hamowania samochodu jeśli zatrzymał się on po czasie $t = 6 \text{ s}$.

Jaką drogę przebył samochód od początku hamowania.

42

Dynamika

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Jaką energię kinetyczną ma pociąg o masie 300 ton przy prędkości równej 120km/h? Na jaką wysokość można podnieść tą energią ciało o masie 1 tony?

43

Dynamika

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Jaką prędkość początkową należy nadać huśtawce o długości sznura $l=2,5\text{m}$, aby jej maksymalne wychylenie wynosiło $\alpha = 60^\circ$?

Zakładamy, że sznur jest nierozciągliwy.

Dynamika

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Na wale o średnicy $d=6\text{cm}$ osadzone jest koło o masie $m=8\text{kg}$.
Promień koła $r=25\text{cm}$. Na wale nawinięta jest lina i ciągnięta siłą 300N . Jaka będzie prędkość kątowa po upływie czasu 6s , jaki będzie okres obrotu i liczba obrotów na sekundę?

45

Dynamika

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Łyżwiarz rozpędzony do prędkości 8m/s przebywa bezwładnie drogę 35m . Jaki jest współczynnik tarcia łyżew o lód?

46

Dynamika

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Tramwaj o masie 15 ton po upływie czasu 2s od chwili ruszenia z miejsca uzyskał prędkość równą 15 km/h. Obliczyć jaką moc osiągnął silnik tramwaju?

47

Dynamika

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Jaką objętość wody może wypompować w czasie 1,5 godziny ze studni o głębokości 15m pompa zasilana silnikiem o mocy 2 kW?

48

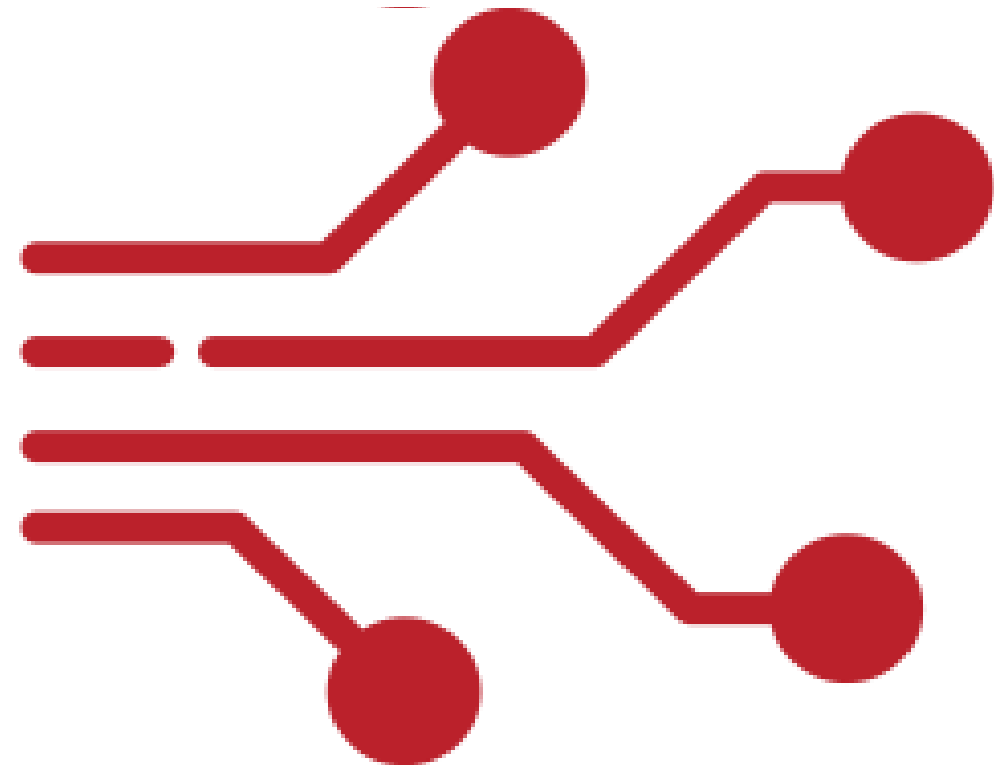
Dynamika

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Z jaką siłą musi działać na pociąg lokomotywa, aby z prędkości początkowej równej 40 km/h pociąg o łącznej masie równej 250 ton zwiększyć do prędkości 60 km/h w ciągu 2 minut? Jakiej mocy musi być silnik lokomotywy, żeby tak przyspieszyć pociąg? Tarcie pomijamy.

49

Oscylator harmoniczny, wahadła matematyczne i fizyczne



50

Oscylator harmoniczny, wahadło matematyczne i fizyczne

Prawo Hooka:

$$F = -kx$$

Częstość kątowna:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Relacja częstotliwość-okres oraz częstość kątowna:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Równanie ruchu oscylatora:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Energia potencjalna oscylatora:

$$E_p = \frac{kx^2}{2}$$

Energia kinetyczna oscylatora:

$$E_k = \frac{kA^2 \sin^2(\omega t + \phi)}{2}$$

Okres wahadła matematycznego:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Okres wahadła fizycznego:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$$

Oscylator harmoniczny, wahadło matematyczne i fizyczne

Zadania 1.

Napisać równanie ruchu oscylatora harmonicznego o amplitudzie drgań równej 5cm i okresie $T=0,2s$. Jakie będzie wychylenie oscylatora w czasach 0,02s, 0,5s, 3s?

Oscylator harmoniczny, wahadło matematyczne i fizyczne

Rozwiązanie zadania 1.

Dane: $A=5\text{cm}$, $T=0,2\text{s}$

Równanie ruchu oscylatora ma postać

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Wyznamy częstość kątową z okresu drgań

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 10\pi \text{ 1/s}$$

Zatem równanie ruchu ma postać

$$x(t) = 0,05 \cos(10\pi t)$$

53

Oscylator harmoniczny, wahadło matematyczne i fizyczne

Rozwiązanie zadania 1.

Dla kolejnych chwil czasu oscylator będzie miał następujące położenia

$$x(0,02s) = 0,05 \cos(10\pi \cdot 0,02) \approx 0,0405m = 4,05cm$$

$$x(0,5s) = 0,05 \cos(10\pi \cdot 0,5) = -0,05m = -5cm$$

$$x(3s) = 0,05 \cos(10\pi \cdot 3) = 0,05m = 5cm$$

Oscylator harmoniczny, wahadło matematyczne i fizyczne

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Napisać równania na prędkość i przyspieszenie w ruchu oscylatora harmonicznego, dla którego amplituda drgań wynosi 0,5cm, a okres tych drgań wynosi 0,01s. Obliczyć prędkość i przyspieszenie z jakimi porusza się oscylator w czasach: 1s, 3s, 12,5s.

Oscylator harmoniczny, wahadło matematyczne i fizyczne

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Wahadło matematyczne o długości 24,9cm wykonuje 120 całkowitych okresów wahań w czasie 2 minut. Obliczyć wartość przyspieszenia ziemskiego dla miejsca, w którym znajduje się to wahadło.

Oscylator harmoniczny, wahadło matematyczne i fizyczne

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Wyznaczyć okres wahań koła rowerowego (względem osi koła), którego obręcz o promieniu $r = 40\text{cm}$ ma masę $2,5\text{kg}$, a w jednym z punktów obręczy znajduje się wentyl o masie 40g . Zaniedbujemy obecność szprych w tym kole.

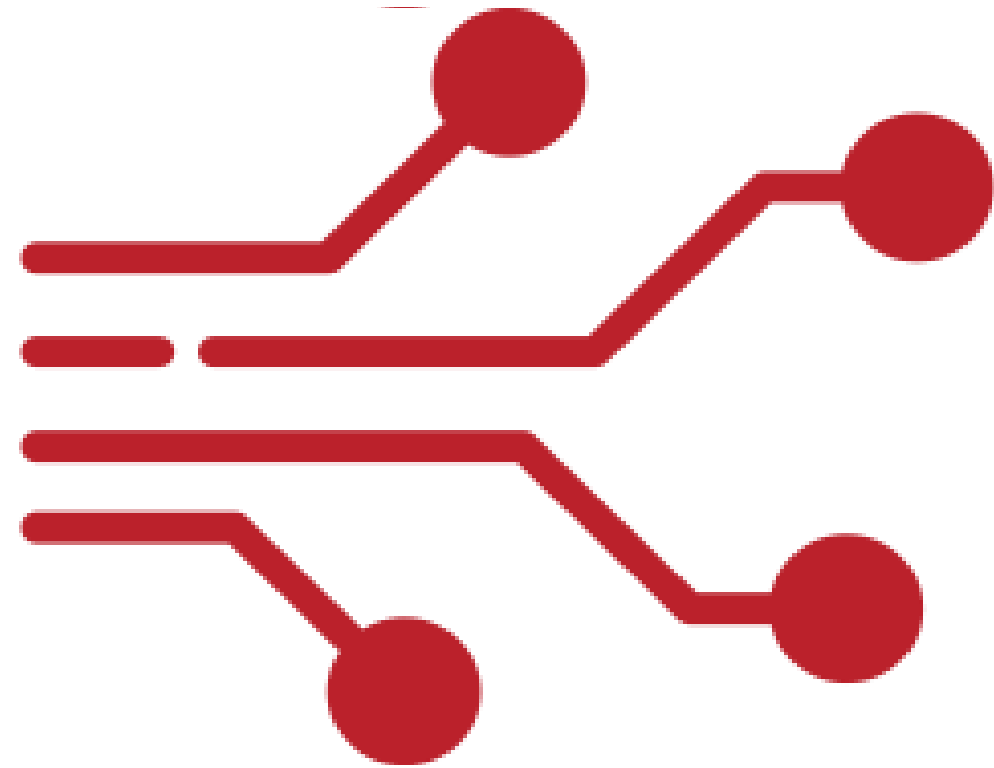
57

Oscylator harmoniczny, wahadło matematyczne i fizyczne

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Znaleźć współczynnik sprężystości oscylatora harmonicznego w postaci zawieszonego na sprężynie ciężarka o masie $m=150\text{g}$, wykonującego drgania o okresie $T=0,5\text{s}$. Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie maksymalne oraz energię całkowitą oscylatora.

Hydrostatyka i termodynamika



59

Hydrostatyka i termodynamika

Prawo Pascala:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

Prawo Archimedesesa:

$$F_w = \rho g V$$

Wzór barometryczny:

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}}$$

Równanie stanu gazu doskonałego:

$$\frac{pV}{T} = \text{const}$$

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

I zasada termodynamiki:

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W$$

Ciepło właściwe:

$$c = \frac{\Delta Q}{m \Delta T}$$

Sprawność silnika Carnota:

$$\eta = \frac{W}{\Delta Q_1} = \frac{\Delta Q_1 - \Delta Q_2}{\Delta Q_1}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

60

Hydrostatyka i termodynamika

Zadanie 1

Jaką siłę nośną ma 1 m^3 wodoru na powierzchni ziemi, gęstość wodoru $0,08988 \text{ kg/m}^3$, a gęstość powietrza $1,293 \text{ kg/m}^3$ dla warunków normalnych.

61

Hydrostatyka i termodynamika

Rozwiązanie zadania 1.

Dane: $\rho_{H_2} = 0,08988 \frac{kg}{m^3}$, $\rho_{pow} = 1,293 \frac{kg}{m^3}$

Szukane: F_{wyp} , G_{H_2} , F

W celu obliczenia siły nośnej balonu wypełnionego wodorem należy obliczyć siłę wyporu z prawa Archimidesa oraz ciężar wodoru. Różnica tych sił da nam wartość siły nośnej. Z prawa Archimidesa mamy:

$$F_{wyp} = \rho_{pow} V g$$
$$F_{wyp} = 1,293 \frac{kg}{m^3} \cdot 1m^3 \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} = 12,68N$$

Ciężar $1m^3$ wodoru

$$G_{H_2} = \rho_{H_2} V g$$
$$G_{H_2} = 0,08988 \frac{kg}{m^3} \cdot 1m^3 \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} = 0,88N$$

Zatem siłą nośna jest równa różnicy siły wyporu oraz ciężaru własnego wodoru:

$$F = F_{wyp} - G_{H_2} = 12,68N - 0,88N = 11,80N$$

62

Hydrostatyka i termodynamika

Zadanie 2

Tłok małej komory prasy hydraulicznej ma pole powierzchni $A_1=5,0\text{cm}^2$, a tłok dużej komory $A_2=200\text{cm}^2$. Na mniejszy tłok działa siła $F_1=150\text{N}$. Oblicz ciśnienie w cieczy, siłę działającą na większy tłok, stosunek uzyskanej siły do siły przyłożonej. Przyjmij, że ciecz jest nieściśliwa i prasa działa idealnie zgodnie z prawem Pascala.

63

Hydrostatyka i termodynamika

Rozwiązanie zadania 2.

Dane: $F_1 = 150N$, $A_1 = 5cm^2$, $A_2 = 200cm^2$

Szukane: p , F_2 , $\frac{F_2}{F_1}$

Zamieńmy jednostki powierzchni na metry kwadratowe:

$$A_1 = 5cm^2 = 0,0005m^2$$

$$A_2 = 200cm^2 = 0,02m^2$$

Ciśnienie w cieczy wynosi:

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{150N}{0,0005m^2} = 3 \times 10^5 Pa = 300kPa$$

Siła na większym tłoku wynosi:

$$F_2 = p \cdot A_2 = 3 \times 10^5 Pa \cdot 0,02m^2 = 6000N$$

Stosunek siły na dużym tłoku do siły przyłożonej do małego tłoku wynosi:

$$\frac{F_2}{F_1} = 6000N/150N = 40$$

64

Hydrostatyka i termodynamika

Zadanie 3

Kowal rozgrzał podkowę z żelaza do temperatury 700 st. C. Natychmiast zanurzył ją w wiadrze zawierającym 5 kg wody o temperaturze 20 st. C. Oblicz temperaturę równowagi termicznej podkowy i wody oraz jaka ilość energii na sposób ciepła przepłynęła z podkowy do wody. Ciepło właściwe żelaza wynosi $450 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$, ciepło właściwe wody to $4186 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$, masa podkowy wynosi 0,75 kg.

65

Hydrostatyka i termodynamika

Rozwiązanie zadania 3.

Dane: $m_{Fe} = 0,75kg$, $m_w = 5kg$, $T_{Fe,0} = 700^{\circ}C$, $T_{w,0} = 20^{\circ}C$, $c_{Fe} = 450J/(kg \cdot K)$,
 $c_w = 4186J/(kg \cdot K)$

Szukana: T_k

W celu wyznaczenia temperatury końcowej układu należy zapisać bilans energetyczny dla przepływu energii na sposób ciepła od podkowy do wody w postaci:

$$m_{Fe}c_{Fe}(T_{Fe,0} - T_k) = m_wc_w(T_k - T_{w,0})$$

Wyznaczając z powyższego równania temperaturę końcową otrzymujemy

$$T_k = \frac{m_{Fe}T_{Fe,0} + m_wc_wT_{w,0}}{m_{Fe}c_{Fe} + m_wc_w}$$

66

Hydrostatyka i termodynamika

Rozwiązanie zadania 3.

Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy

$$T_k = 30,8^{\circ}\text{C}$$

Obliczamy ciepło oddane przez podkowę

$$Q = m_{Fe} c_{Fe} (T_{Fe,0} - T_k)$$

Podstawiając do równania wartości masy, ciepła właściwego oraz temperatur początkowej żelaza i końcowej otrzymujemy

$$Q = 225,8 \text{ kJ}$$

67

Hydrostatyka i termodynamika

Zadanie 4

Pompka ręczna ma objętość $V_1 = 40\text{cm}^3$. Koło rowerowe ma objętość $V_{opony} = 2,5\text{l}$. Początkowe ciśnienie w oponie rowerowej wynosi 1bar. Ciśnienie atmosferyczne przyjmij jako $P_{atm} = 1,013 \cdot 10^5\text{Pa}$.

Ile wyniesie ciśnienie końcowe po wykonaniu $N = 40$ pchnięć pompki?

68

Hydrostatyka i termodynamika

Rozwiązanie zadania 4.

Dane: $V_1 = 40\text{cm}^3$, $V_{opony} = 2,5\text{l}$, $P_{atm} = 1,013 \cdot 10^5\text{Pa}$, $N = 40$

Szukane: P_k

Przeliczmy jednostki objętości i ciśnienia:

$$V_1 = 40\text{cm}^3 = 40 \cdot 10^{-6}\text{m}^3 = 4 \cdot 10^{-5}\text{m}^3$$

$$V_2 = 2,5\text{l} = 2,5 \cdot 10^{-3}\text{m}^3 = 2,5 \cdot 10^{-3}\text{m}^3$$

$$P_0 = 1\text{bar} = 1 \cdot 10^5\text{Pa}$$

Przy pojedynczym pchnięciu pompki do opony trafia masa powietrza odpowiadająca objętości V_1 przy ciśnieniu atmosferycznym. Dla procesu izotermicznego ilość moli powietrza jest proporcjonalna do iloczynu ciśnienia i objętości. Stąd mamy

$$PV_2 = NP_{atm}V_1$$

$$P = N \frac{P_{atm}V_1}{V_{opony}}$$

69

Hydrostatyka i termodynamika

Rozwiązanie zadania 4.

Po podzieleniu stronami przez objętość opony otrzymujemy

$$P = N \frac{P_{atm} V_1}{V_{opony}}$$

Zatem po podstawieniu wartości liczbowych do powyższego równania mierzone ciśnienie w oponie po napompowaniu wynosi

$$P = 1,648 \cdot 10^5 Pa = 1,648 bar$$

70

Hydrostatyka i termodynamika

Zadanie 5

Jednomolowy gaz doskonały znajduje się w cylindrze z tłokiem. Początkowe parametry gazu to $P_1 = 1 \text{ atm}$, $V_1 = 10 \text{ l}$, $T_1 = 300 \text{ K}$. Gaz przechodzi kolejno następujące dwie przemiany: izotermiczne rozprężenie do objętości $V_2 = 20 \text{ l}$, adiabatyczne sprężenie z objętości V_2 do $V_3 = 10 \text{ l}$ przy wykładniku adiabaty $\gamma = 1,4$. Oblicz pracę wykonaną przez gaz w przemianie izotermicznej, oblicz pracę wykonaną przez gaz w przemianie adiabatycznej. Wyznacz łączną pracę wykonaną przez gaz oraz ciśnienie końcowe gazu po sprężeniu adiabatycznym.

71

Hydrostatyka i termodynamika

Rozwiązanie zadania 5.

Dane: $P_1 = 1 \text{ atm}$, $V_1 = 10 \text{ l}$, $T_1 = 300 \text{ K}$, $V_2 = 20 \text{ l}$, $V_3 = 10 \text{ L}$,
 $\gamma = 1,4$, $R = 8,314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$

Szukane: W_{12} , W_{23} , $W_{\text{całkowite}}$, p_3

W przemianie izotermicznej wykonana praca przez gaz wynosi

$$W = nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

Podstawiając wartości otrzymujemy

$$W_{12} = 1 \text{ mol} \cdot 8,314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K}) \cdot 300 \text{ K} \ln \left(\frac{20 \text{ l}}{10 \text{ l}} \right)$$

$$W_{12} = 1727 \text{ J}$$

72

Hydrostatyka i termodynamika

Rozwiązanie zadania 5.

Praca w przemianie adiabatycznej

$$W_{23} = \frac{P_3 V_3 - P_2 V_2}{1 - \gamma}$$

Aby obliczyć pracę najpierw należy znaleźć ciśnienia P_2 i P_3 .

Dla przemiany izotermicznej wychodząc z prawa gazu doskonałego mamy

$$PV = nRT$$

$$P_2 = \frac{nRT}{V_2} = 1247,10 \text{ hPa}$$

Dla przemiany adiabatycznej mamy

$$P_2 V_2^\gamma = P_3 V_3^\gamma$$

$$P_3 = P_2 \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^\gamma = 3285 \text{ hPa}$$

73

Hydrostatyka i termodynamika

Rozwiązanie zadania 5.

Stąd praca w procesie adiabatycznym wynosi

$$W_{23} = \frac{P_3 V_3 - P_2 V_2}{1 - \gamma} = -1977J$$

Łączna praca wynosi

$$W_{całkowite} = W_{12} + W_{23} = -250J$$

Gaz w na drodze obydwu przemian wykonał łącznie pracę ujemną, czyli w tym procesie energia była dostarczana z zewnątrz.

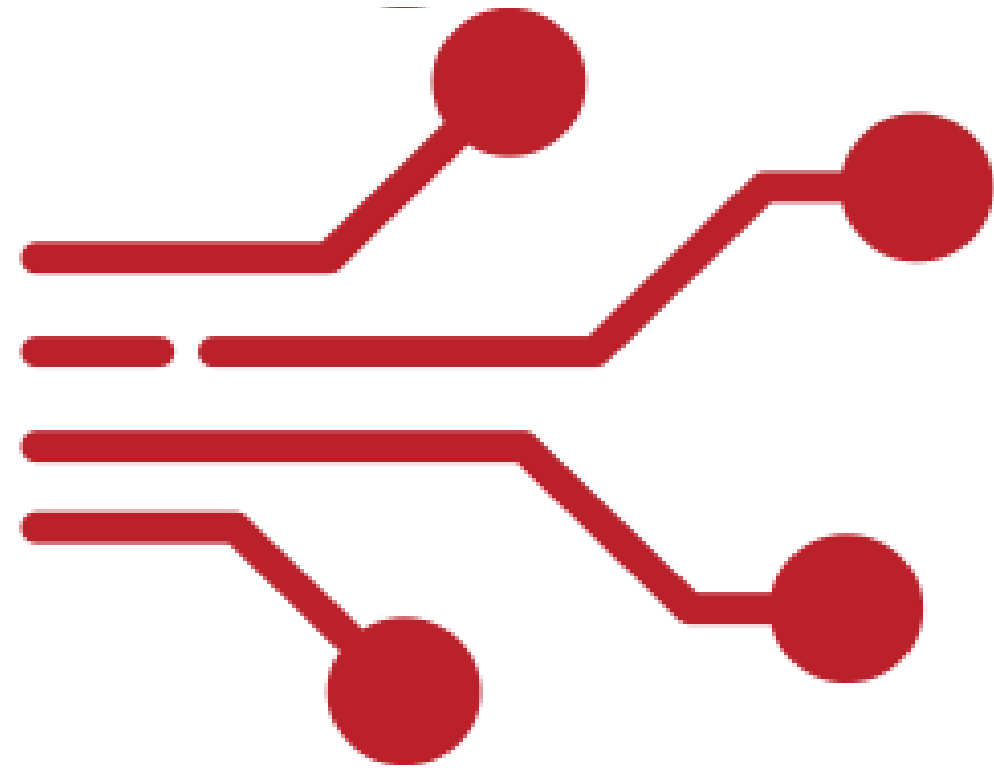
Hydrostatyka i termodynamika

Zadanie do samodzielnego rozwiązania

Balon kulisty o średnicy 5 m napełniony jest wodorem, zaś 1 m² tkaniny powłoki tego balony waży 0,2 kg. Korzystając z danych o gęstościach wodoru i powietrza w warunkach normalnych z zadania 1 wyznacz siłę nośną takiego balonu.

75

Elektrostatyka, elektryczność i magnetyzm



76

Elektrostatyka, elektryczność i magnetyzm

Siła Coulomba:

$$\vec{F} = k \frac{Qq}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Natężenie pola elektrycznego
ładunku punktowego:

$$\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Potencjał pola elektrycznego ładunku
punktowego :

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Pojemność elektryczna:

$$C = \frac{Q}{U}$$

Pojemność kondensatora
płaskiego:

$$C = \epsilon_0 \epsilon \frac{S}{d}$$

Łączenie szeregowe
kondensatorów:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

Łączenie równoległe
kondensatorów:

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

77

Elektrostatyka, elektryczność i magnetyzm

Natężenie prądu elektrycznego:

$$I = \frac{Q}{t}$$

Prawo Ohma:

$$I = \frac{U}{R}$$

Opór przewodnika:

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

Łączenie szeregowo oporników:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

Łączenie równoległe oporników:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

I prawo Kirchhoffa:

$$\sum_i I_i = 0$$

II prawo Kirchhoffa:

$$\sum_i U_i = \sum_k \epsilon_k$$

Praca i moc prądu elektrycznego:

$$W = UIt$$

$$P = UI$$

78

Elektrostatyka, elektryczność i magnetyzm

Siła Lorentza:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Indukcja pola magnetycznego wokół
przewodnika prostoliniowego z prądem:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Indukcja pola magnetycznego w
solenoidzie:

$$B = \mu_0 \frac{NI}{L}$$

Indukcja pola magnetycznego na brzegu
solenoidu:

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{NI}{L}$$

Siła magnetyczna działająca na
przewodnik z prądem:

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$$
$$F = ILB \sin \alpha$$

Elektrostatyka, elektryczność i magnetyzm

Zadania 1

Trzy ładunki punktowe znajdują się na osi x :

$$q_1 = +2\mu C \text{ w punkcie } x = 0,$$

$$q_2 = -3\mu C \text{ w punkcie } x = 2m,$$

$$q_3 = +1\mu C \text{ w punkcie } x = 4m.$$

Oblicz natężenie pola elektrycznego, potencjał elektryczny oraz siłę działającą na ładunek $Q = 2\mu C$ umieszczony w punkcie $x = 1m$. Stała $k = 9 \cdot 10^9 N \cdot m^2 / C^2$.

80

Elektrostatyka, elektryczność i magnetyzm

Rozwiązanie zadania 1.

Dane: $q_1 = +2\mu C$, $q_2 = -3\mu C$, $q_3 = +1\mu C$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2m$,
 $x_3 = 4m$, $x = 1m$
Szukane: E , V , F

Natężenie od pojedynczego ładunku obliczamy ze wzoru

$$E = k \frac{q}{r^2}$$

Zatem należy policzyć natężenia pól elektrycznych od każdego z ładunków, a następnie skorzystać z zasady superpozycji pól i obliczyć ich sumę w badanym punkcie.

Od ładunku q_1 w punkcie $x = 1m$

$$r_1 = 1m, E_1 = 9 \cdot 10^9 N \cdot m^2 / C^2 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6} C}{(1m)^2} = 18000 N/C$$

Od ładunki q_2 w punkcie $x = 1m$

$$r_2 = 1m, E_2 = 9 \cdot 10^9 N \cdot m^2 / C^2 \cdot \frac{-3 \cdot 10^{-6} C}{(1m)^2} = 27000 N/C$$

Od ładunki q_3 w punkcie $x = 1m$

$$r_3 = 3m, E_3 = 9 \cdot 10^9 N \cdot m^2 / C^2 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-6} C}{(3m)^2} = 1000 N/C$$

Wypadkowy wektor natężenia pola elektrycznego jest równy

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = 18000 + 27000 - 1000 = 44000 N/C$$

81

Elektrostatyka, elektryczność i magnetyzm

Rozwiązanie zadania 1.

Potencjał od ładunku punktowego

$$V = k \frac{q}{r}$$

Potencjał od ładunku q_1

$$V_1 = 9 \cdot 10^9 N \cdot m^2/C^2 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6} C}{1m} = 18000V$$

Potencjał od ładunku q_2

$$V_2 = 9 \cdot 10^9 N \cdot m^2/C^2 \cdot \frac{-3 \cdot 10^{-6} C}{1m} = -27000V$$

Potencjał od ładunku q_3

$$V_3 = 9 \cdot 10^9 N \cdot m^2/C^2 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-6} C}{3m} = 3000V$$

Suma:

$$V = 18000 - 27000 + 3000 = -6000V$$

82

Elektrostatyka, elektryczność i magnetyzm

Rozwiązanie zadania 1.

Dla ładunku $Q = 2\mu C$ umieszczonego w punkcie, dla którego wyznaczona została wartość wektora natężenia pola elektrycznego możemy obliczyć siłę z definicji

$$\vec{F} = Q\vec{E}$$

Podstawiając do wzoru mamy

$$F = 2 \cdot 10^{-6} C \cdot 44000 N/C = 0,088 N$$

Elektrostatyka, elektryczność i magnetyzm

Zadania 2

Cewka ma następujące parametry – liczba zwojów $N = 500$, długość $L = 0,5m$, średnica przekroju poprzecznego $d = 4cm$.

Przez cewkę płynie prąd stały o natężeniu $I = 2A$.

Oblicz indukcję pola magnetycznego wewnątrz cewki, strumień pola magnetycznego przez pojedynczy zwój cewki, całkowity strumień pola magnetycznego przez wszystkie zwoje.

84

Elektrostatyka, elektryczność i magnetyzm

Rozwiązanie zadania 2.

Dane: $N = 500$, $L = 0,5m$, $d = 4cm$, $I = 2A$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} N/A^2$

Szukane: B , Φ , $\Phi_{całkowite}$

Indukcja pola magnetycznego wewnątrz długiej cewki obliczamy ze wzoru

$$B = \mu_0 \frac{NI}{L} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{500 \cdot 2}{0,5} = 8\pi \cdot 10^{-4} T$$

$$B = 2,51 mT$$

85

Elektrostatyka, elektryczność i magnetyzm

Rozwiązanie zadania 2.

Strumień magnetyczny przez pojedynczy zwoj obliczamy ze wzoru

$$\Phi = B \cdot S = B \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 0,00251T \cdot 1,256 \cdot 10^{-3}m^2 = 3,15\mu Wb$$

Całkowity strumień dla tej cewki wynosi

$$\Phi_{całkowite} = n \cdot \Phi = 500 \cdot 3,15\mu Wb = 1,58mWb$$

86

Elektrostatyka, elektryczność i magnetyzm

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Jaki opór elektryczny będzie miał drut miedziany o oporze właściwym

$\rho = 1,692 \times 10^{-2} \Omega \cdot mm^2 / m$ o średnicy 1,5mm i długości 100m?

Elektrostatyka, elektryczność i magnetyzm

Zadania do samodzielnego rozwiązania

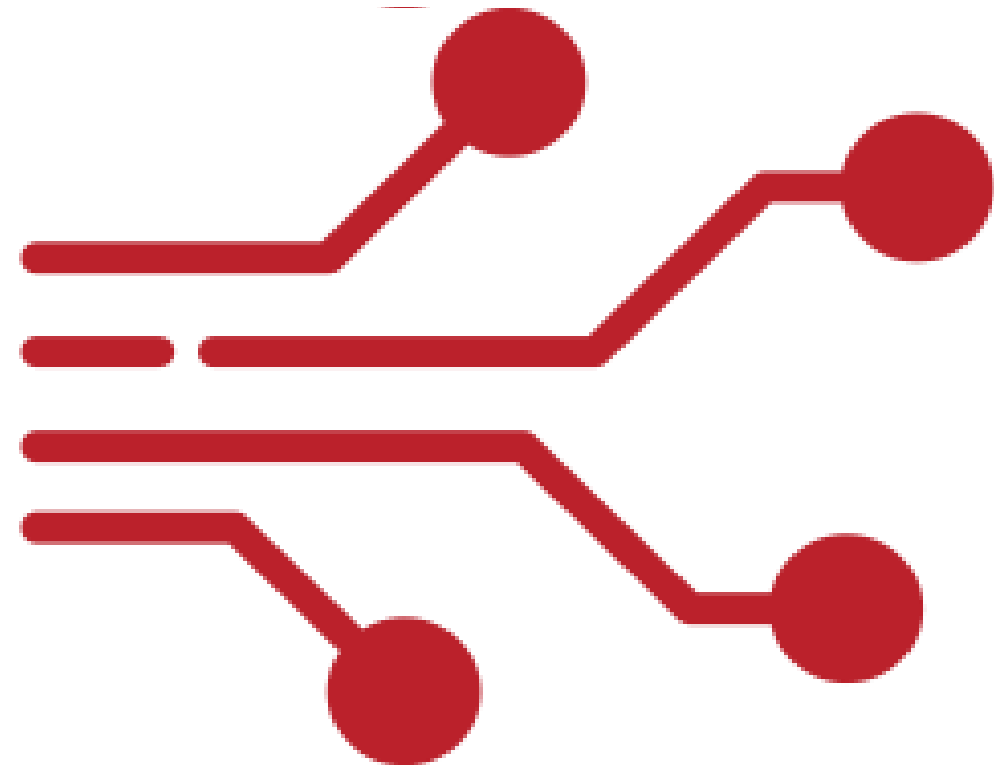
Jeden z oporów w obwodzie elektrycznym wynosi $10,07 \Omega$. Jak i jaki opór należy do niego podłączyć, aby uzyskać równo 10Ω ?

Elektrostatyka, elektryczność i magnetyzm

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Domowa instalacja elektryczna pobiera średnio 2,5A prądu w ciągu 8 godzin przy napięciu 230V. Jaka jest pobierana moc i ile zużywanej jest energii dziennie?

Optyka geometryczna i falowa



90

Optyka geometryczna i falowa

Prawo odbicia

$$\alpha = \beta$$

Prawo załamania światła:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$$

Współczynnik załamania światła w ośrodku:

$$n = \frac{c}{v}$$

Wzór soczewki cienkiej:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n}{n'} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Wzór siatki dyfrakcyjnej:

$$d \sin \theta = m \lambda$$

Odległość między prążkami dla siatki dyfrakcyjnej:

$$y = \frac{\lambda D}{d}$$

Optyka geometryczna i falowa

Zadania 1

Monochromatyczne źródło ma dwie bardzo bliskie linie spektralne (podwójna linia sodu):

$\lambda_1 = 589,0nm$ i $\lambda_2 = 589,6nm$. Światło pada prostopadle na płaską siatkę dyfrakcyjną o gęstości 600 linii/mm. Ekran obserwacyjny znajduje się w odległości $L=1,00m$ od siatki.

Wyznacz:

1. Stałą siatki dyfrakcyjnej, policz kąty θ dla prążków interferencyjnych pierwszego i drugiego rzędu dla obu długości fal.
2. Oblicz jaka jest separacja kątowa między tymi dwiema liniami widmowymi dla prążków pierwszego rzędu.
3. Oblicz ile wynosi separacja liniowa pomiędzy tymi prążkami na ekranie.

Optyka geometryczna i falowa

Rozwiązanie zadania 1.

Dane: $\lambda_1 = 589,0nm$, $\lambda_2 = 589,6nm$, $k = 600 \text{ linii/mm}$

Szukane: θ , d , $\Delta\theta$, Δx

Obliczmy stałą siatki dyfrakcyjnej czyli odległość pomiędzy szczelinami siatki

$$d = 1/600 = 1,665 \times 10^{-3}mm = 1,665 \times 10^{-6}m$$

Równanie siatki dyfrakcyjnej ma postać

$$d \sin \theta = m\lambda$$

Stąd możemy policzyć kąt dla prążka m-tego rzędu

$$\theta = \arcsin\left(\frac{m\lambda}{d}\right)$$

93

Optyka geometryczna i falowa

Rozwiązanie zadania 1.

Stąd podstawiając do wzorów wartości liczbowe mamy
dla $m = 1$:

$$\sin \theta_1^{(1)} = 0,3549 \text{ i } \sin \theta_2^{(1)} = 0,3560$$

Dla $m = 2$:

$$\sin \theta_1^{(2)} = 0,7098 \text{ i } \sin \theta_2^{(2)} = 0,7120$$

Co odpowiada kątom dla $m=1$

$$\theta_1^{(1)} = 20,695^\circ \text{ i } \theta_2^{(1)} = 20,717^\circ$$

Dla $m = 2$:

$$\theta_1^{(2)} = 44,975^\circ \text{ i } \theta_2^{(2)} = 45,033^\circ$$

94

Optyka geometryczna i falowa

Rozwiązanie zadania 1.

Separacja kątowa prążków dla prążków pierwszego rzędu mamy

$$\Delta\theta = \theta_2^{(1)} - \theta_1^{(1)} = 0,022^\circ$$

$$\Delta\theta = 0,022^\circ \frac{\pi}{180^\circ} = 3,847 \times 10^{-4} rad$$

Dla małych kątów możemy separację liniową prążków wyznaczyć z definicji miary łukowej kąta

$$\Delta x = L\Delta\theta$$

Zatem mamy dla prążków pierwszego rzędu

$$\Delta x = 1m \cdot 3,847 \times 10^{-4} = 0,385mm$$

95

Optyka geometryczna i falowa

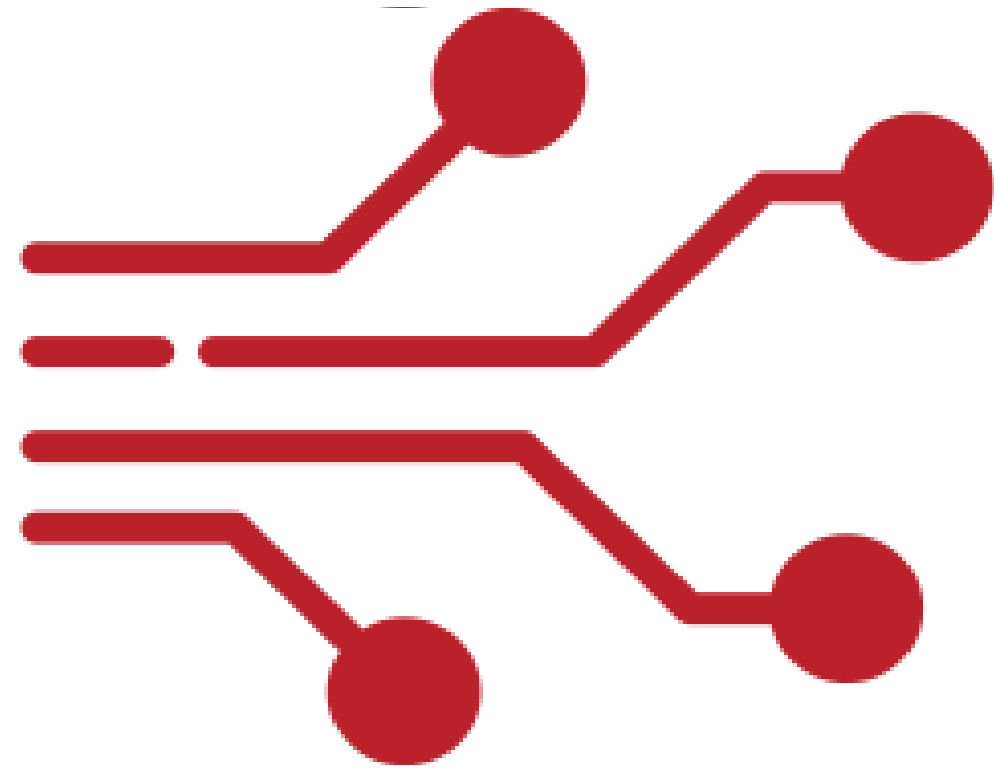
Zadanie do samodzielnego rozwiązania

Wyznacz ogniskową cienkiej soczewki skupiającej, dla której przedmiot ustawiono w odległości $x=0,30\text{m}$, a ostry obraz przedmiotu powstał na ekranie w odległości $y=0,60\text{m}$ od soczewki.

Wyznacz ogniskową cienkiej soczewki skupiającej, dla której przedmiot ustawiono w odległości $x=0,35\text{m}$, a ostry obraz przedmiotu nie dawał się uzyskać w żadnym położeniu ekranu.

96

Fizyka współczesna



Fizyka współczesna

Prawo przesunięć Wiena:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}$$

Prawo Stefana-Boltzmann'a:

$$\Phi = \sigma T^4$$

Zasada zachowania energii dla efektu fotoelektrycznego:

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - W$$

Zasada zachowanie energii dla układu pomiarowego pracy wyjścia elektronu:

$$eU = h\nu - W$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Zmiana długości fali w efekcie

Comptona:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

Długość fali materii de Broglie'a:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Skwantowany moment pędu w modelu atomu Bohra:

$$J = mvr = n \frac{h}{2\pi}$$

98

Fizyka współczesna

Promień n-tej orbity w modelu atomu wodoru Bohra:

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} n^2$$

Energia elektronu na n-tym poziomie w modelu atomu wodoru Bohra:

$$E_n = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2}$$

Energia kwantu promieniowania emitowanego/absorbowanego przez elektron przy przejściu między orbitami w atomie wodoru Bohra

$$h\nu = E_n - E_m$$
$$h\nu = 13,6eV \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

Energia wiązania jądra atomowego:

$$E_w = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_j]c^2$$

Fizyka współczesna

Prawo zaniku
promieniotwórczego:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Okres połowicznego zaniku:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}$$

Średni czas życia jądra
atomowego:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

Związek między czasem
połowicznego zaniku i średnim
czasem życia jąder atomowych:

$$T_{1/2} = \tau \ln 2$$

Aktywność promieniotwórcza:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

Fizyka współczesna

Zadanie 1

Gwiazda jest modelowana jako ciało doskonale czarne. Temperatura powierzchni gwiazdy wynosi $T=5800K$. Oblicz moc promieniowania na jednostkę powierzchni gwiazdy korzystając ze wzoru Stefana-Boltzmann, wyznacz długość fali, przy której emisja promieniowania jest największa, korzystając z prawa przesunięć Wiena. Załóż, że gwiazda jest kulą o promieniu $R = 7 \cdot 10^8 m$. Oblicz całkowitą moc promieniowania emitowaną przez gwiazdę.

Stała Stefana-Boltzmann $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} W / (m^2 \cdot K^4)$

Stała z prawa przesunięć Wiena $b = 2,898 \cdot 10^{-3} m \cdot K$

101

Fizyka współczesna

Rozwiązanie zadanie 1.

Dane: $T = 5800K$, $R = 7 \cdot 10^8 m$

Szukane: j , λ_{max}

Z prawa Stefana-Boltzmannna

$$j = \sigma T^4$$

Wypromieniowywana moc na jednostkę powierzchni gwiazdy wynosi

$$j = 5,67 \cdot 10^{-8} W / (m^2 K^4) \cdot (5800K)^4 = 6,42 \cdot 10^7 \frac{W}{m^2}$$

102

Fizyka współczesna

Rozwiązanie zadanie 1.

Długość fali dla maksimum promieniowania obliczamy z prawa przesunięć Wiena

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}$$

Podstawiając do równania mamy

$$\lambda_{max} = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{5800} m = 4,99 \cdot 10^{-7} m$$
$$\lambda_{max} = 499 nm$$

103

Fizyka współczesna

Zadanie 2

Atom wodoru przechodzi z poziomu energetycznego $n=3$ na poziom $n=1$, emitując foton. Oblicz długość fali emitowanego fotonu λ w nanometrach, promień orbity elektronu dla poziomu $n=3$.

104

Fizyka współczesna

Rozwiązanie zadanie 2.

Do obliczeń będziemy potrzebowali wartości następujących stałych fizycznych:

Stała Plancka - $h = 6,62 \times 10^{-34} J \cdot s$

Prędkość światła - $c = 2,998 \times 10^8 m/s$

Promień atomu Bohra - $a_0 = 5,292 \times 10^{-11} m$

Energia emitowanego fotonu wynosi

$$\Delta E = |E_1 - E_3| = 13,6eV \left| \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_3^2} \right|$$
$$\Delta E = 13,6eV - 1,51eV = 12,08eV$$

Energia w dżulach wynosi

$$\Delta E = 12,08eV \cdot 1,602 \times 10^{-19} J/eV = 1,936 \times 10^{-18} J$$

105

Fizyka współczesna

Rozwiązanie zadanie 2.

Długość fali liczymy ze wzoru:

$$\Delta E = h \frac{c}{\lambda}$$
$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = 1,025 \times 10^{-7} m = 102,5 nm$$

Promień orbity elektronu dla $n=3$ obliczamy ze wzoru Bohra

$$r_n = n^2 a_0$$
$$r_3 = 3^2 \cdot 5,292 \times 10^{-11} m = 4,76 \times 10^{-10} m$$

106

Fizyka współczesna

Zadanie do samodzielnego rozwiązania

Słońce emituje energię jako ciało doskonale czarne o temperaturze $T=5778\text{K}$. Promień Słońca wynosi $R = 6,96 \cdot 10^8\text{m}$. Oblicz całkowitą moc promieniowania Słońca. Wyznacz stałą słoneczną dla Ziemi i dla Marsa, przyjmując, że promieniowanie rozchodzi się równomiernie w przestrzeni i że odległości planet od Słońca wynoszą

$r_Z = 1,496 \cdot 10^{11}\text{m}$, $r_M = 2,279 \cdot 10^{11}\text{m}$. Stała słoneczna definiowana jest jako strumień energii docierający do powierzchni jednostkowej prostopadłej do promieniowania:

$$S = \frac{P}{4\pi r^2}$$

107

Porównaj wartości stałej słonecznej dla Ziemi i Marsa.

Fizyka współczesna

Zadanie do samodzielnego rozwiązania

Powołując się na wyniki i wzory użyte w zadaniu 2, oblicz te same wielkości dla jonu helu He^+ (ładunek jądra atomowego $Z=2$), zakładając model atomu Bohra i te same stałe co w poprzednim zadaniu.

108

Fizyka współczesna

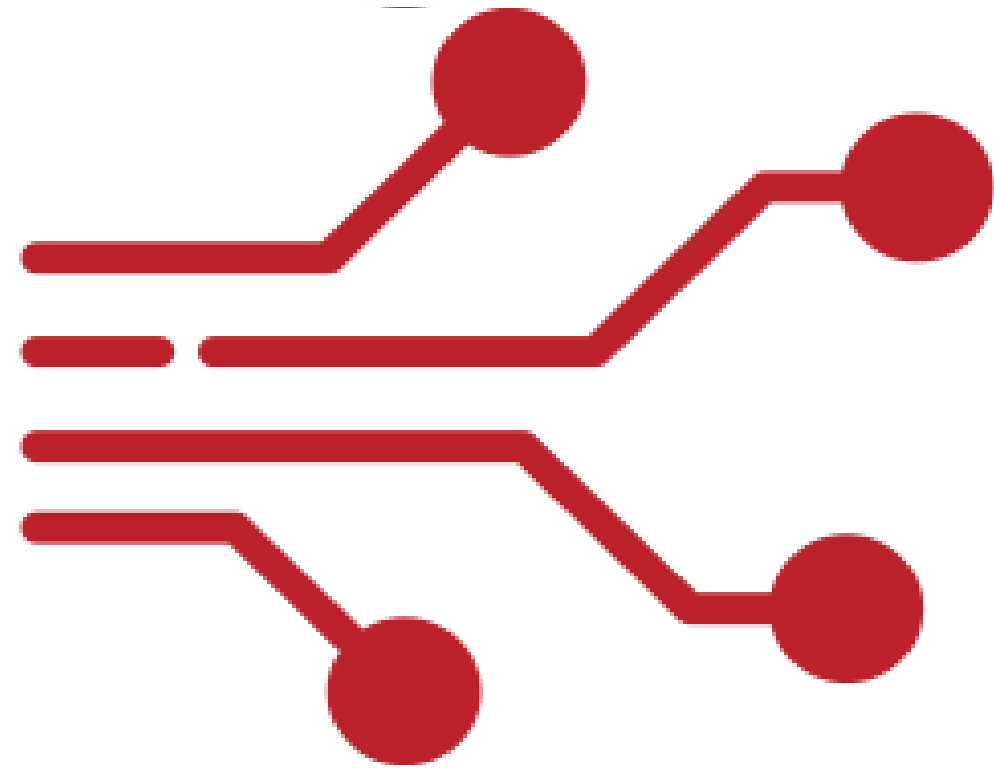
Zadanie do samodzielnego rozwiązania

W próżni wystrzelono elektron o energii kinetycznej $E_k = 150\text{eV}$. Elektron następnie trafia na szczelinę podwójną, której rozstaw wynosi $d = 1,0 \times 10^{-6}\text{m}$. Załóż, że elektron porusza się nierelatywistycznie. Oblicz prędkość elektronu, korzystając ze wzoru de Broglie'a oblicz długość fali elektronu λ , oszacuj kąt położenia pierwszego maksimum interferencyjnego na ekranie korzystając z przybliżenia małych kątów:

$$\sin \theta \approx \theta = \frac{\lambda}{d}$$

109

Mechanika kwantowa



110

Elementy mechaniki kwantowej

Energia n-tego poziomu energetycznego dla cząstki w nieskończonej studni potencjału:

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}$$

Energia n-tego poziomu energetycznego dla kwantowego oscylatora harmonicznego:

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

Zasada nieoznaczoności dla położenia i pędu cząstki:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Zasada nieoznaczoności dla energii i czasu:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Mechanika kwantowa

Zadanie 1

Cząstka znajduje się w jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału o szerokości L :

$$V(x) = 0, \text{ dla } 0 < x < L$$

$$V(x) = \infty, \text{ dla pozostałych } x$$

Znane są znormalizowane funkcje falowe dwóch pierwszych stanów:

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

Wykazać ortogonalność obydwu stanów.

Mechanika kwantowa

Rozwiązanie zadania 1.

Warunkiem ortogonalności stanów kwantowych jest by poniższa całka wynosiła zero:

$$\int_0^L \psi_n(x) \psi_m(x) dx = 0 \quad \text{dla } n \neq m$$

Zatem dla naszego zadania obliczamy całkę

$$\int_0^L \psi_1 \psi_2 dx = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx$$

W celu obliczenia powyższej całki musimy skorzystać z tożsamości trygonometrycznej:

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} (\cos(A - B) - \cos(A + B))$$
$$\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) = \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \right)$$

113

Mechanika kwantowa

Rozwiązanie zadania 1.

Zatem mamy

$$\int_0^L \psi_1 \psi_2 dx = \frac{1}{L} \left[\int_0^L \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx - \int_0^L \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right) dx \right]$$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \Big|_0^L = \frac{L}{\pi} (\sin(\pi) - \sin(0)) = 0$$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{3\pi} \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \Big|_0^L = \frac{L}{3\pi} (\sin(3\pi) - \sin(0)) = 0$$

Obydwie całki dają wynik 0, a zatem całka jest równa zero, co pokazuje, że obydwa stany kwantowe są ortogonalne.

114

Mechanika kwantowa

Zadanie 2

Elektron znajduje się w wąskim obszarze, dla którego można przypisać niepewność położenia $\Delta x = 5,0 \times 10^{-11} m$ (rząd rozmiaru atomu). Wyznacz minimalną niepewność pędu wynikającą z zasady nieoznaczoności Heisenberga. Na jej podstawie oszacuj minimalną niepewność prędkości elektronu. Masa elektronu $m_e = 9,1 \times 10^{-31} kg$, $\hbar = 1,602 \times 10^{-34} J \cdot s$.

115

Mechanika kwantowa

Rozwiązanie zadania 2.

Dane: $\Delta x = 5,0 \times 10^{-11} m$, $m_e = 9,1 \times 10^{-31} kg$, $\hbar = 1,602 \times 10^{19} J$

Szukane: Δp , Δv

Wychodząc z zasady nieoznaczoności obliczymy niepewność pędu

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Stąd dla granicznego przypadku (minimum) mamy

$$\Delta p = \frac{\hbar}{2\Delta x}$$

Mechanika kwantowa

Rozwiązanie zadania 2.

Podstawiając wartości otrzymujemy

$$\Delta p = 1,05 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Niepewność prędkości obliczamy z klasycznej definicji pędu

$$\Delta p = m_e \Delta v$$

Stąd

$$\Delta v = \frac{\Delta p}{m_e} = 1,16 \times 10^6 \text{ m/s}$$

117

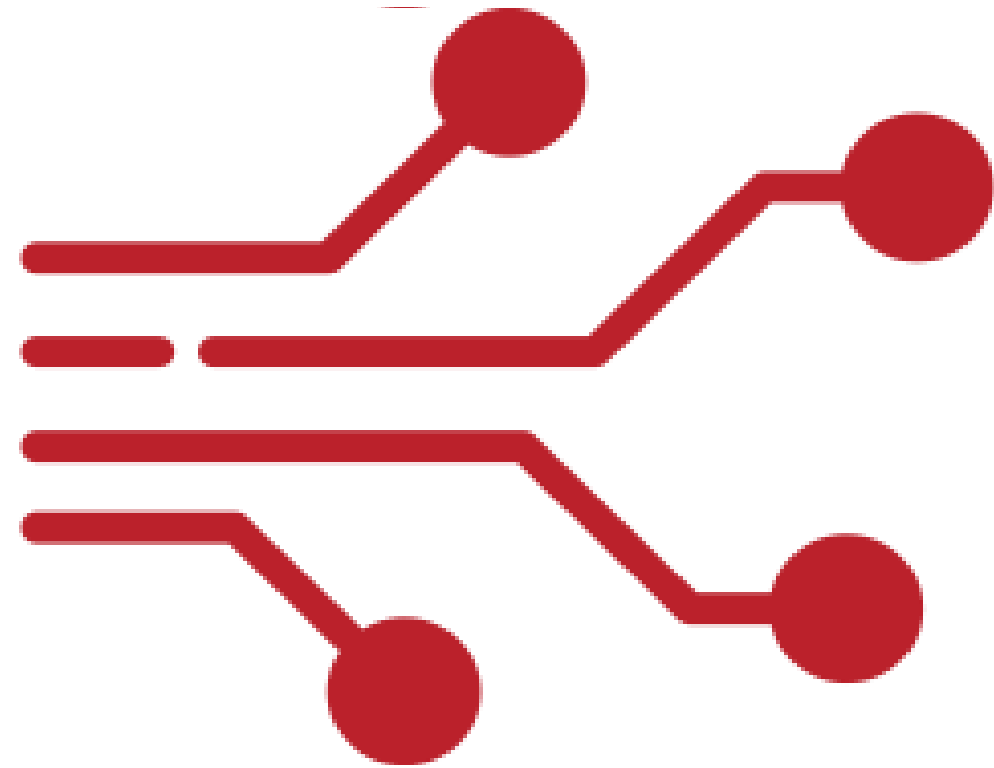
Mechanika kwantowa

Zadanie do samodzielnego rozwiązania

Wyznacz energię przejścia cząstki umieszczonej w nieskończonym pudle potencjału pomiędzy 4 i 2 poziomem energetycznym. Na podstawie wartości tej energii oblicz częstotliwość i długość fali emitowanego fotonu. Masa cząstki wynosi $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, szerokość studni $L = 7,5 \times 10^{-11} \text{ m}$.

118

Analiza eksperymentów fizycznych na podstawie danych pomiarowych



119

Analiza eksperymentów fizycznych na podstawie danych pomiarowych

Niepewność absolutna pomiaru Δx :

$$x_{\text{prawdziwe}} = x_{\text{pomiar}} \pm \Delta x$$

Niepewność względna (ϵ):

$$\epsilon = \frac{\Delta x}{x} 100\%$$

Odchylenie standardowe od wartości
średniej:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Błąd wartości średniej z pomiarów:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Błąd wartości wyznaczonej na
podstawie metody różniczkowej:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2}$$

Błąd absolutny wyznaczany metodą
różniczkową

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \Delta x_1 + \dots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \Delta x_n$$

120

Analiza eksperymentów fizycznych

Zadanie 1

W obwodzie pomiarowym zmierzono napięcie i prąd płynący przez opornik. Wyniki pomiarów są następujące: $U = 12,00V$, $I = 0,2A$. Niepewności pomiarowe dla mierników napięcia i natężenia prądu wynoszą odpowiednio $\Delta U = 0,05V$, $\Delta I = 0,002A$.

Wyznacz wartość oporu R oraz oszacuj niepewność ΔR z pomocą metody różniczkowej.

121

Analiza eksperymentów fizycznych

Rozwiązanie zadanie 1

W celu wyznaczenia wartości oporu elektrycznego opornika należy skorzystać z prawa Ohma

$$R = \frac{U}{I} = \frac{12V}{0,2A} = 60\Omega$$

Błąd absolutny określenia wartości oporu szacujemy metodą różniczkową ze wzoru

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \Delta x_n$$

Zatem musimy obliczyć pochodne cząstkowe dla prawa Ohma liczone po napięciu i natężeniu.

$$\frac{\partial R}{\partial U} = \frac{1}{I}$$
$$\frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{U}{I^2}$$

Analiza eksperymentów fizycznych

Rozwiązanie zadanie 1

Stąd obliczamy błąd absolutny jako

$$\Delta R = \left| \frac{\partial R}{\partial U} \right| \Delta U + \left| \frac{\partial R}{\partial I} \right| \Delta I$$

$$\Delta R = \frac{1}{I} \Delta U + \frac{U}{I^2} \Delta I = \frac{1}{0,2A} \cdot 0,05V + \frac{12V}{(0,2A)^2} \cdot 0,002A$$

$$\Delta R = 0,25\Omega + 0,60\Omega = 0,85\Omega$$

Zatem ostateczny wynik badanego oporu wynosi

$$R = (60,00 \pm 0,85)\Omega$$

123

Analiza eksperymentów fizycznych

Zadanie do samodzielnego rozwiązania

W doświadczeniu z siatką dyfrakcyjną o stałej siatki $d = 1,0 \times 10^{-6}m$, mierzono położenie maksimum pierwszego rzędu na ekranie, aby wyznaczyć długość fali światła laserowego. Wyznaczono następujące wielkości wraz z błędami absolutnymi szacowania tych wielkości:

odległość ekranu od siatki $L = 1m$ i $\Delta L = 0,001m$, odległość maksimum pierwszego rzędu od osi centralnej $x = 0,685m$ i $\Delta x = 0,0005m$, producent siatki gwarantuje jej dokładność rzędu $\Delta d = 5,0 \times 10^{-9}m$. Korzystając z zależności geometrycznych i równania siatki dyfrakcyjnej wyznacz długość fali światła laserowego oraz absolutną i względną niepewność pomiarową metodą różniczkową.

124

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x}{L}$$



$$\lambda = d \sin \theta$$



Analiza eksperymentów fizycznych

Zadanie do samodzielnego rozwiązania

W doświadczeniu ze sprężyną i odważnikami wykonano serię pomiarów zawieszając kolejno coraz większą masę na końcu sprężyny i jednocześnie odnotowując wydłużenie powstałe w wyniku obciążenia. Dla różnych mas otrzymano następujące wyniki:

50g – 1cm, 100g – 2,05cm, 150g - 3,05cm, 200g – 4,00cm.

Oblicz korzystając z prawa Hooke'a wartość stałej sprężystości dla każdego z pomiarów, oblicz średnią wartość współczynnika sprężystości sprężyny oraz oblicz odchylenie standardowe od wartości średniej oraz błąd średniej kwadratowej.

Literatura

- Orear J., Fizyka, tomy 1–2, Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa 2015.
- Halliday D., Resnick R., Walker J., Podstawy fizyki, t. 1,2,3,4 i 5, PWN, Warszawa (wszystkie roczniki).
- Richard P. Feynman, Leighton Robert B., Matthew Sands, Feynmana wykłady z fizyki, t. 1.1, 1.2, 2.1, 2.2, 3, PWN, Warszawa (wszystkie roczniki).
- D.J. Griffiths, D.F. Schroeter. Wstęp do mechaniki kwantowej. 1. wyd. Wyd. Naukowe PWN, 2021.

126

Literatura

- Jędrzejewski J., Kruczek W., Kujawski A., Zbiór zadań z fizyki, tomy 1–2, Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa (wszystkie roczniki)
- Massalski J., Massalska M., Fizyka dla inżynierów 1, fizyka klasyczna, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1980
- Massalski J., Fizyka dla inżynierów 2, fizyka współczesna, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1971
- Jeżewski M., Fizyka, Wydawnictwo PWN 1970.
- Taylor J.R.: Wstęp do analizy błęd pomiarowego. Warszawa: PWN, 1999.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami, nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Dziękuję za uwagę