

FIZYKA

dr Maciej Czarnacki,
Wydział Matematyki i Informatyki Technicznej, PL

Plan prezentacji

- Jednostki miary
- Pomiar i dokładność pomiarowa w fizyce
- Liczby w fizyce, zapis wykładniczy liczb, ustalanie jednostek, analiza wymiarowa
- Krótkie przypomnienie o wektorach,
- Rachunek różniczkowy i całkowy
- Układy współrzędnych
- Kinematyka punktu materialnego
- Dynamika punktu materialnego
- Dynamika bryły sztywnej



Plan prezentacji

- Teoria sprężystości
- Oscylator harmoniczny
- Wahadło matematyczne i fizyczne
- Prawo powszechnego ciążenia
- Równanie falowe
- Hydrostatyka i dynamika płynów
- Termodynamika
- Elektrostatyka, elektryczność i magnetyzm
- Optyka geometryczna i falowa

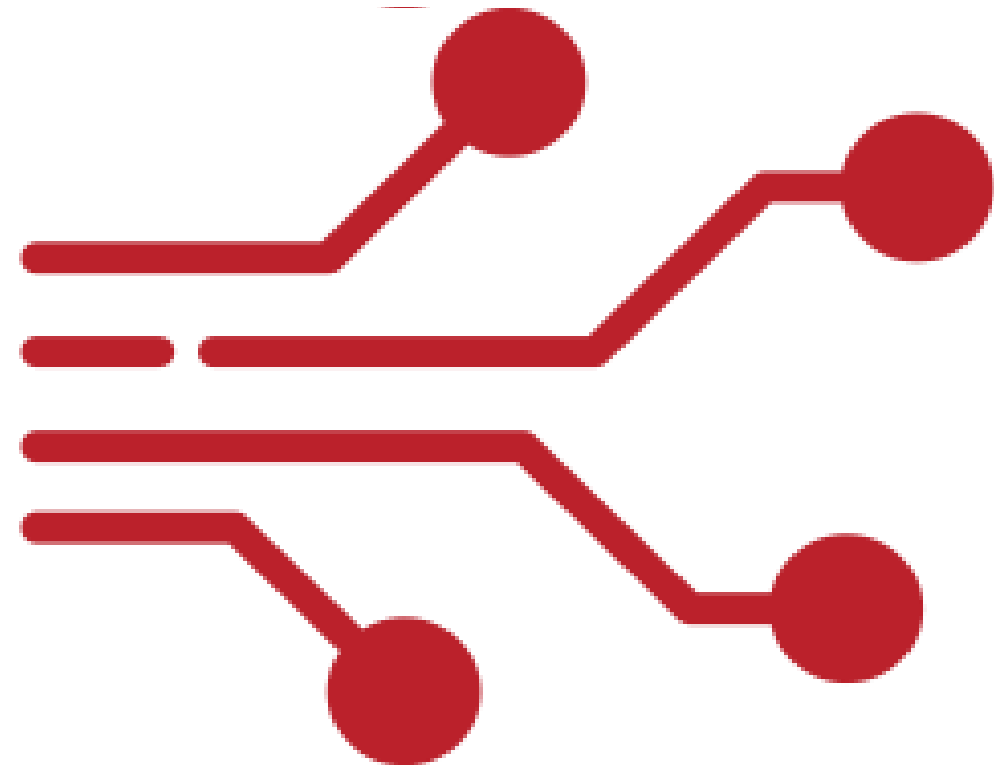


Plan prezentacji

- Fizyka współczesna
- Elementy mechaniki kwantowej
- Rola symulacji komputerowych w fizyce



Jednostki miary



5

Jednostki miary

Historia systemów jednostek miar

Starożytność

- Pierwsze jednostki opierały się na częściach ciała (łokieć, stopa, dłoń, kciuk).
- W Egipcie używano łokcia królewskiego (ok. 52,5 cm) do budowy piramid.
- Babilończycy i Sumerowie posługiwali się układem sześćdziesiątnym, stąd np. 60 minut w godzinie, 360° w kole.
- Grecy i Rzymianie stosowali stopy, mile, uncje, funty – wiele z tych nazw przetrwało w systemie anglosaskim.

6

Jednostki miary

Historia systemów jednostek miar

Średniowiecze

- Jednostki były regionalne i lokalne – każdy kraj, a nawet miasto, mogło mieć własny łokieć czy funt. Utrudniało to handel, dlatego dążono do standaryzacji.

Nowożytność

- W XVII–XVIII w. rozwój nauki i handlu wymagał ujednolicenia miar.
- 1791 r. – Francja zaproponowała stworzenie systemu opartego na prawach natury.
 - Metr = $1/10\,000\,000$ część ćwiartki południka ziemskiego (od równika do bieguna przez Paryż).
 - Kilogram = masa 1 dm^3 wody destylowanej.
- Tak powstał system metryczny, wprowadzony we Francji w 1795 r.

Jednostki miary

Historia systemów jednostek miar

XIX–XX wiek

- System metryczny stopniowo przyjmowały kolejne kraje.
- 1875 r. – podpisano Konwencję Metryczną i powstało Międzynarodowe Biuro Miar i Wag (BIPM) w Sèvres pod Paryżem.
- 1960 r. – przyjęto Międzynarodowy Układ Jednostek SI, który zastąpił wcześniejsze systemy (CGS, MKS).

XXI wiek

- Od 2019 r. wszystkie jednostki SI są definiowane poprzez stałe fizyczne, a nie wzorce materialne.

Układ SI

Układ SI (**Międzynarodowy Układ Jednostek**) składa się z 7 podstawowych jednostek, na których opiera się cały system miar. Każda z nich odpowiada jednej wielkości fizycznej:

metr (m) – jednostka długości

- Definicja: droga, jaką przebywa światło w próżni w czasie 1/299 792 458 sekundy.
- Używana do pomiaru odległości i wymiarów przestrzennych.

kilogram (kg) – jednostka masy

- Definicja: określona przez ustaloną wartość stałej Plancka ($h = 6,62607015 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$).
- Służy do pomiaru ilości materii (masy).

sekunda (s) – jednostka czasu

- Definicja: czas trwania 9 192 631 770 okresów promieniowania odpowiadającego przejściu między dwoma poziomami nadsubtelnymi stanu podstawowego atomu cezu-133.

- Podstawowa jednostka pomiaru czasu.

Układ SI

amper (A) – jednostka natężenia prądu elektrycznego

- Definicja: określona przez ustaloną wartość ładunku elementarnego $e = 1,602176634 \times 10^{-19} \text{ C}$.
- Służy do pomiaru przepływu prądu elektrycznego.

kelwin (K) – jednostka temperatury termodynamicznej

- Definicja: określona przez ustaloną wartość stałej Boltzmanna $k = 1,380649 \times 10^{-23} \text{ J/K}$.
- Używana do pomiaru temperatury w ujęciu absolutnym.

mol (mol) – jednostka ilości substancji

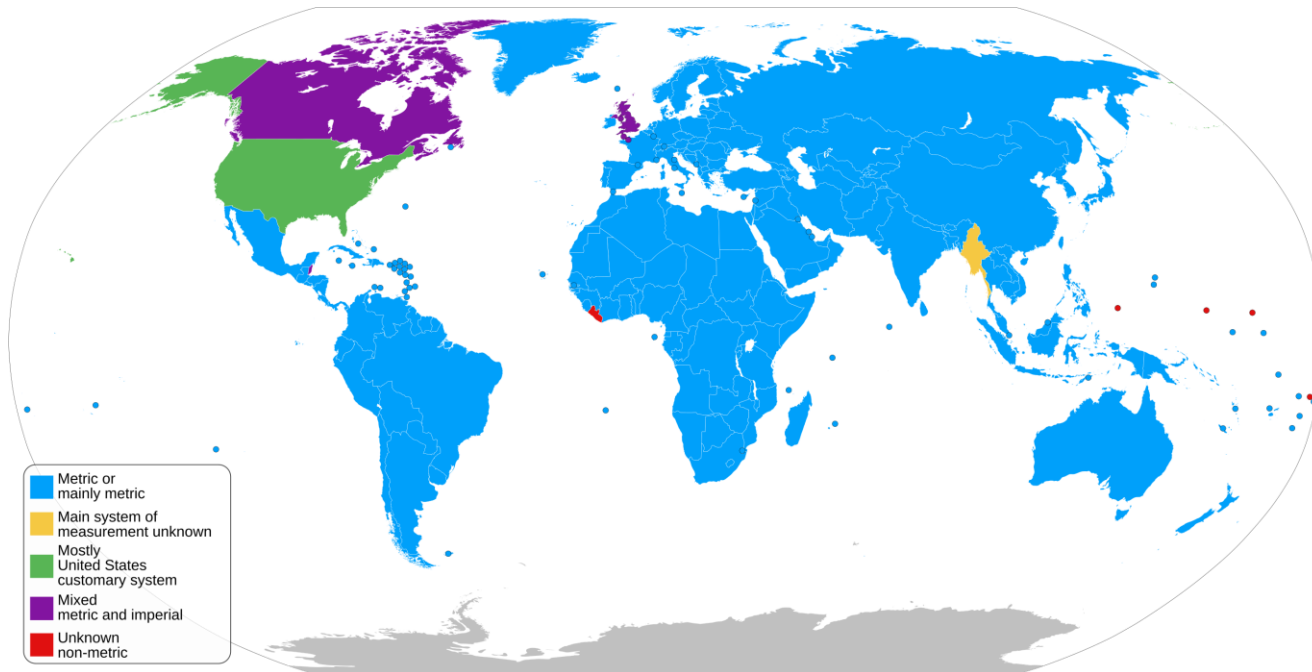
- Definicja: ilość substancji zawierająca dokładnie $6,02214076 \times 10^{23}$ obiektów elementarnych (atomów, cząsteczek, jonów, itp.) – liczba Avogadra.
- Stosowana w chemii i fizyce do opisu ilości cząstek.

kandela (cd) – jednostka światłości

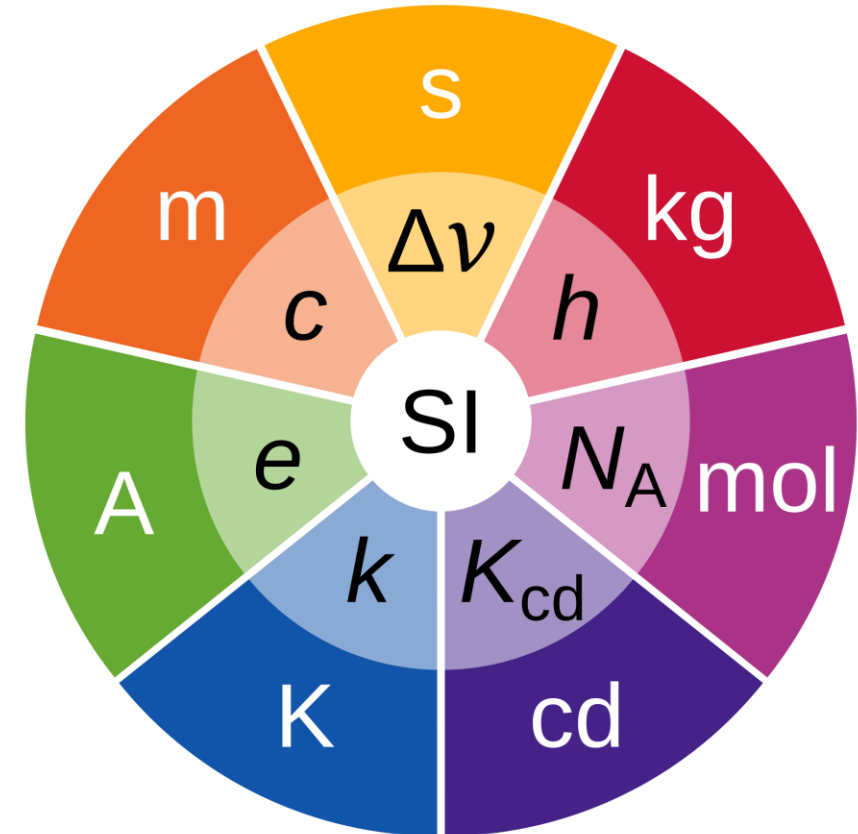
- Definicja: światłość w danym kierunku źródła emitującego promieniowanie o częstotliwości $540 \times 10^{12} \text{ Hz}$ i natężeniu promieniowania $1/683$ wata na steradian.

Służy do pomiaru jasności źródeł światła w danym kierunku.

Le Système international d'unités The International System of Units



Rys. 1. Kraje używające układu SI i imperialnego.
[https://en.wikipedia.org/wiki/International_System_of_Units]



Rys. 2. Schemat relacji między jednostkami układu SI a fundamentalnymi stałymi fizycznymi
[<https://www.bipm.org/en/publications/si-brochure>]

11

Pochodne jednostki miary

W układzie SI obok **podstawowych jednostek** istnieją także **pochodne jednostki miary**. Powstają one jako kombinacje jednostek podstawowych. Część z nich ma własne, specjalne nazwy i symbole.

- **herc (Hz)** – jednostka częstotliwości
 - Definicja: $1 \text{ Hz} = 1/\text{s}$
 - Oznacza liczbę powtarzających się zjawisk w ciągu sekundy.
- **niuton (N)** – jednostka siły
 - Definicja: $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$
 - Siła potrzebna, aby nadać masie 1 kg przyspieszenie $1 \text{ m}/\text{s}^2$.
- **paskal (Pa)** – jednostka ciśnienia
 - Definicja: $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N}/\text{m}^2 = 1 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$
 - Określa nacisk siły na jednostkę powierzchni.
- **dżul (J)** – jednostka energii, pracy i ciepła
 - Definicja: $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$
 - Energia potrzebna do przesunięcia ciała siłą 1 N na odległość 1 m .
- **wat (W)** – jednostka mocy
 - Definicja: $1 \text{ W} = 1 \text{ J}/\text{s} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$
 - Określa tempo wykonywania pracy lub przekazywania energii.

12

Pochodne jednostki miary

- **kulomb (C)** – jednostka ładunku elektrycznego
 - Definicja: $1\text{ C} = 1\text{ A}\cdot\text{s}$
 - Ładunek przenoszony przez prąd o natężeniu 1 A w czasie 1 s.
- **wolt (V)** – jednostka napięcia elektrycznego
 - Definicja: $1\text{ V} = 1\text{ W/A} = 1\text{ kg}\cdot\text{m}^2/(\text{s}^3\cdot\text{A})$
 - Różnica potencjałów, która nadaje ładunkowi 1 C energię 1 J.
- **om (Ω)** – jednostka oporu elektrycznego
 - Definicja: $1\ \Omega = 1\text{ V/A} = 1\text{ kg}\cdot\text{m}^2/(\text{s}^3\cdot\text{A}^2)$
 - Opór przewodnika, w którym przy napięciu 1 V płynie prąd 1 A.
- **siemens (S)** – jednostka przewodności elektrycznej
 - Definicja: $1\text{ S} = 1/\Omega = 1\text{ A/V}$
 - Miara zdolności przewodzenia prądu.
- **weber (Wb)** – jednostka strumienia magnetycznego
 - Definicja: $1\text{ Wb} = 1\text{ V}\cdot\text{s} = 1\text{ kg}\cdot\text{m}^2/(\text{s}^2\cdot\text{A})$
 - Określa ilość pola magnetycznego przechodzącego przez powierzchnię.

13

Pochodne jednostki miary

- **tesla (T)** – jednostka indukcji magnetycznej
 - Definicja: $1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2 = 1 \text{ kg}/(\text{s}^2 \cdot \text{A})$
 - Miara gęstości pola magnetycznego.
- **henr (H)** – jednostka indukcyjności
 - Definicja: $1 \text{ H} = 1 \text{ Wb/A} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{A}^2)$
 - Określa zdolność przewodnika do wytwarzania siły elektromotorycznej.
- **lumen (lm)** – jednostka strumienia świetlnego
 - Definicja: $1 \text{ lm} = 1 \text{ cd} \cdot \text{sr}$
 - Miara całkowitej ilości światła emitowanego w przestrzeń.
- **lux (lx)** – jednostka natężenia oświetlenia
 - Definicja: $1 \text{ lx} = 1 \text{ lm/m}^2$
 - Określa ilość światła padającego na powierzchnię.
- **bekerelel (Bq)** – jednostka aktywności promieniotwórczej
 - Definicja: $1 \text{ Bq} = 1/\text{s}$
 - Jedno rozpadnięcie jądra na sekundę.

14

Pochodne jednostki miary

- **grej (Gy)** – jednostka dawki pochłoniętej
 - Definicja: $1 \text{ Gy} = 1 \text{ J/kg}$
 - Ilość energii promieniowania pochłoniętej przez 1 kg materii.
- **siwert (Sv)** – jednostka równoważnika dawki
 - Definicja: $1 \text{ Sv} = 1 \text{ J/kg}$
 - Dawka pochłonięta uwzględniająca biologiczne skutki promieniowania.
- **katal (kat)** – jednostka aktywności katalitycznej
 - Definicja: $1 \text{ kat} = 1 \text{ mol/s}$
 - Określa tempo reakcji katalitycznej.

15

Jednostki miary spoza układu SI

Obok jednostek podstawowych i pochodnych dopuszcza się też stosowanie pewnych jednostek spoza SI, które są powszechnie używane i powiązane z jednostkami SI poprzez stałe przeliczniki.

- **minuta (min)** – $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$
- **godzina (h)** – $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$
- **dość (d)** – $1 \text{ d} = 86\,400 \text{ s}$
- **stopień kątowy (°)** – $1^\circ = \pi/180 \text{ rad}$
- **minuta kątowa (')** – $1' = 1/60^\circ = \pi/10\,800 \text{ rad}$
- **sekunda kątowa (")** – $1'' = 1/60' = \pi/648\,000 \text{ rad}$

Jednostki miary spoza układu SI

- **hektar (ha)** – $1 \text{ ha} = 10^4 \text{ m}^2$
- **litr (l lub L)** – $1 \text{ L} = 10^{-3} \text{ m}^3$
- **tona (t)** – $1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}$
- **elektronowolt (eV)** – $1 \text{ eV} = 1,602 \ 176 \ 634 \times 10^{-19} \text{ J}$
- **jednostka masy atomowej (u)** – $1 \text{ u} = 1,660 \ 539 \ 066 \ 60 \times 10^{-27} \text{ kg}$
- **jednostka astronomiczna (au)** – $1 \text{ au} = 149 \ 597 \ 870 \ 700 \text{ m}$ (dokładnie)
- **węzeł (kn)** – $1 \text{ kn} = 1 \text{ Mm/h} = 1852 \text{ m/h} \approx 0,5144 \text{ m/s}$
- **mile morskie (M, nm)** – $1 \text{ Mm} = 1852 \text{ m}$
- **bar (bar)** – $1 \text{ bar} = 100 \ 000 \text{ Pa}$
- **ångström (Å)** – $1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$ (w fizyce atomowej i krystalografii)

17

Przedrostki dziesiętne

W układzie SI stosuje się przedrostki dziesiętne, które pozwalają zapisywać bardzo duże i bardzo małe liczby w wygodnej postaci. Każdy przedrostek odpowiada określonemu mnożnikowi potęgowemu 10.

Przedrostki dla dużych wielkości

- deka (da) – 10^1
- hekto (h) – 10^2
- kilo (k) – 10^3
- mega (M) – 10^6
- giga (G) – 10^9

- tera (T) – 10^{12}
- peta (P) – 10^{15}
- eksa (E) – 10^{18}
- zetta (Z) – 10^{21}
- jotta (Y) – 10^{24}
- ronna (R) – 10^{27} (dodany w 2022 r.)
- kwetta (Q) – 10^{30} (dodany w 2022 r.)

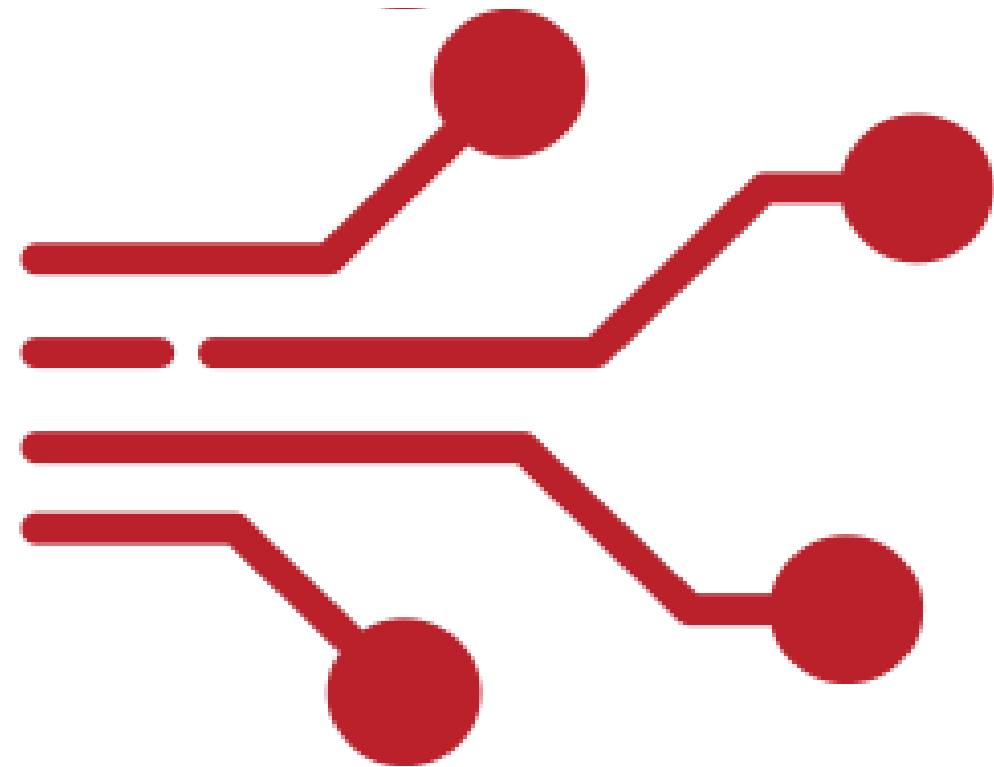
Przedrostki dziesiętne

Przedrostki dla małych wielkości

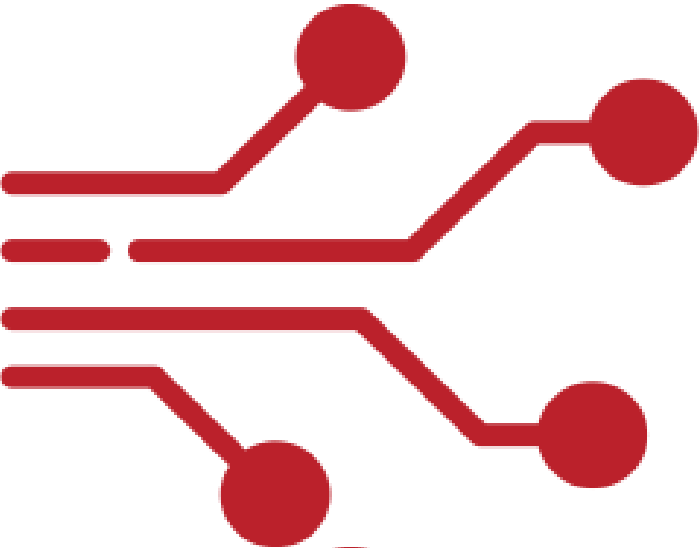
- decy (d) – 10^{-1}
- centy (c) – 10^{-2}
- mili (m) – 10^{-3}
- mikro (μ) – 10^{-6}
- nano (n) – 10^{-9}
- piko (p) – 10^{-12}
- femto (f) – 10^{-15}
- atto (a) – 10^{-18}
- zepto (z) – 10^{-21}
- jokto (y) – 10^{-24}
- ronto (r) – 10^{-27}
- kwekto (q) – 10^{-30}

19

Pomiar i dokładność pomiarowa w fizyce



20



Dokładność pomiarowa jest fundamentalnym pojęciem w fizyce i naukach przyrodniczych. Określa, jak blisko wynik pomiaru znajduje się względem rzeczywistej wartości wielkości fizycznej. Każdy pomiar obarczony jest niepewnością, która wynika zarówno z ograniczeń przyrządów pomiarowych, jak i czynników zewnętrznych.

21

Przyczyny niepewności pomiarowej

Błąd systematyczny

- Wynika z niewłaściwej kalibracji przyrządów lub stałych zakłóceń środowiskowych.
- Przykłady: zniekształcony czujnik temperatury, źle skalibrowana waga.
- Charakteryzuje się tym, że powtarzane pomiary mają tendencję do tego samego odchylenia od wartości prawdziwej.

22

Przyczyny niepewności pomiarowej

Błąd przypadkowy (losowy)

- Powstaje w wyniku nieprzewidywalnych fluktuacji w warunkach pomiaru.
- Przykłady: szумы elektryczne w czujniku, turbulencje powietrza przy pomiarze prędkości.
- Jest równie prawdopodobny w górę lub w dół od wartości prawdziwej.

Błąd obserwatora

- Występuje przy pomiarach manualnych, np. w odczycie wartości na skali analogowej.

Szacowanie błędu pomiarowego

Dokładność pomiaru określa się przez wartość błędu pomiarowego (niepewność pomiarową). Podstawowe pojęcia:

- Niepewność absolutna (Δx) – bezwzględne odchylenie wyniku od wartości prawdziwej:

$$x_{\text{prawdziwe}} = x_{\text{pomiar}} \pm \Delta x$$

- Niepewność względna (ϵ) – stosunek błędu do wartości zmierzonej, często wyrażana w procentach:

$$\epsilon = \frac{\Delta x}{x} 100\%$$

24

Metody szacowania błędu pomiarowego

Pomiary powtarzalne

Wykonuje się serię pomiarów tej samej wielkości, a błąd szacuje się jako odchylenie standardowe:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}},$$

gdzie x_i - wartość pomiaru, $\bar{x}$ - wartość średnia, n – liczba pomiarów.

Wartość błędu średniej wynosi

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Metody szacowania błędu pomiarowego

Metoda przyrządowa

- Błąd przyrządu określany jest przez producenta lub kalibrację.
- Przykład: linijka o podziałce 1 mm $\rightarrow \Delta x = \pm 0,5$ mm.

Metoda propagacji błędów

Stosowana przy obliczaniu błędu wielkości zależnych od kilku zmierzonych wielkości:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2}$$

26

Metody pomiaru a dokładność

Pomiary bezpośrednie

- Pomiar wartości wielkości fizycznej wprost, np. długości linijką, napięcia woltomierzem.
- Dokładność ograniczona rozdzielczością przyrządu.

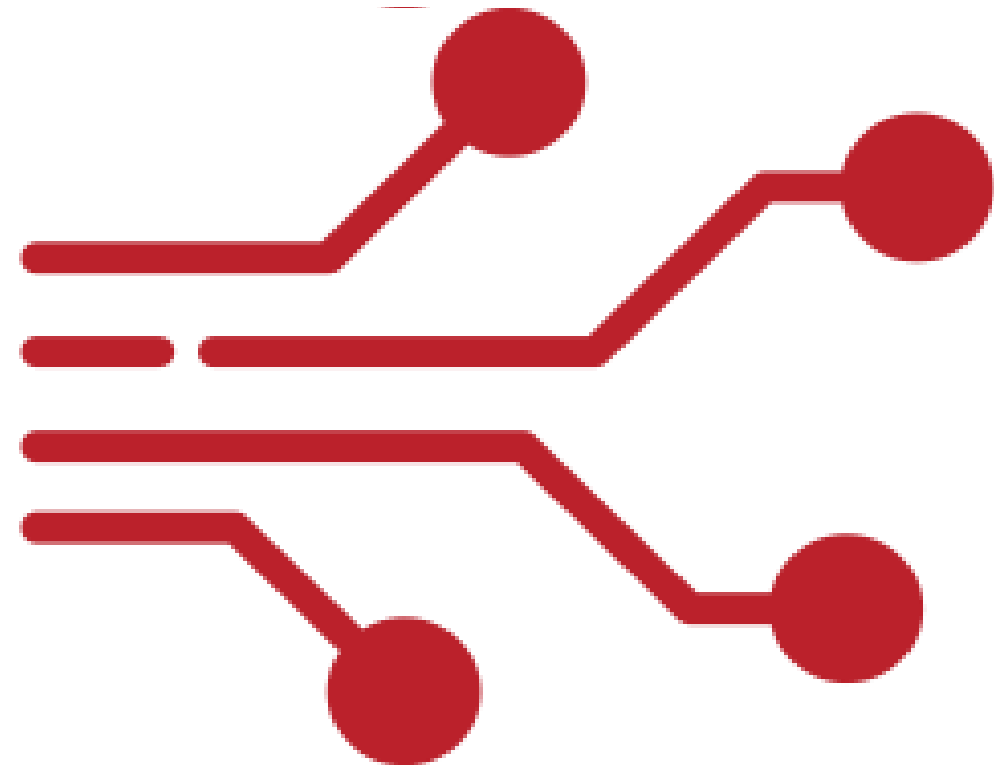
Pomiary pośrednie

- Obliczenie wartości na podstawie funkcji zależności od innych wielkości (np. gęstość = masa / objętość).
- Dokładność zależy od dokładności wszystkich użytych wielkości.

Pomiary statystyczne

- Polegają na analizie dużej liczby wyników i wyciąganiu średnich oraz odchyleń.
- Stosowane np. w fizyce cząstek, fizyce atmosfery, eksperymentach kwantowych.

Liczby w fizyce



Liczby w fizyce

W fizyce posługujemy się liczbami do opisu wielkości przyrodniczych. Wynik pomiaru

lub obliczeń składa się z:

- wartości liczbowej,
- jednostki.

Przykład:

$$l = 1,52 \text{ cm}, \quad g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Liczby w fizyce mogą przyjmować wartości bardzo małe (rozmiary atomów 10^{-10} m)

lub bardzo duże (masa Ziemi $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$). Dlatego używa się zapisu wykładniczego i przedrostków SI.

Zapis wykładniczy liczb

Zapis wykładniczy (naukowy) pozwala zapisywać liczby w postaci:

$$a \cdot 10^n, \quad 1 \leq a < 10, \quad n \in \mathbb{Z}$$

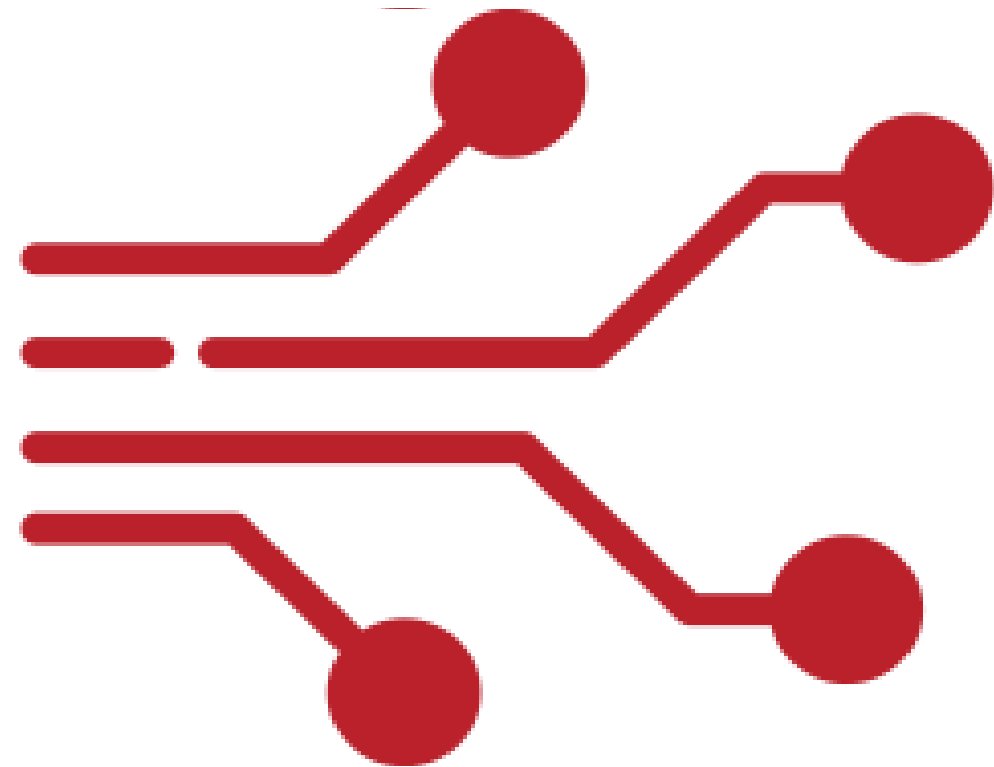
Zapis wykładniczy pozwala też łatwo stosować reguły mnożenia i dzielenia potęg dziesięciu:

$$10^a \cdot 10^b = 10^{(a+b)}$$

$$\frac{10^a}{10^b} = 10^{(a-b)}$$

30

Układy współrzędnych, wektory



31

Układ współrzędnych

Układ współrzędnych to sposób jednoznacznego określania położenia punktów w przestrzeni za pomocą liczb (współrzędnych).

Najczęściej używane:

- kartezjański dwu- i trójwymiarowy
- biegunowy
- sferyczny
- cylindryczny

32

Kartezjański układ współrzędnych

Dwuwymiarowy

Tworzą go dwie prostopadłe osie:
x i y. Punkt P opisujemy
współrzędnymi (x, y).

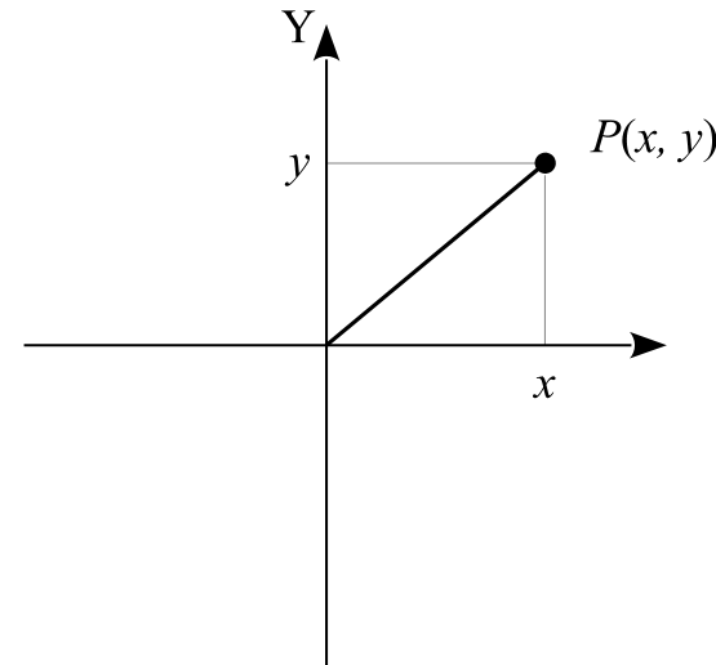
(0, 0), (3, 5), (-1, 2), (-9, -33)

Trójwymiarowy

Tworzą go trzy osie prostopadłe:
x, y, z. Punkt P opisujemy
współrzędnymi
(x, y, z).

(0, 0, 0), (1, 2, 7), (-20, 7, -11)

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2023-2027 (PERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00



33

Kartezjański układ współrzędnych

Odległości między dwoma punktami
wyznaczamy z ich współrzędnych

$$A = (x_1, y_1), \quad B = (x_2, y_2)$$

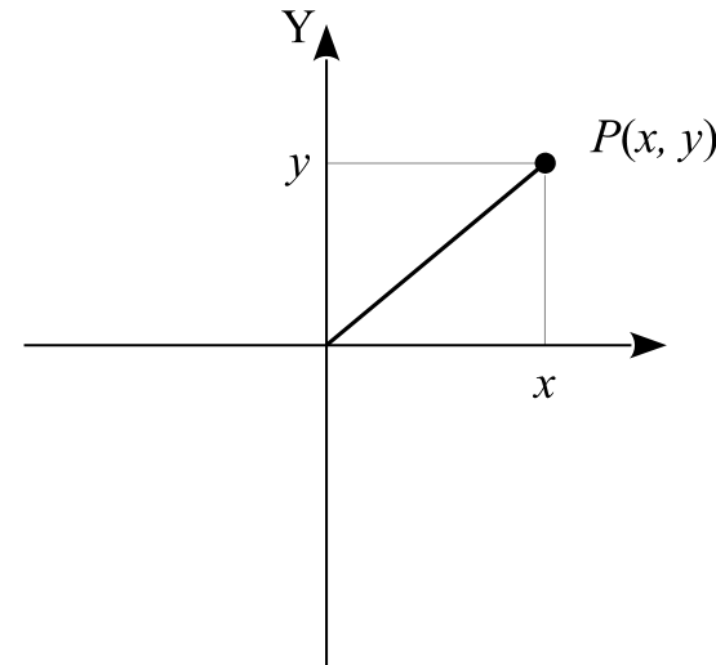
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Np. $A = (1, 2), \quad B = (3, -3)$

$$d = \sqrt{(3 - 1)^2 + (-3 - 2)^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00



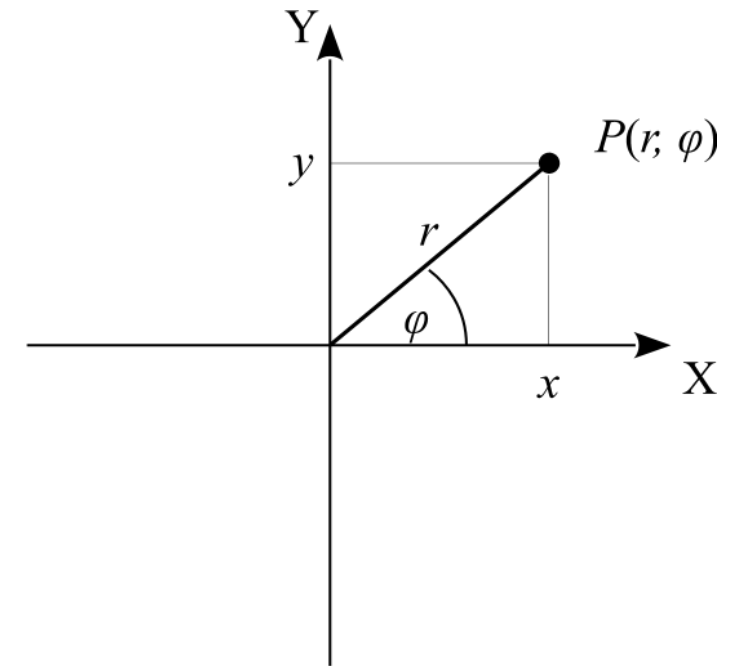
Biegunowy układ współrzędnych

Współrzędne punktu P określamy jako parę liczb (r, φ) gdzie r – odległość od środka układu (promień), φ – kąt pomiędzy osią X a promieniem r .

Transformacja między układem kartezjańskim a biegunowym

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$



35

Sferyczny układ współrzędnych

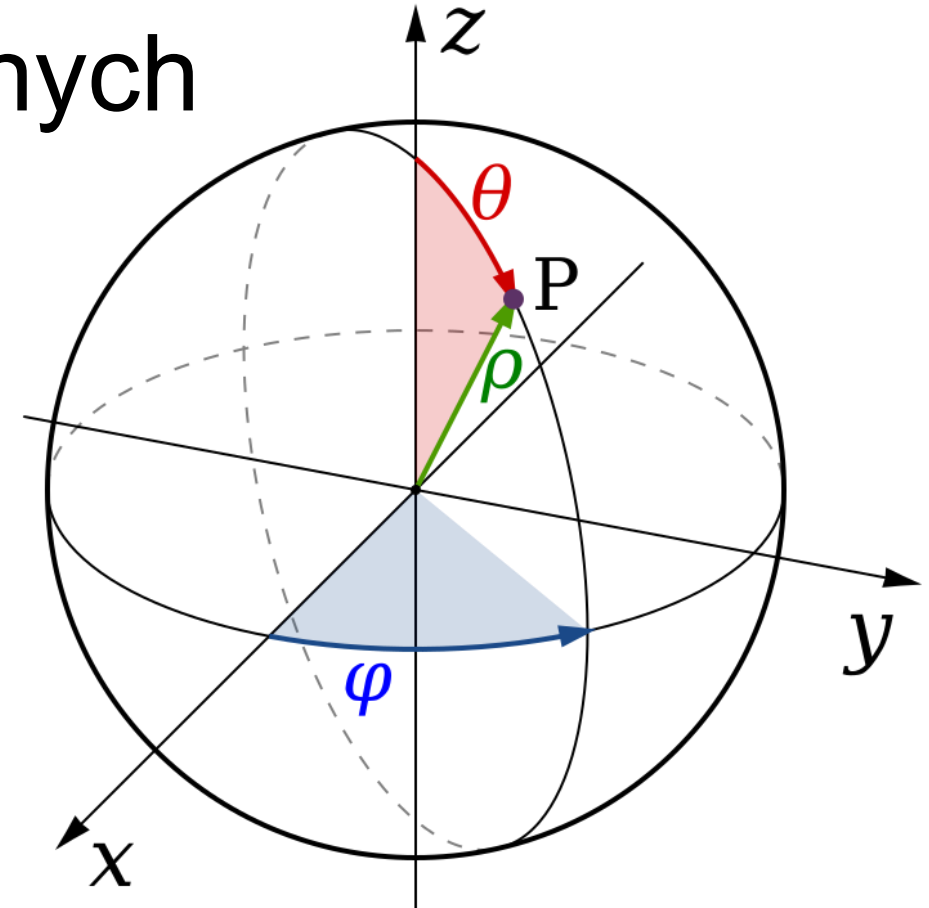
Współrzędne przedstawiamy jako trójka liczb (r, θ, ϕ) gdzie r – promień liczony od środka układu, θ – kąt od osi z , ϕ – kąt od płaszczyzny xz .

Transformacja między układem kartezjańskim a sferycznym

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$



36

https://pl.frwiki.wiki/wiki/Coordonn%C3%A9es_sph%C3%A9riques

Cylindryczny układ współrzędnych

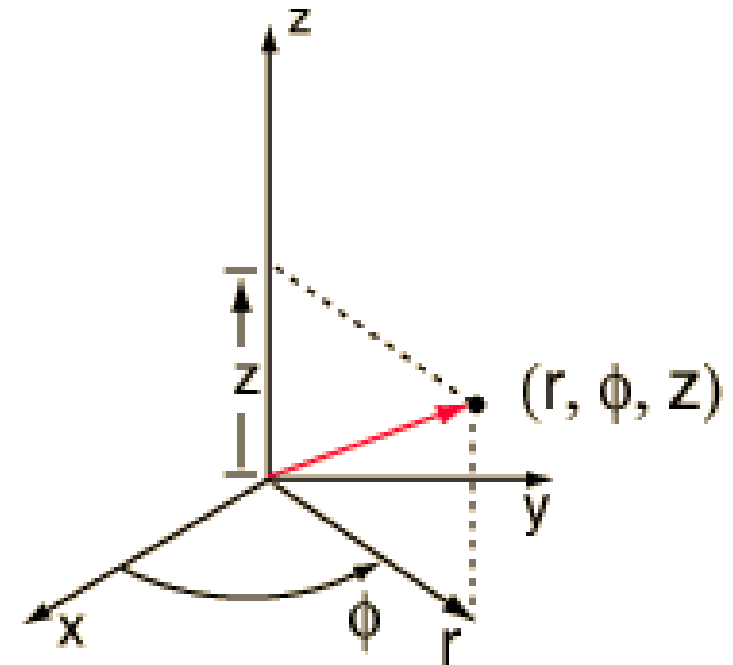
Współrzędne przedstawiamy jako trójka liczb (r, ϕ, z) gdzie r – promień w płaszczyźnie xy , ϕ – kąt od płaszczyzny xz , z – wysokość nad płaszczyzną xy .

Transformacja między układem kartezjańskim a sferycznym

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

$$z = z$$



37

Wektory

Wektor to wielkość matematyczna i fizyczna, która ma:

- wartość (moduł),
- kierunek,
- zwrot.

Wektor zapisuje się zwykle pogrubioną literą (np. **a**) lub ze strzałką (**$\vec{a}$**).

Przykłady wielkości wektorowych w fizyce: prędkość, siła, przyspieszenie, przesunięcie, wektor natężenia pola elektrycznego.

Przykłady wielkości skalarnych (bez kierunku): masa, temperatura, czas, energia.

38

Wektory

Wektor w przestrzeni dwu- lub trójwymiarowej można zapisać jako uporządkowany zbiór współrzędnych:

$$\vec{a} = (a_x^k - a_x^p, a_y^k - a_y^p, a_z^k - a_z^p)$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

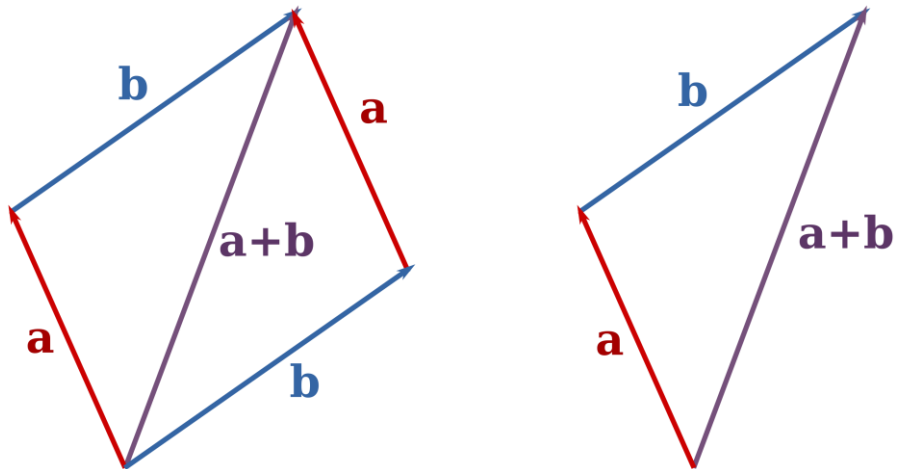
$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

39

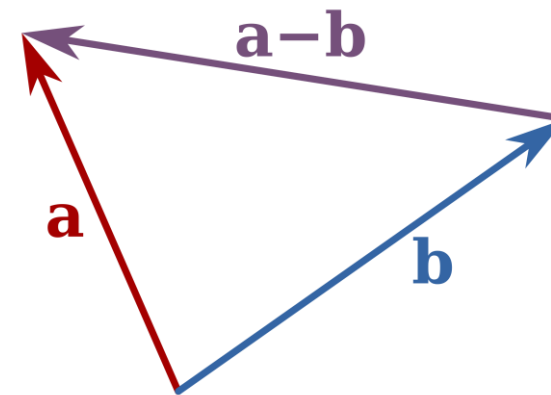
Operacje na wektorach

Dodawanie i odejmowanie

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y)$$



$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y)$$

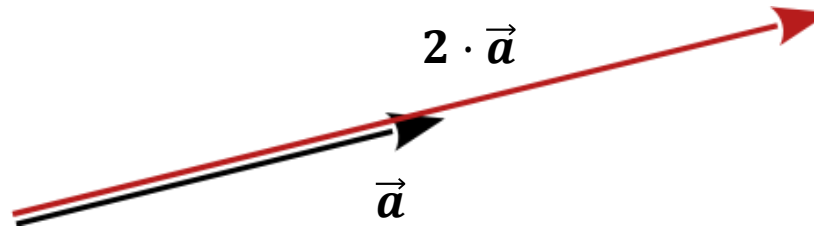


40

Wektory

Mnożenie przez skalar (liczbę)

$$r\vec{a} = (ra_x, ra_y)$$



Wektory

Długość wektora

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_x^k - a_x^p)^2 + (a_y^k - a_y^p)^2 + (a_z^k - a_z^p)^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

42

Wektory

Iloczyn skalarny wektorów

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$

Wynikiem iloczynu skalarnego jest liczba!

43

Wektory

Wersor to wektor jednostkowy o długości 1, wskazujący kierunek osi układu współrzędnych.

Oznaczenia: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – wersory odpowiednio wzdłuż osi x, y, z.

Dowolny wektor można zapisać jako kombinację liniową wersorów:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

Gdzie wektory : $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$

$$\vec{i} = (1,0,0), \quad \vec{j} = (0,1,0), \quad \vec{k} = (0,0,1)$$

44

Wektory

Iloczyn wektorowy

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} + a_x b_y \vec{k} - a_y b_x \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_z b_y \vec{i} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}\end{aligned}$$

45

Wynikiem iloczynu wektorowego jest nowy wektor!

Wektory

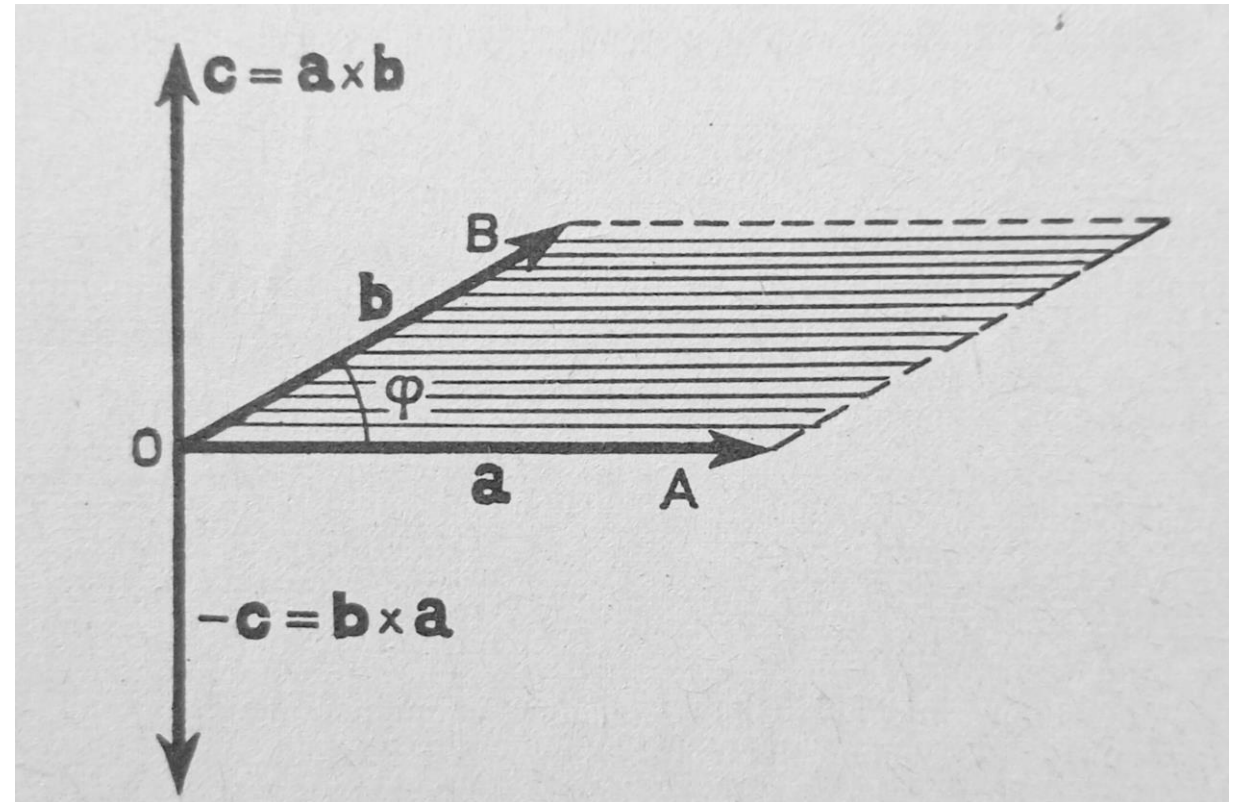
Iloczyn wektorowy

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha \vec{n}$$

$$|\vec{n}| = 1$$

$$\vec{n} \perp \vec{a}$$

$$\vec{n} \perp \vec{b}$$



Jeżewski M., Fizyka, Wydawnictwo PWN 1970.

46

Wektory

Iloczyn wektorowy

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c}$$

Iloczyn mieszany wektorów

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$$

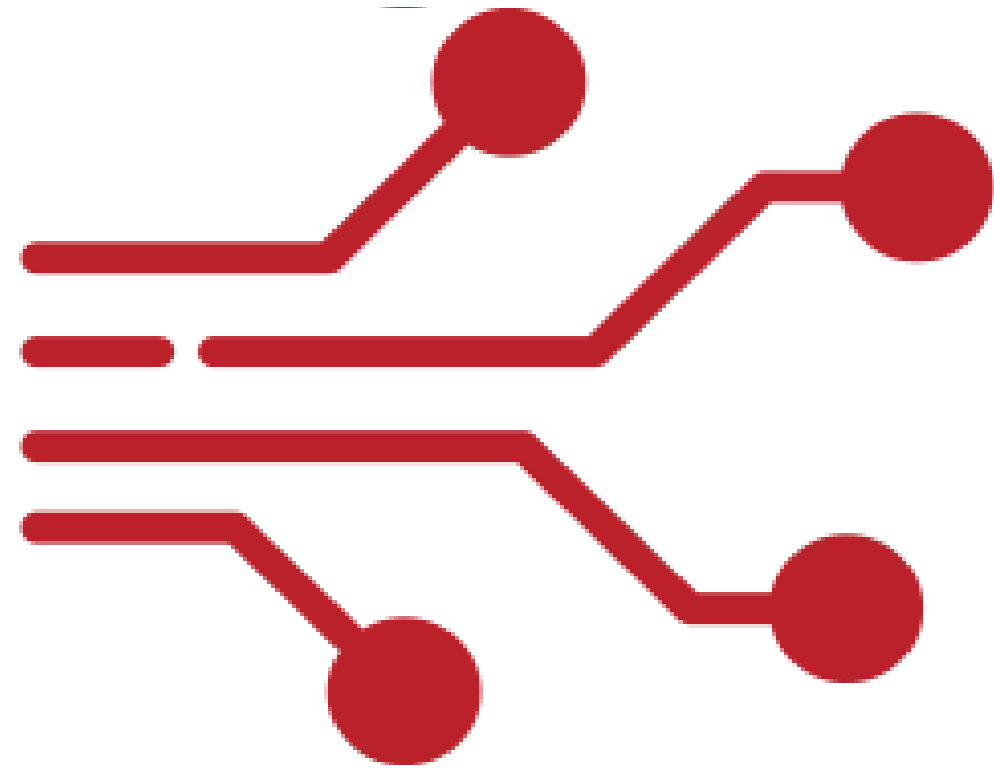
$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = V$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \dots$$

47

Pochodne i całki



48

Pochodna funkcji

Pochodna funkcji w punkcie jest miarą tempa zmiany tej funkcji (wzrostu lub malenia). Pochodną definiujemy następująco:

$$\frac{df(a)}{dx} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

lub

$$\frac{df(a)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

gdzie $h = b - a$
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



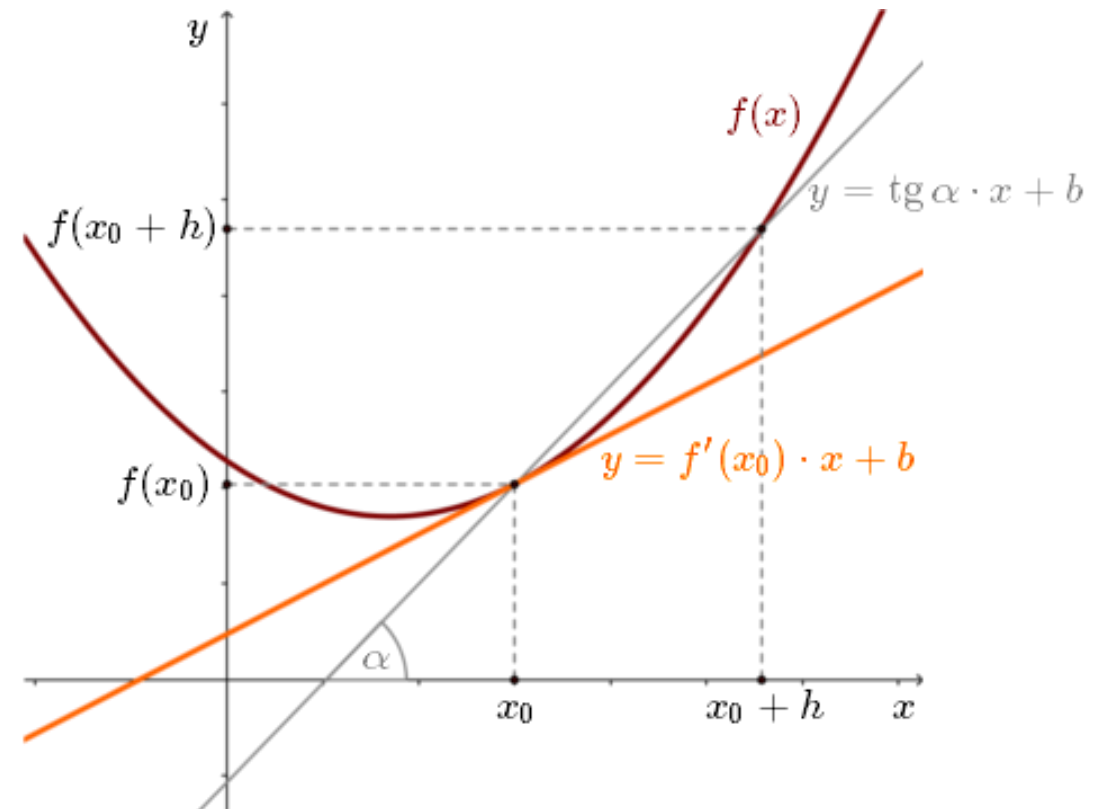
Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Pochodna funkcji

Wartość pochodnej funkcji w punkcie interpretuje się jako wartość współczynnika kierunkowego prostej stycznej do tej funkcji w tym punkcie.



<https://www.matemaks.pl/pochodne.html>

50

Własności pochodnych funkcji

$$(af)'(x) = af'(x)$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \text{ gdzie } g(x) \neq 0$$

$$f'(x) = h'(g(x))g'(x) \text{ gdzie } f(x) = h(g(x))$$

51

Przykłady pochodnych funkcji

$$f(x) = a$$

$$f'(x) = 0$$

$$f(x) = a \cdot x^m$$

$$f'(x) = amx^{(m-1)}$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = \tan x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cot^2 x}$$

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \ln x$$

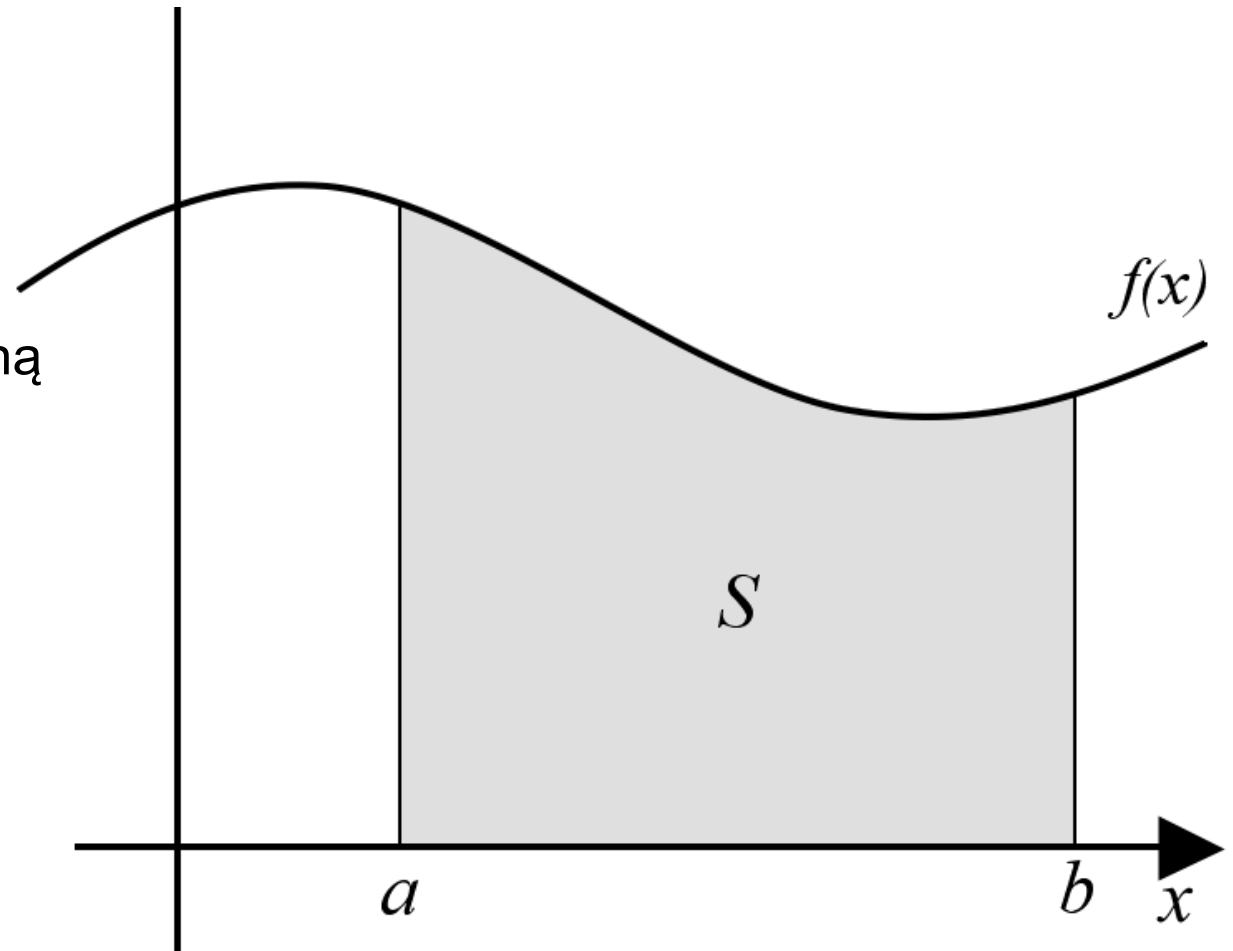
$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

52

Całka funkcji

Całka jest w zasadzie operacją odwrotną do pochodnej funkcji. Całka jest tzw. funkcją pierwotną. Funkcja podcałkowa jest pochodną funkcji pierwotnej. Geometrycznie możemy zinterpretować całkę oznaczoną jako pole powierzchni pod funkcją całkowaną.

$$S = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(x)\Delta x_i$$



53

<https://pl.wikipedia.org/wiki/Całka>

Przykłady całek nieoznaczonych

$$\int 0 dx = C$$

$$\int a dx = ax + C$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

54

Analiza wymiarowa

Analiza wymiarowa polega na sprawdzaniu zgodności wymiarów (czyli jednostek) po obu stronach równania fizycznego.

Każda wielkość fizyczna ma wymiar podstawowy, wyrażony za pomocą kilku wielkości podstawowych układu SI:

Długość – L – metr – m

Masa – M – kilogram – kg

Czas – T – sekunda – s

I inne...

Każdą z wielkości można zapisać za pomocą potęg tych symboli np. L, M, T

Analiza wymiarowa

Przykłady:

- prędkość:

$$v = \frac{s}{t}$$

$$[v] = \frac{L}{T} = LT^{-1}, \quad \text{jednostka } \frac{m}{s}$$

- przyspieszenie:

$$a = \frac{v}{t}$$

$$[a] = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}, \quad \text{jednostka } \frac{m}{s^2}$$

56

Analiza wymiarowa

Przykłady:

- siła:

$$F = ma$$

$$[F] = MLT^{-2}, \quad \text{jednostka } N = kg \frac{m}{s^2}$$

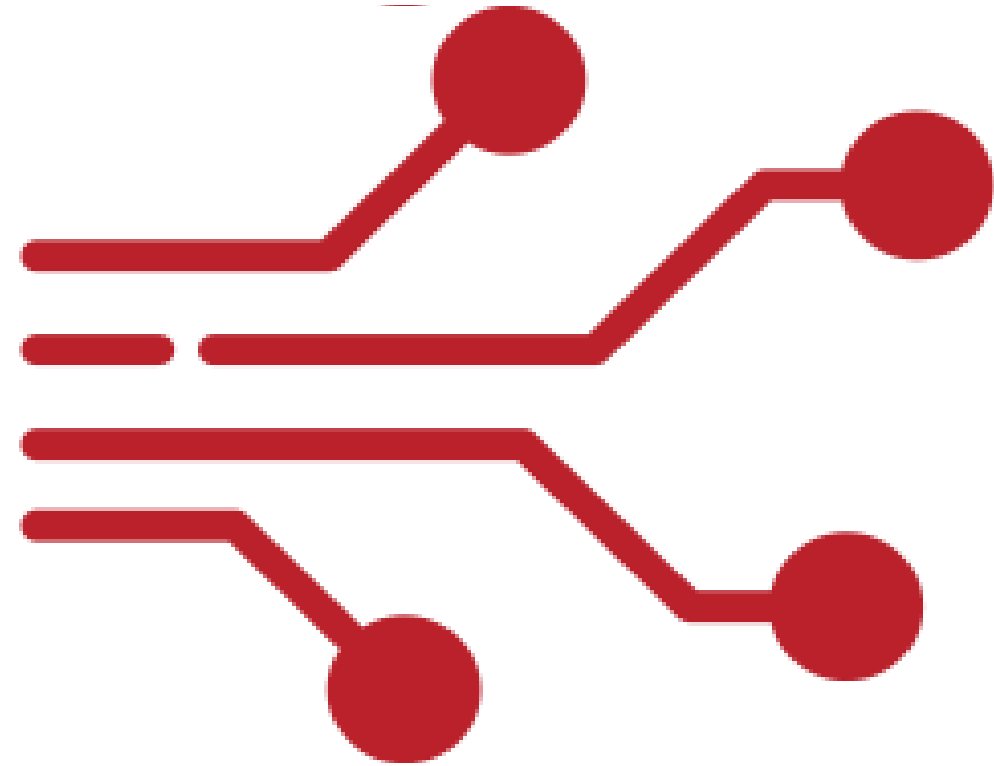
- praca:

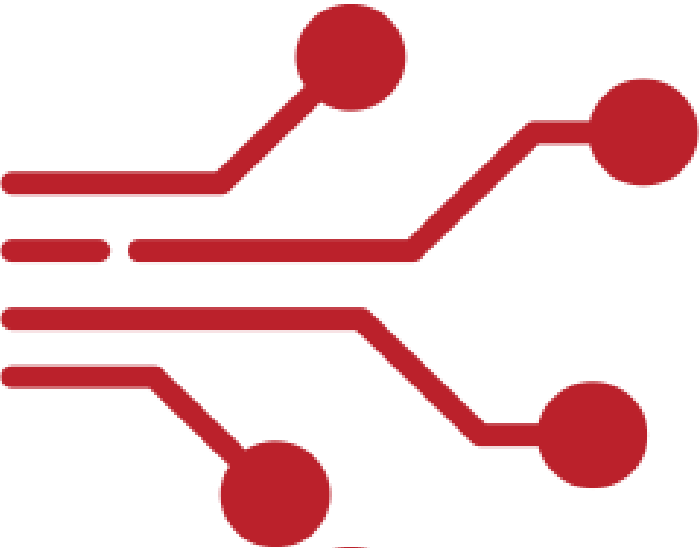
$$W = F \cdot s$$

$$[W] = (MLT^{-2}) \cdot L = ML^2T^{-2}, \quad \text{jednostka } J = N \cdot m = kg \frac{m^2}{s^2}$$

57

Kinematyka punktu materialnego





Kinematyka jest nauką badającą ruch ciał bez szczegółowej analizy przyczyn tych ciał, czyli bez analizy działających na nie sił.

Kinematyka punktu materialnego

Punkt materialny – to ciało, którego rozmiary możemy pominąć wobec drogi, jaką przebywa (np. samochód jadący po trasie, planeta wokół Słońca).

Opis ruchu wymaga określenia:

- toru (linii, po której porusza się punkt),
- Położenia $\vec{r}(t)$
- Prędkości $\vec{v}(t)$
- Przyspieszenia $\vec{a}(t)$

60

Ruch jednostajny prostoliniowy

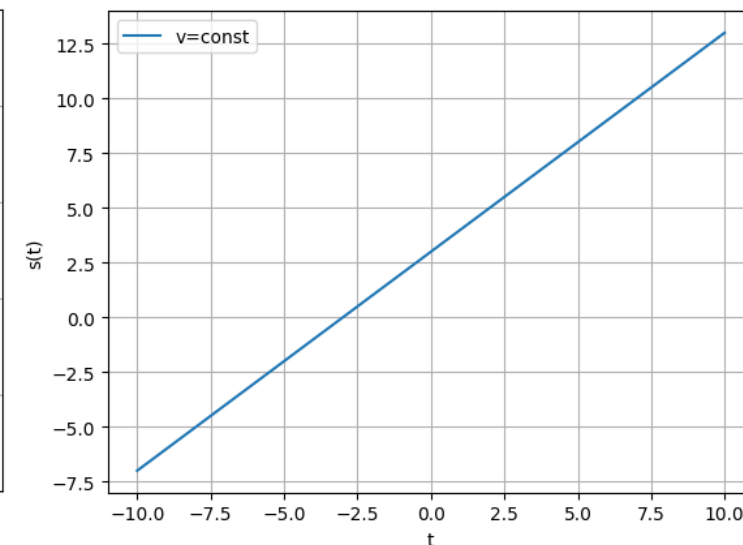
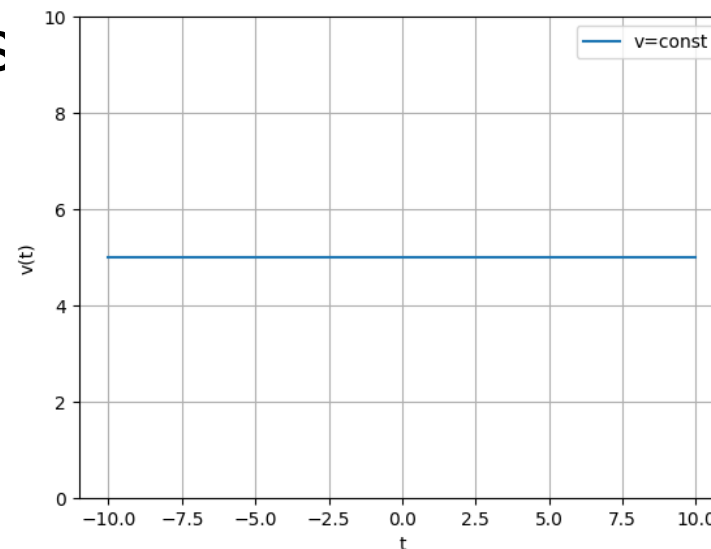
Torem ruchu jest linia pros

$$v = const$$

$$a = 0$$

$$s = s_0 + vt$$

$$v = \frac{s}{t}$$



Ciało w każdej sekundzie pokonuje takie samo przesunięcie.
Wykres drogi to linia prosta pochyła, wykres prędkości to linia pozioma.

61

Ruch jednostajnie zmienny prostoliniowy (przyspieszony/opóźniony)

Przyspieszenie: stałe ($a = \text{const}$)

Prędkość: zmienia się liniowo w czasie

$$a = \frac{v_k - v_p}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

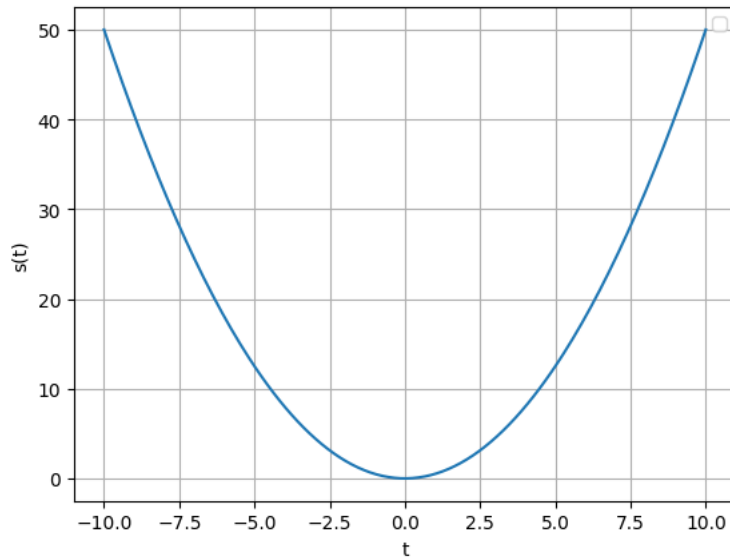
$$v(t) = v_0 + at$$

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

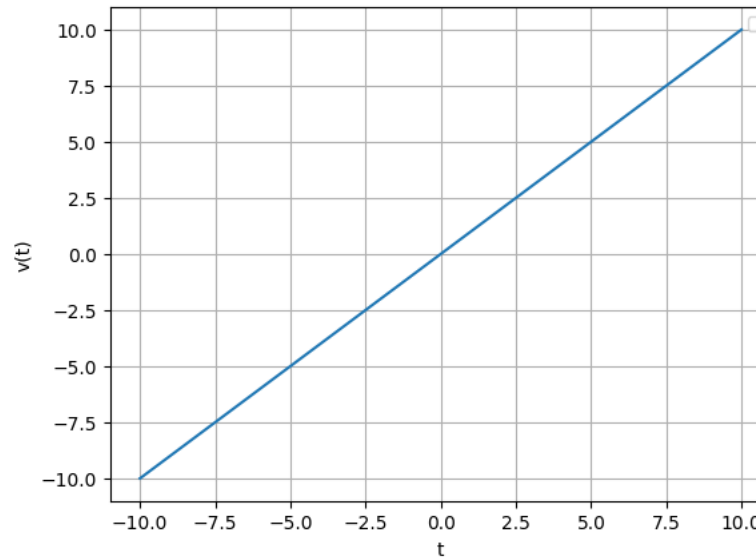
Dla $a > 0$ ruch przyspieszony, dla $a < 0$ ruch opóźniony.

62

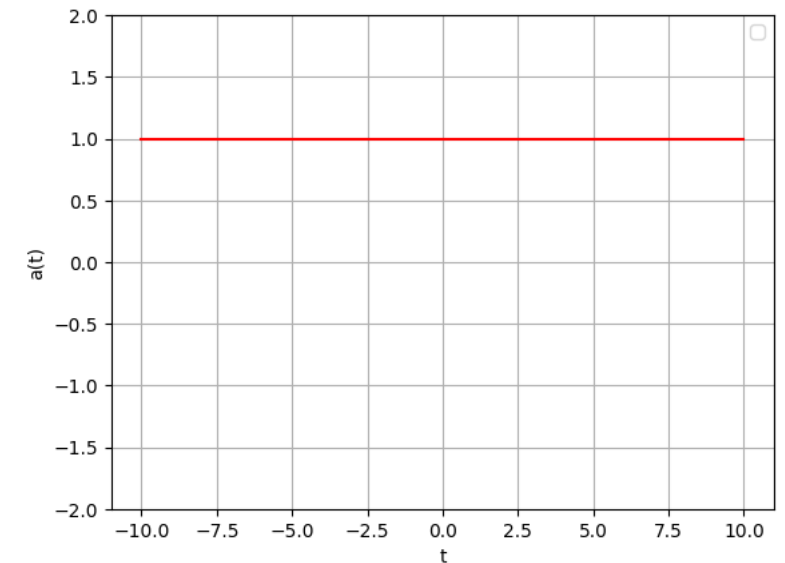
Ruch jednostajnie zmienny prostoliniowy (przyspieszony/opóźniony)



$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$



$$v(t) = v_0 + at$$



$$a = \frac{v_k - v_p}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{const}$$

63

Opis ruchu w ujęciu rachunku różniczkowego i całkowego

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$x(t) = \int v(t) dt$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$v(t) = \int a(t) dt$$

64

Opis ruchu w ujęciu rachunku różniczkowego i całkowego

Dla $a = \text{const}$ możemy wyznaczyć zależność prędkości od czasu:

$$v(t) = \int a dt = at + C$$

$$v(0) = v_0 = C$$

$$v(t) = at + v_0$$

65

Opis ruchu w ujęciu rachunku różniczkowego i całkowego

Możemy również wyznaczyć zależność położenia od czasu:

$$x(t) = \int v(t)dt = \int (at + v_0)dt = \frac{at^2}{2} + v_0t + C$$

$$x(0) = x_0 = C$$

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0t + x_0$$

66

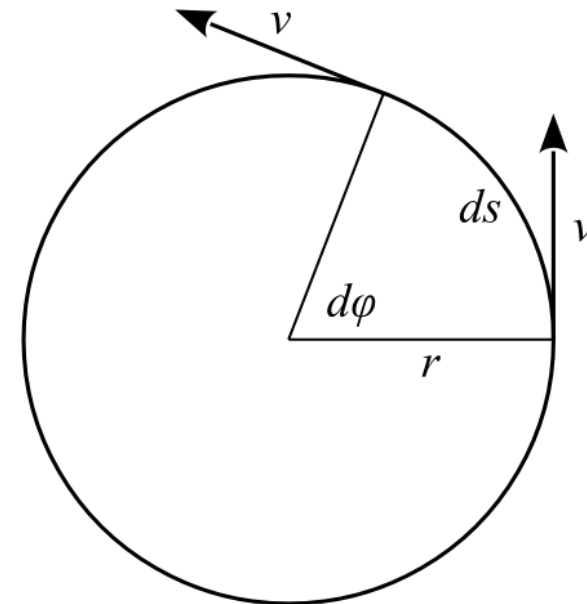
Ruch jednostajny po okręgu

Ruch jednostajny po okręgu to ruch ciała po torze będącym okręgiem, w którym prędkość ma stałą wartość (stałą długość wektora prędkości), ale zmienia się jej kierunek.

$$d\phi = \frac{ds}{r}$$

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}$$



Gdzie ω – prędkość kątowa, v – prędkość liniowa

67

Ruch jednostajny po okręgu

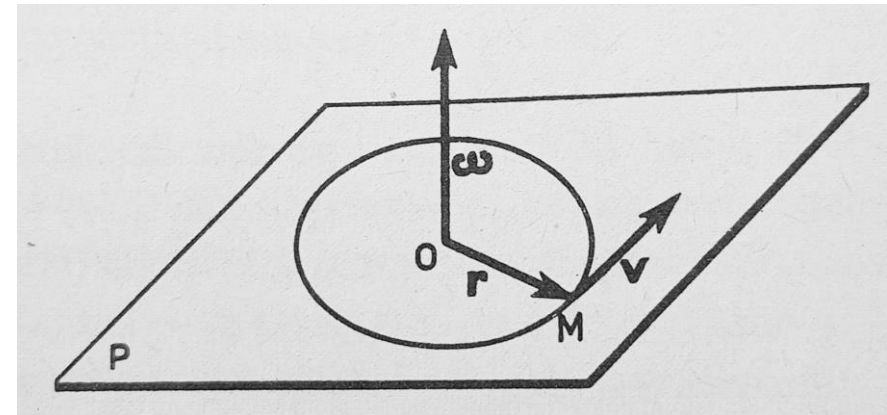
$$d\phi = \frac{ds}{r}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{r} \frac{ds}{dt}$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$v = r\omega$$

$$\vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega}$$



Jeżewski M., Fizyka, Wydawnictwo PWN 1970.

Ruch jednostajny po okręgu

Korzystamy z podobieństwa trójkątów $ds-r-r$ oraz $dv-v-v$.

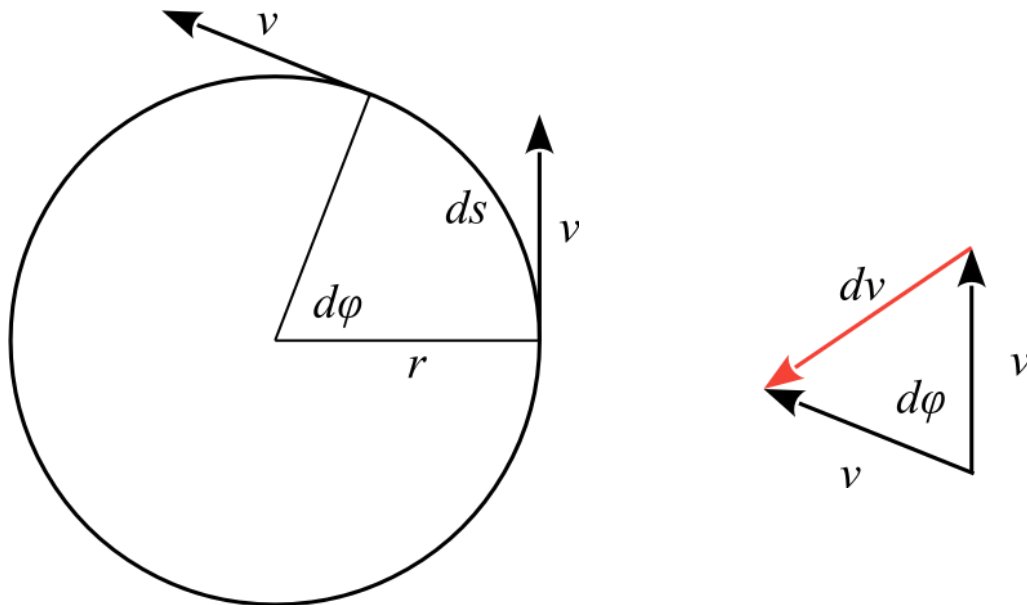
Kąt $d\phi$ na rysunkach jest przesadnie duży. Zmierzamy do granicy gdzie ds zmierza do zera.

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{r} \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = a$$

$$\frac{a}{v} = \frac{v}{r}$$

$$a_d = \frac{v^2}{r}$$



gdzie a_d - przyspieszenie dośrodkowe

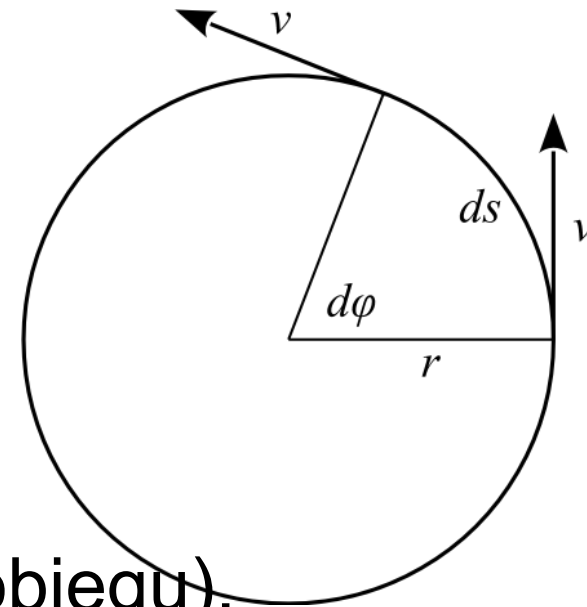
69

Ruch jednostajny po okręgu – okres i częstotliwość

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$f = \frac{n}{t} = \frac{1}{T}$$



gdzie T – okres (czas jednego pełnego obiegu),
 f – częstotliwość (wielokrotność obiegów n w czasie t)

70

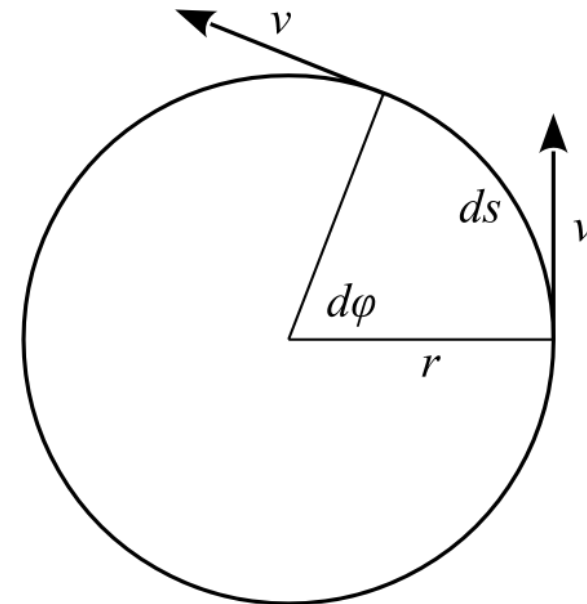
Ruch jednostajnie zmienny po okręgu

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$$\frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}$$

$$a = r\epsilon$$

$$\vec{a} = \vec{r} \times \vec{\epsilon}$$



Gdzie ϵ - przyspieszenie kątowe, a – przyspieszenie liniowe

71

Ruch jednostajnie zmienny po okręgu

Przyspieszenie kątowe jest stałe - $\epsilon = \text{const.}$

$$\omega(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}$$

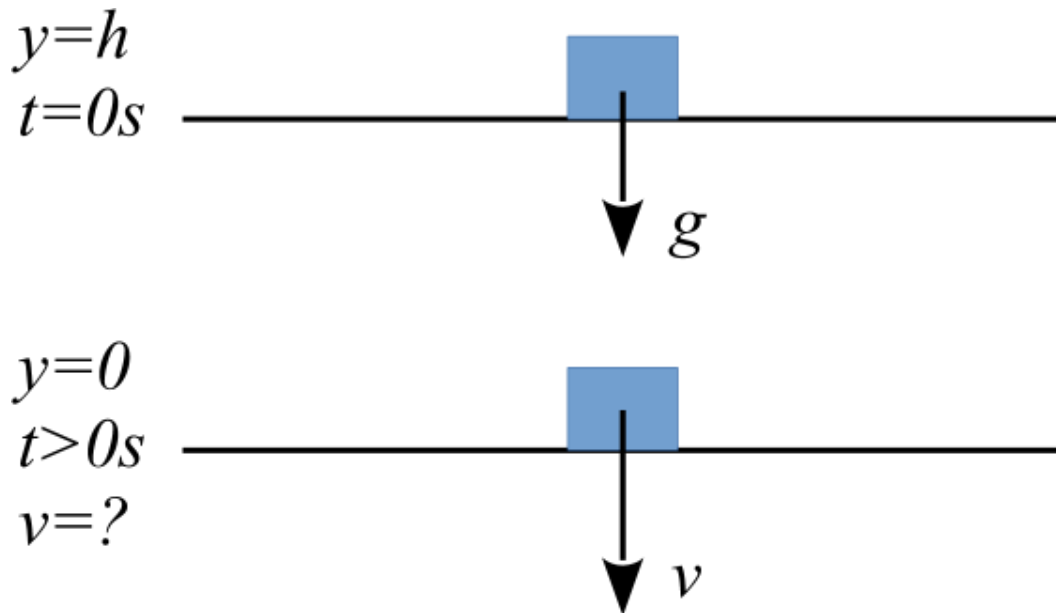
$$\epsilon(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\phi(t)}{dt^2}$$

$$\omega(t) = \int \epsilon dt = \epsilon t + \omega_0$$

$$\phi(t) = \int \omega(t) dt = \int (\epsilon t + \omega_0) dt = \frac{\epsilon t^2}{2} + \omega_0 t + \phi_0$$

72

Spadek swobodny



$$\vec{a} = \vec{g}$$

$$v(t) = gt$$

$$h = \frac{gt^2}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$v = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$$

73

Ruch dwuwymiarowy – rzut ukośny

Rzut ukośny to klasyczny rodzaj ruchu w kinematyce, w którym ciało zostaje wyrzucone pod pewnym kątem α do poziomu z prędkością początkową v_0 . Jest to połączenie ruchu jednostajnego w poziomie i ruchu jednostajnie opóźnionego w pionie (w górę, a następnie przyspieszonego w dół pod wpływem grawitacji).

Rozkładamy wektor prędkości początkowej na składowe

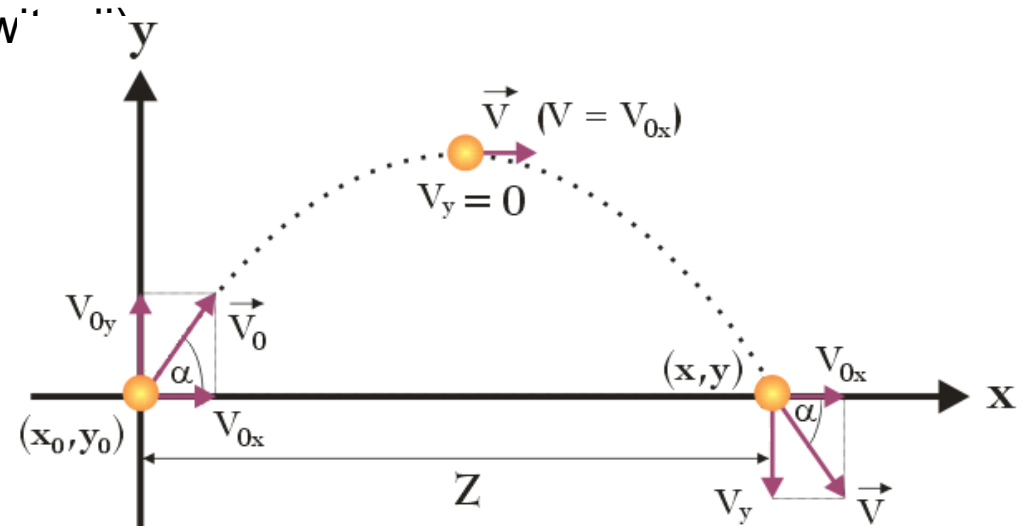
$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha$$

Równania ruchu dla x i y mają postać:

$$x(t) = v_{0x}t = v_0 \cos \alpha t$$

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}$$



<https://www.medianauka.pl/rzut-ukosny>

74

Rzut ukośny

Obliczamy prędkość w każdym z kierunków jako odpowiednie pochodne po czasie

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v_0 \cos \alpha$$

$$v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt$$

W połowie czasu ruchu ciało osiąga wierzchołek trajektorii i $v_y = 0$.

$$v_0 \sin \alpha - gt = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

75

Rzut ukośny

Czas całkowity trwania ruchu t

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

Stąd zasięg rzutu wynosi

$$Z = v_0 \cos \alpha \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

$$Z = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Wysokość maksymalna toru

$$h = y(t_{1/2}) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Równanie toru wyznaczamy z równań ruchu

$x(t)$ oraz $y(t)$ rugując z układu czas

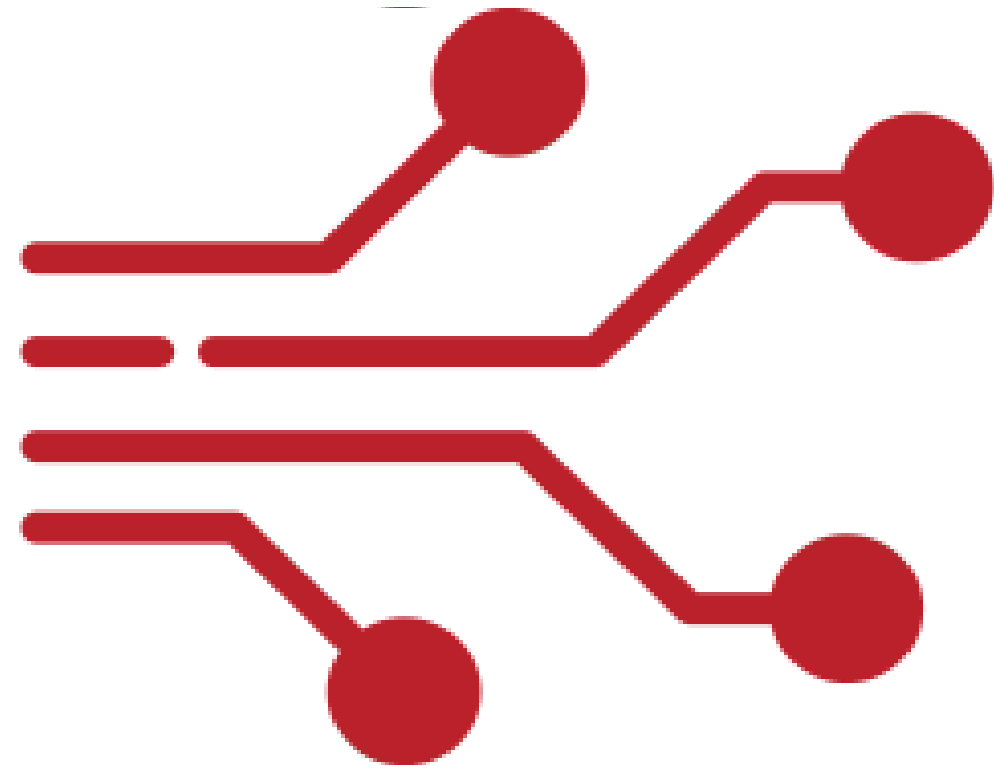
$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

$$y(x) = v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{gx^2}{2v_0 \cos \alpha}$$

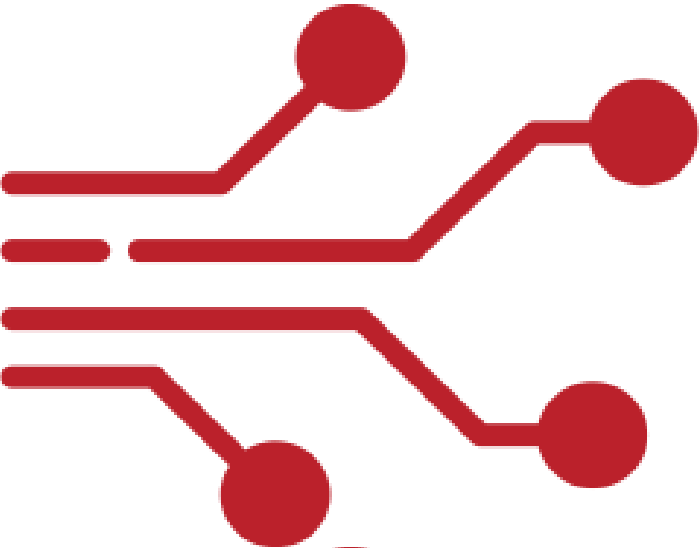
$$y(x) = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0 \cos \alpha}$$

76

Dynamika punktu materialnego



77



Dynamika jest częścią fizyki badającą ruch wraz z jego przyczynami. Opisuje relacje pomiędzy równaniami ruchu oraz siłami powodującymi ten ruch.

Pęd i siła

Pęd jest miarą ilości ruchu ciał, jest wielkością wektorową.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Siła jest wektorową wielkością fizyczną opisującą oddziaływanie jednego ciała na drugie, które może zmienić stan ruchu ciała (czyli jego prędkość, kierunek ruchu) bądź spowodować odkształcenie ciała.

$$\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v}$$

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = m \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \vec{F}$$

Pęd i siła

Siła powoduje zmianę pędu ciała, a zatem zmianę prędkości ciała.

Jednostką siły jest niuton $1N = 1kg \cdot \frac{1m}{1s^2}$

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Dla $\Delta t \rightarrow 0$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

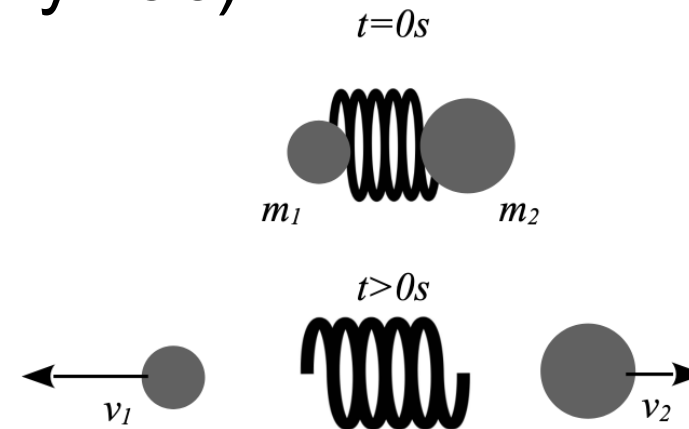
Pęd i siła

Masa ciała to miara jego bezwładności, czyli oporu, jaki ciało stawia zmianie swojego stanu ruchu (spoczynku lub prędkości).

Innymi słowy — im większa masa, tym trudniej jest zmienić prędkość ciała (rozpędzić je lub zatrzymać).

$$m_1 v_1 = m_2 v_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1}$$



81

Zasady dynamiki Newtona

I zasada dynamiki Newtona:

Jeżeli na ciało nie działa żadna siła lub działające siły równoważą się, to ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

II zasada dynamiki Newtona:

Jeżeli na ciało działa niezrównoważona siła, to ciało uzyskuje przyspieszenie wprost proporcjonalne do tej siły, a odwrotnie proporcjonalne do masy ciała.

Kierunek przyspieszenia jest taki sam jak kierunek działającej siły.

82

Zasady dynamiki Newtona

III zasada dynamiki Newtona (zasada akcji i reakcji)

Jeżeli ciało A działa na ciało B pewną siłą, to ciało B działa na ciało A siłą o tej samej wartości, tym samym kierunku, ale przeciwnym zwrocie.

$$\overrightarrow{F_{AB}} = -\overrightarrow{F_{BA}}$$

83

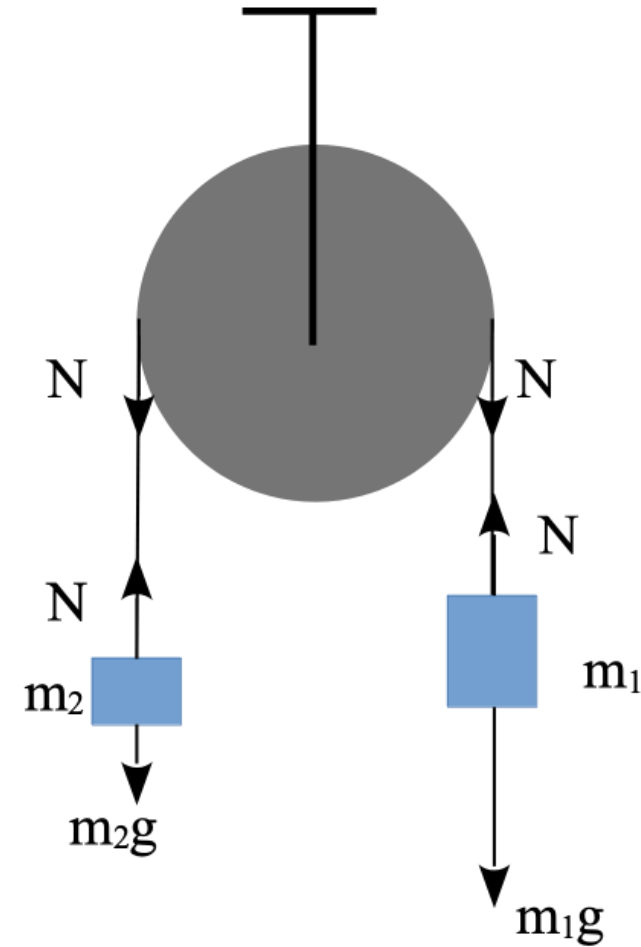
Bloczek

$$m_1 a = m_1 g - N$$

$$m_2 a = N - m_2 g$$

$$(m_1 + m_2) a = (m_1 - m_2) g$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} g$$



84

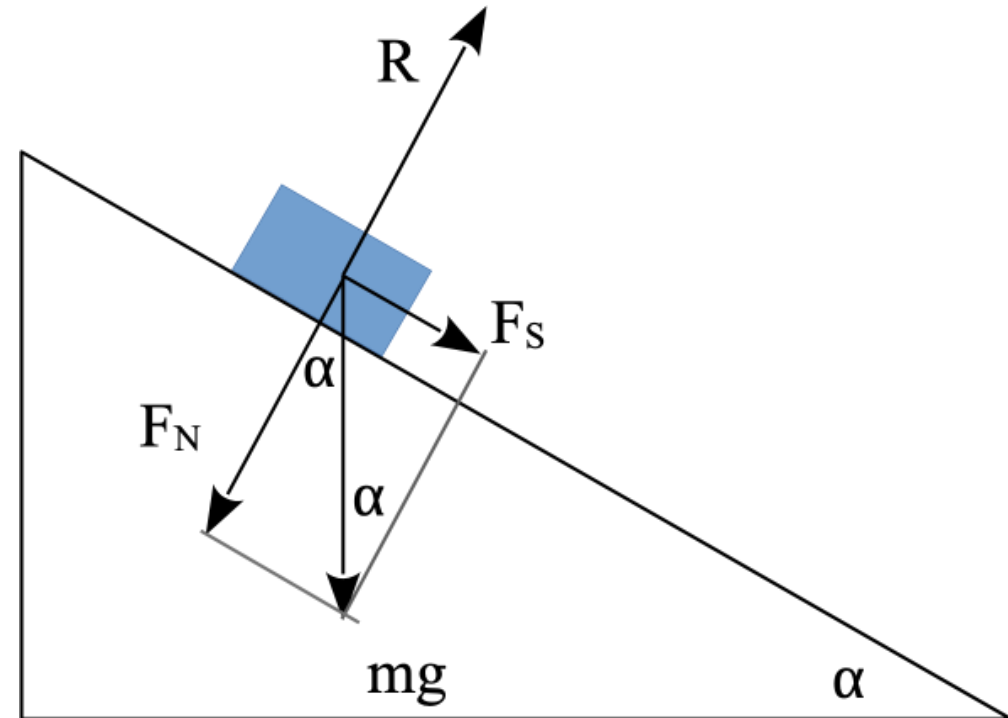
Równia pochyła

$$F_s = mg \sin \alpha$$

$$F_N = mg \cos \alpha$$

$$ma = mg \sin \alpha$$

$$a = g \sin \alpha$$



85

Tarcie statyczne i kinetyczne

Siła tarcia to siła, która przeciwstawia się ruchowi (lub próbie ruchu) ciała stykającego się z inną powierzchnią. Jej kierunek jest zawsze przeciwny do kierunku ruchu lub do kierunku działania siły próbującej ten ruch wywołać.

Tarcie statyczne działa, gdy ciało jeszcze się nie porusza, ale siła próbuje wprowadzić je w ruch.

Rośnie wraz ze wzrostem siły przyłożonej, aż do pewnej wartości maksymalnej:

$$T_S = \mu_S F_N$$

Tarcie kinetyczne działa, gdy ciało już się porusza po powierzchni.

$$T_K = \mu_K F_N$$

$$\mu_S > \mu_K$$

86

Tarcie statyczne i kinetyczne

Współczynniki tarcia

Rodzaj powierzchni	μ_s	μ_k
Stal – stal	0,6	0,4
Drewno – drewno	0,5	0,3
Guma – asfalt (suchy)	0,9	0,7
Lód – lód	0,1	0,03

Znaczenie praktyczne

Tarcie jest niezbędne do chodzenia, jazdy, hamowania, przenoszenia napędu.

W technice często dąży się do zmniejszenia tarcia (łożyska, smary), aby ograniczyć straty energii i zużycie elementów.

Równia pochyła z tarciem

$$F_s = mg \sin \alpha$$

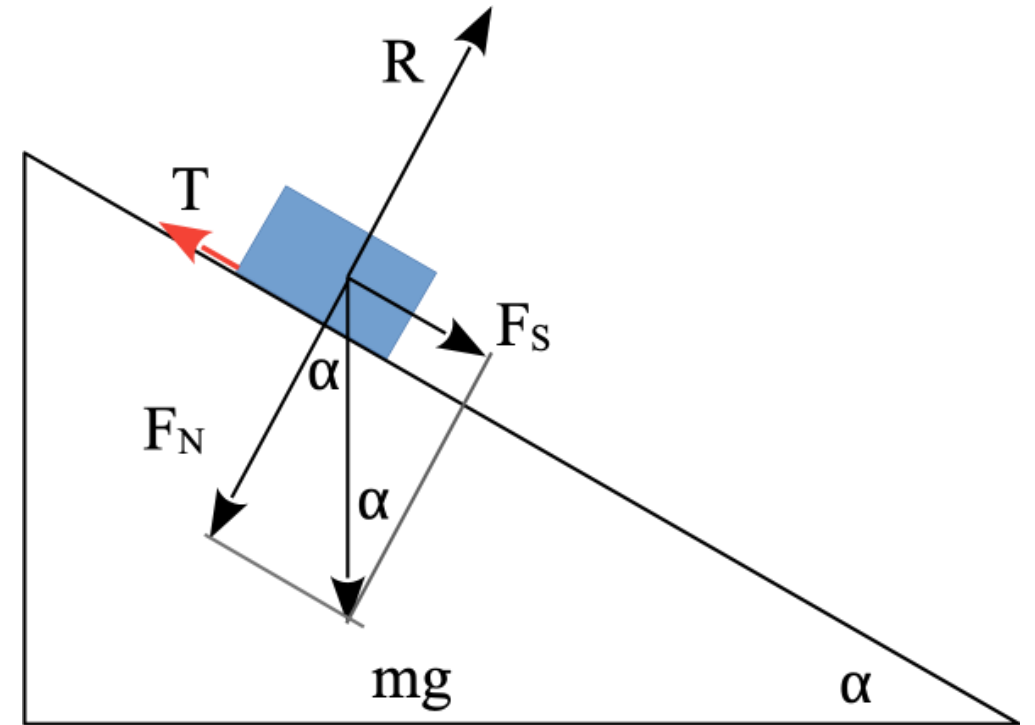
$$F_N = mg \cos \alpha$$

$$ma = mg \sin \alpha - T$$

$$T = \mu F_N = \mu mg \cos \alpha$$

$$ma = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha$$

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$



88

Tarcie statyczne i kinetyczne

Na równi pochyłej ciało spoczywa lub zsuwa się pod wpływem siły ciężkości.

O tym, czy ciało zacznie się poruszać, decyduje równowaga między siłą ciężkości a siłą tarcia. Kiedy ciało zaczyna się zsuwać, oznacza to, że tarcie statyczne osiągnęło wartość maksymalną.

$$T_S = \mu_S F_N$$

$$ma = mg(\sin \alpha - \mu_S \cos \alpha) = 0$$

$$\sin \alpha - \mu_S \cos \alpha = 0$$

$$\mu_S = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00

Jeśli klocek zsuwa się ruchem jednostajnym, to znaczy, że siła ciężkości równoległa do równi równoważy siłę tarcia kinetycznego

$$ma = mg(\sin \alpha - \mu_K \cos \alpha) = 0$$

$$\mu_K = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

Z tą różnicą, że teraz mierzymy kąt, przy którym klocek zsuwa się ze stałą prędkością, a nie w momencie ruszania.

89



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



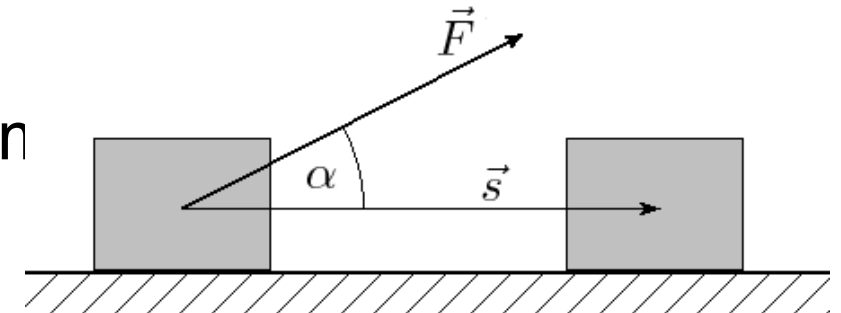
Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Praca

Pracą nazywamy iloczyn skalarny siły i przesunięcia ciała spowodowanego działaniem tej siły. Jednostką jest dżul $1J = 1N \cdot 1m$



$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

$$W = F s \cos \alpha$$

W szczególności gdy na całej drodze siła jest zmienna:

$$W = \sum_i F_i \Delta s = \int_a^b F ds$$

90

Energia potencjalna

Policzmy pracę jaką należy wykonać aby podnieść ciało o masie m na wysokość h w jednorodnym polu grawitacyjnym o przyspieszeniu g

$$W = \int_0^h mg ds = mg \int_0^h ds = mgh - mg0 = mgh$$
$$E_p = mgh$$

Energia potencjalna to energia, jaką ma ciało ze względu na swoje położenie w polu sił zachowawczych (np. grawitacyjnym, sprężystym, elektrostatycznym).

Można ją traktować jako zmagazynowaną energię, którą ciało może oddać, wykonując pracę podczas zmiany położenia.

91

Energia kinetyczna

Policzmy pracę wykonaną na drodze poziomej s w trakcie działania siły F

$$W = \int_a^b F ds = \int_a^b m \frac{dv}{dt} ds \quad ds = v dt$$
$$W = m \int_a^b \frac{dv}{dt} v dt = m \int_{v_0}^{v_k} v dv = \frac{mv_k^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$
$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2}$$

92

Energia kinetyczna jest pracą potrzebną na zwiększenie prędkości ciała.

Zasada zachowania energii

Dla układów, na które nie działa żadna siła zewnętrzna, a działające siły wewnętrzne są zachowawcze całkowita energia układu jest zachowana. Siła jest zachowawcza, jeśli praca tej siły nie zależy od drogi, lecz tylko od początkowego i końcowego położenia.

$$E = E_k + E_p = \text{const}$$

Dla spadku swobodnego mamy w chwili $t = 0$ na wysokości h ciało się nie porusza zatem energia całkowita równa się energii potencjalnej

$$E = mgh$$

Następnie, gdy ciało spadnie z wysokości h i osiągnie poziom 0 straci swoją energię potencjalną na rzecz energii kinetycznej. Czyli w procesie tym cała energia potencjalna zamieni się na energię kinetyczną

$$mgh = \frac{mv^2}{2}$$

Stąd możemy wyznaczyć prędkość końcową w spadku swobodnym

$$v = \sqrt{2gh}$$

Moc

Moc to miara szybkości wykonywania pracy.

Mówi, jak dużo pracy wykonano w danym czasie lub z jaką szybkością energia jest przekazywana lub przekształcana.

$$P = \frac{W}{t}$$

Jednostką mocy jest wat $1W = \frac{1J}{1s} = 1N \cdot \frac{1m}{1s}$.

Jeśli praca nie jest wykonywana równomiernie w czasie (czyli prędkość zmienia się), wtedy można zdefiniować moc chwilową:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

94

Moc

Jeżeli ciało porusza się z prędkością $\vec{v}$ pod wpływem działania siły $\vec{F}$

możemy moc zdefiniować jako:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = |\vec{F}| |\vec{v}| \cos \alpha$$

Ponieważ praca W jest miarą zmiany energii, można też powiedzieć, że:

$$P = \frac{dE}{dt}$$

czyli moc to szybkość przepływu energii.

Zasada zachowania pędu

W układzie izolowanym suma wektorów pędu wszystkich ciał przed zderzeniem (lub innym oddziaływaniem) jest równa sumie wektorów pędu po tym oddziaływaniu.

$$F_{AB} = -F_{BA}$$

$$F_{AB} + F_{BA} = 0$$

$$\frac{dp_A}{dt} + \frac{dp_B}{dt} = 0$$

$$p_A + p_B = \text{const}$$

96

Popęd siły

Popęd siły – impuls siły

Popęd siły to miara działania siły w czasie.
Opisuje łączny efekt siły działającej na ciało w pewnym przedziale czasu.

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt$$

gdzie:

$\vec{I}$ - popęd siły [N s]

$\vec{F}(t)$ - siła działająca w czasie od t_1 do t_2

Popęd siły

Związek między popędem a pędem

Z drugiej zasady dynamiki Newtona mamy

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{p_1}^{p_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}$$

czyli popęd siły jest równy zmianie pędu ciała.

98

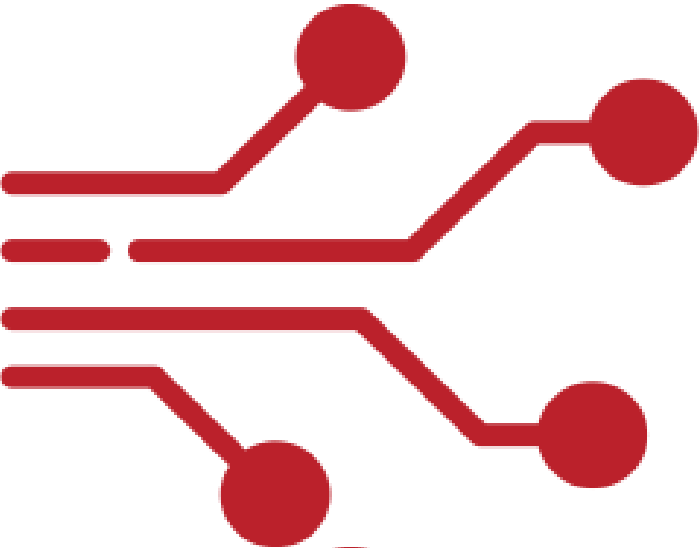
Popęd siły

Interpretacja fizyczna

- Popęd opisuje, jak bardzo zmienia się pęd ciała pod wpływem działania siły w określonym czasie.
- Duża siła działająca krótko może dać taki sam efekt jak
- mała siła działająca długo — ponieważ liczy się iloczyn siły i czasu działania.

Dlatego np. uderzenie piłki kijem golfowym (duża siła, krótki czas) i popychanie wózka (mała siła, długi czas) mogą wywołać podobną zmianę prędkości.

99



Zderzenie to krótkotrwałe oddziaływanie dwóch (lub więcej) ciał, w wyniku którego zmieniają się ich prędkości. Podczas zderzenia działają bardzo duże, ale krótkotrwałe siły wewnętrzne (impulsowe).

W analizie zakładamy, że:

nie działają istotne siły zewnętrzne (układ izolowany),
czas trwania zderzenia jest bardzo krótki,
zderzenie zachodzi wzdłuż jednej prostej (dla uproszczenia — zderzenie jednowymiarowe).

100

Zderzenia sprężyste

Zderzenie sprężyste to takie, w którym zachowany jest zarówno pęd jak i energia układu

$$m_1 v_{1p} + m_2 v_{2p} = m_1 v_{1k} + m_2 v_{2k}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1p}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2p}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1k}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2k}^2$$

Gdzie

m_1, m_2 - masy zderzających się ciał, v_{1p} i v_{2p} - prędkości ciał przed zderzeniem,

v_{1k} i v_{2k} - prędkości ciał po zderzeniu.

Podczas zderzenia energia kinetyczna może się chwilowo zamienić w energię potencjalną sprężystości (np. odkształcenie kul), ale po zderzeniu wraca do postaci kinetycznej.

Zderzenia sprężyste

Rozwiązując układ równań ze względu na prędkości końcowe otrzymujemy:

$$v_{1k} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1p} + 2m_2v_{2p}}{m_1 + m_2}$$

$$v_{2k} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2p} + 2m_1v_{1p}}{m_1 + m_2}$$

102

Zderzenia sprężyste

W szczególności gdy przed zderzeniem druga kula się nie poruszała mamy:

$$v_{1k} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1p}$$

$$v_{2k} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1p}$$

103

Zderzenia niesprężyste

Zderzenie niesprężyste to takie, w którym pęd jest zachowany, ale energia kinetyczna nie — jej część zostaje zamieniona w:

- ciepło,
- dźwięk,
- trwałe odkształcenie ciał.

$$m_1 v_{1p} + m_2 v_{2p} = m_1 v_{1k} + m_2 v_{2k}$$

$$E_{k,początkowa} > E_{k,końcowa}$$

104

Zderzenia niesprężyste

Doskonale niesprężyste zderzenie

To szczególny przypadek zderzenia niesprężystego, gdy ciała po zderzeniu łączą się i poruszają razem.

$$v_{1k} = v_{2k} = v_k$$

Z zasady zachowania pędu mamy

$$v_k = \frac{m_1 v_{1p} + m_2 v_{2p}}{m_1 + m_2}$$

105

Silnik raketowy

Dlaczego działa rakietą

Rakietą porusza się dzięki odrzutowi: wyrzucając masę (spaliny) w jedną stronę, rakietą otrzymuje przeciwny pęd. Ponieważ w krótkim czasie procesem rządzi zasada zachowania pędu, zmiana pędu rakiety jest równa impulsowi nadanemu wyrzucanej masie.

106

Silnik raketowy

Całkowity pęd rakiety przed wyrzutem $p_0 = mv$

Po wyrzucie masy rakietę ma masę $m - \delta m$ i prędkość $v + dv$, wyrzucona masa δm ma prędkość w zewnętrznym układzie odniesienia $v - u$,
 u – prędkość wyrzuconej masy względem rakiety.

Zatem

$$p_k = (m - \delta m)(v + dv) + \delta m(v - u)$$

$$p_k \approx mv + mdv - \delta mu$$

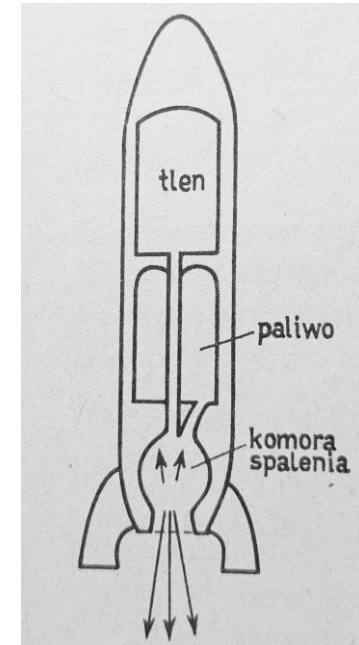
Z zasady zachowania pędu mamy $p_k = p_0 = mv$

$$mdv - \delta m u = 0$$

$$\delta m = -dm$$

$$mdv = -u dm$$

$$\int_{v_0}^{v_k} dv = -u \int_{m_0}^{m_k} \frac{dm}{m}$$



Źródło: J. Massalski, M. Massalska,
 Fizyka dla inżynierów, tom 1, WNT
 Warszawa 1980

107

Dynamika ruchu punktu materialnego po okręgu

Moment pędu jest miarą „ilości ruchu obrotowego” danego ciała. Określa, jak trudno jest zmienić stan jego ruchu obrotowego (podobnie jak pęd określa „ilość ruchu postępowego”). Im większy moment pędu, tym trudniej zmienić kierunek lub prędkość obrotu ciała.

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Gdzie $\vec{r}$ - wektor położenia względem wybranego punktu odniesienia,

$\vec{p}$ - pęd liniowy punktu materialnego

Dynamika ruchu punktu materialnego po okręgu

Analogicznie jak dla ruchu postępowego możemy policzyć pochodną po czasie momentu pędu

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = 0$$

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Wektor $\vec{M}$ - jest momentem siły.

Moment siły to miara zdolności siły do wywołania obrotu ciała wokół pewnego punktu lub osi. Innymi słowy: moment siły mówi jak bardzo dana siła „skręca” lub „obraca” ciało.

109

Dynamika ruchu punktu materialnego po okręgu

Dla ruchu po okręgu możemy zapisać

$$J = rp = rmv$$

$$v = r\omega$$

$$J = mr^2\omega$$

$$J = I\omega$$

Gdzie I - moment bezwładności.

$$I = mr^2$$

Moment bezwładności punktu materialnego względem danej osi obrotu to miara jego oporu wobec zmiany ruchu obrotowego wokół tej osi. Innymi słowy — mówi, jak trudno jest wprowadzić punkt materialny w obrót (lub zatrzymać go). 110

Zasada zachowania momentu pędu

Jeśli wypadkowy moment sił zewnętrznych działających na układ jest równy zero, to całkowity moment pędu układu nie ulega zmianie.

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{M}$$

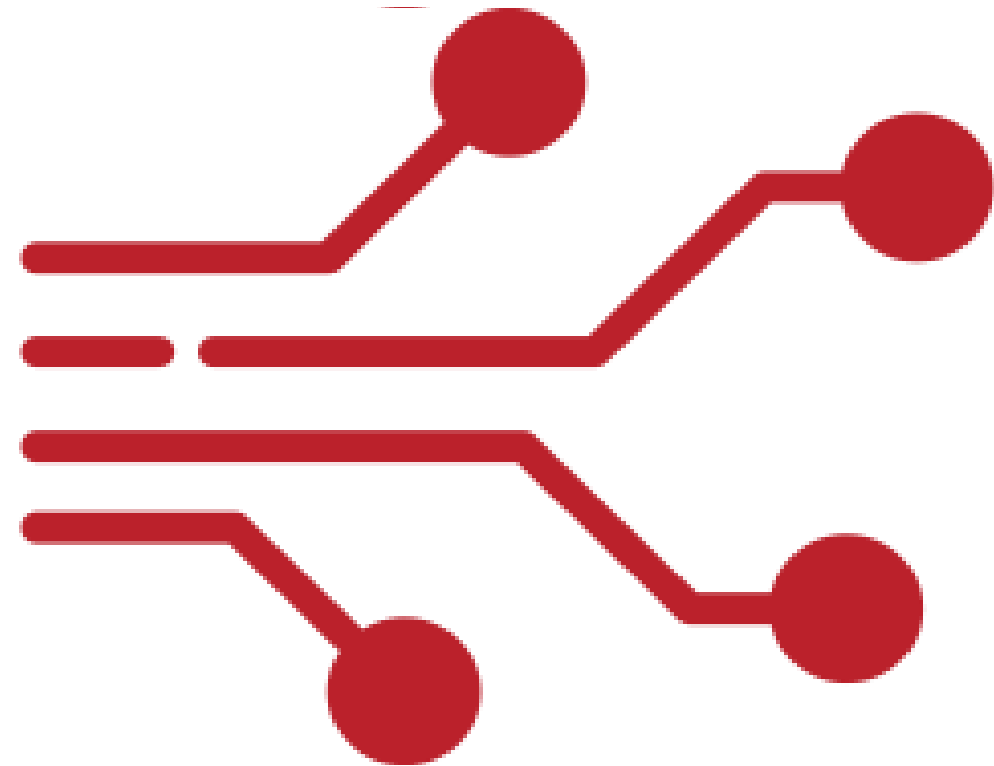
Jeżeli $\vec{M} = 0$:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = 0$$

$$\vec{J} = \text{const}$$

111

Dynamika bryły sztywnej



112

Dynamika bryły sztywnej

Bryła sztywna to zbiór punktów materialnych, w którym odległość między dowolnymi dwoma punktami pozostaje stała w czasie.

Bryła sztywna może wykonywać:

- ruch postępowy — każdy punkt bryły porusza się z taką samą prędkością (np. ciało spadające swobodnie),
- ruch obrotowy — bryła obraca się wokół pewnej osi (np. wirująca tarcza),
- ruch złożony — połączenie obu powyższych (np. toczące się koło).

113

Środek masy bryły sztywnej

Środek masy – jest to punkt reprezentujący średnie położenie ciała, dla którego masa poszczególnych fragmentów ciała stanowi wagę do obliczania tej średniej.

$$\vec{R}_{SM} = \frac{\sum m_j \vec{r}_j}{\sum m_j}$$

Dla ruchu ciał wyznaczymy:

$$\frac{d\vec{R}_{SM}}{dt} = \frac{\sum m_j \frac{d\vec{r}_j}{dt}}{\sum m_j} = \frac{\sum m_j \vec{v}_j}{M} = \frac{\sum \vec{p}_j}{M} = \frac{\vec{P}_{całk}}{M} = \vec{v}_{\dot{S}M}$$

114

Dynamika bryły sztywnej

Rozważmy bryłę sztywną obracającą się. Dla każdego z punktów bryły możemy przypisać moment pędu w postaci

$$J_i = I_i \omega$$

Dla całej bryły liczymy sumę momentów pędów

$$J = \sum J_i = \sum I_i \omega = \omega \sum I_i = I \omega$$

Gdzie I_i - moment bezwładności i-tego fragmentu bryły, a I - jest całkowitym

Momentem bezwładności bryły.

Moment bezwładności

Moment bezwładności określa, jak trudno jest wprowadzić bryłę w ruch obrotowy (lub zatrzymać jej obrót) wokół danej osi.
Im większy moment bezwładności, tym trudniej zmienić prędkość kątową ciała.

Masa → opór przed zmianą prędkości liniowej

Moment bezwładności → opór przed zmianą prędkości kątowej

Dla układu punktów mamy

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

116

Moment bezwładności

Moment bezwładności dla bryły sztywnej jako ciągłego obiektu zapiszemy jako całkę obejmującą całą bryłę

$$I = \int r^2 dm$$

W ogólności bryła może być niejednorodna – może mieć różną gęstość w obrębie objętości. W takiej sytuacji należy wyrazić element masy dm z pomocą elementu objętości dV i funkcji gęstości ρ

$$dm = \rho dV$$

Zatem całka ma postać:

$$I = \int_V r^2 \rho dV$$

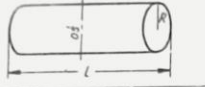
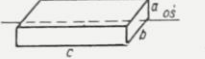
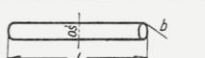
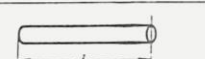
117

Moment bezwładności

Na rysunku obok widać przykładowe momenty bezwładności szeregu brył sztywnych.

Źródło: J. Massalski, M. Massalska,
Fizyka dla inżynierów, tom 1, WNT
Warszawa 1980

Tablica 6.1
Momenty bezwładności foremnych brył geometrycznych

Kształt ciała o masie M i oś obrotu	J
 Walec; wokół jego osi	$\frac{MR^2}{2}$
 Walec; wokół średnicy przez środek walca	$\frac{MR^2}{4} + \frac{Ml^2}{12}$
 Graniastosłup; wokół osi symetrii	$M \left(\frac{a^2 + b^2}{12} \right)$
 Kula; wokół średnicy	$\frac{2}{5} MR^2$
 Pręt; wokół osi przechodzącej przez środek, prostopadłej do pręta	$\frac{Ml^2}{12}$
 Pręt; wokół osi prostopadłej do pręta na jego końcu	$\frac{Ml^2}{3}$
 Cienka obręcz; wokół średnicy	$\frac{MR^2}{2}$
 Obręcz; wokół stycznej	$\frac{3}{2} MR^2$
 Pierścien; wokół jego osi	$\frac{M}{2} (R_1^2 + R_2^2)$

118

Moment bezwładności

Twierdzenie Steinera

Jeśli znamy moment bezwładności I_C względem osi przechodzącej przez środek masy, to moment względem osi równoległej, przesuniętej o odległość d , wynosi:

$$I = I_C + Md^2$$

gdzie M – całkowita masa bryły sztywnej.

119

Moment bezwładności

Moment bezwładności pręta

Przyjmijmy pręt o długości L i masie M , traktowany jako jednowymiarowy (masa rozłożona wzdłuż osi x). Oś obrotu przechodzi przez środek pręta i jest prostopadła do długości (np. oś z w punkcie $x=0$).

Gęstość liniowa $\lambda = \frac{M}{L}$. Element masy $dm = \lambda dx$. Odległość elementu od osi obrotu x . Zatem:

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dm = \lambda \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \lambda \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \lambda \frac{2}{3} \left(\frac{L}{2} \right)^3 = \frac{\lambda L^3}{12}$$

Podstawiając $\lambda = M/L$ mamy:

$$I = \frac{1}{12} ML^2$$

120

Moment bezwładności

Obliczenia momentu bezwładności cienkiego dysku jednorodnego

Rozważmy cienki, jednorodny dysk o masie M i promieniu R . Chcemy znaleźć moment bezwładności względem osi prostopadłej do płaszczyzny dysku i przechodzącej przez jego środek.

Rozbijamy dysk na cienkie koncentryczne pierścienie o promieniu r i grubości dr .

Powierzchniowa gęstość masy (masa na jednostkę pola):

$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$$

Masa elementarnego pierścienia o promieniu r i grubości dr :

$$dm = \sigma 2\pi r dr$$

Moment bezwładności pierścienia względem osi centralnej:

$$dI = r^2 dm = r^2 (\sigma 2\pi r dr) = 2\pi \sigma r^3 dr$$

Moment bezwładności

Całkowanie od środka do brzegu:

$$I = \int_0^R dI = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi\sigma \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi\sigma R^4}{2}$$

Podstawiając

$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$$

mamy

$$I = \frac{\pi}{2} \frac{MR^4}{\pi R^2} = \frac{1}{2} MR^2$$

122

Dynamika bryły sztywnej

Analogicznie jak dla ruchu obrotowego punktu materialnego możemy policzyć pochodną po czasie momentu pędu bryły sztywnej

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{M}$$
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{I\vec{\omega}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}$$

Dynamika bryły sztywnej

Zatem możemy równanie na moment siły dla bryły sztywnej zapisać w zwartej postaci, która stanowi treść drugiej zasady dynamiki dla bryły sztywnej

$$\vec{M} = I\vec{\epsilon}$$

Gdzie I - moment bezwładności bryły sztywnej, $\vec{\epsilon}$ - wektor przyspieszenia kąowego bryły w ruchu obrotowym.

124

Zasada zachowania momentu pędu bryły sztywnej

Jeśli wypadkowy moment sił zewnętrznych działających na bryłę sztywną jest równy zero, to całkowity moment pędu układu nie ulega zmianie.

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{M}$$

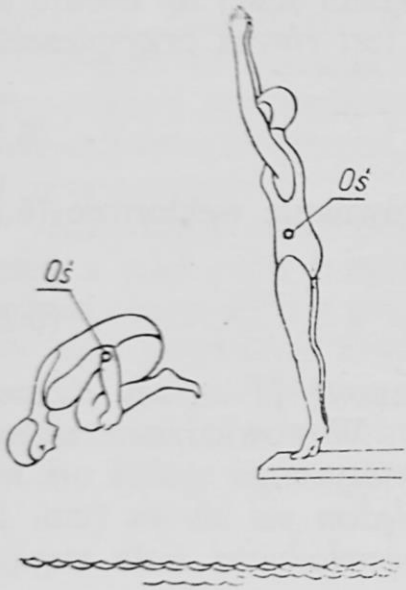
Jeżeli $\vec{M} = 0$:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = 0$$

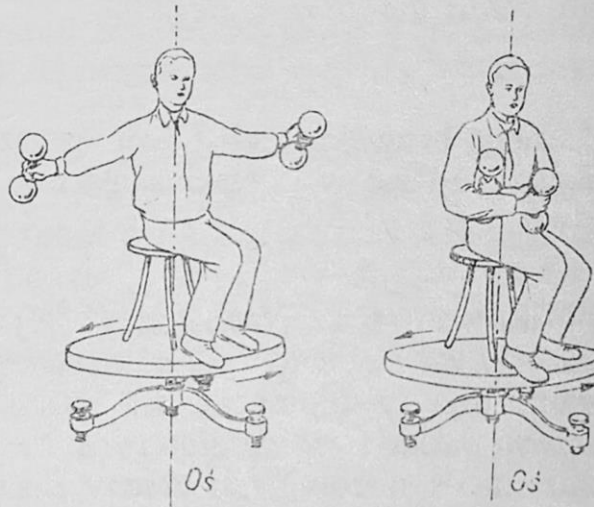
$$\vec{J} = \text{const}$$

125

Zasada zachowania momentu pędu bryły sztywnej



Rys. 6.17. Zasada zachowania krętu przy wykonywaniu salta (oś obrotu prostopadła do płaszczyzny rysunku)



Rys. 6.18. Zasada zachowania krętu przy zmianie momentu bezwładności

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$$

Źródło: J. Massalski, M. Massalska,
Fizyka dla inżynierów, tom 1, WNT
Warszawa 1980

126

Energia kinetyczna bryły sztywnej

Obliczmy energię kinetyczną bryły sztywnej, którą podzielimy na kawałki o masie m_j

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \sum m_j v_j^2 = \frac{1}{2} \sum m_j (\vec{v}_{\dot{S}M} + \vec{v}_j') \cdot (\vec{v}_{\dot{S}M} + \vec{v}_j')$$

$\vec{v}_{\dot{S}M}$ - prędkość środka masy, $\vec{v}_j'$ - prędkość j-tego elementu bryły w układzie środka masy.

Po wymnożeniu skalarnym (obliczeniu kwadratu wektora prędkości) otrzymujemy

$$E_{kin} = \frac{1}{2} M v_{\dot{S}M}^2 + E_{kin,rot}$$

Zatem na całkowitą energię kinetyczną składa się energia kinetyczna ruchu postępowego całej bryły i energia ruchu obrotowego tej bryły wokół środka masy.

127

Energia kinetyczna bryły sztywnej

Energię kinetyczną ruchu obrotowego możemy zapisać następująco

$$E_{kin,rot} = \frac{1}{2} \sum m_j v_j'^2$$

Gdzie dla ruchu obrotowego możemy zapisać

$$v_j' = r_j \omega$$

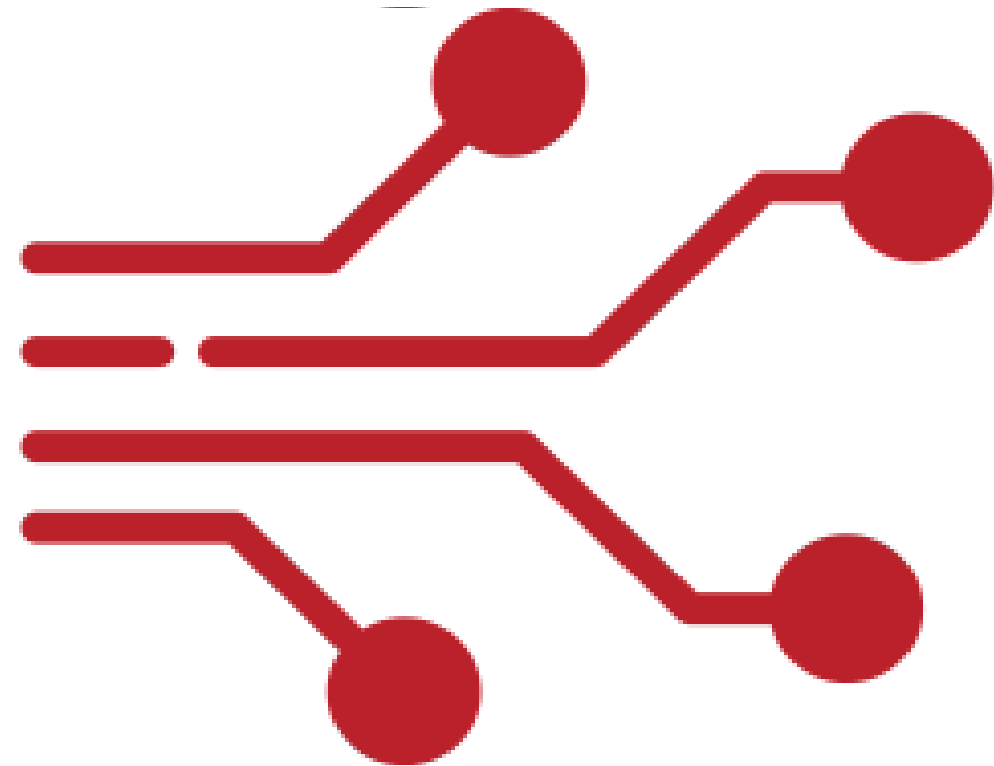
Podstawiając otrzymujemy wzór na energię rotacji bryły sztywnej:

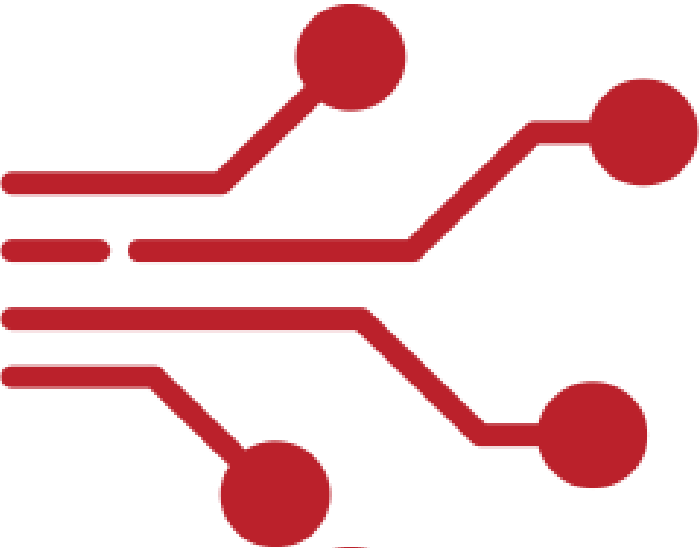
$$E_{kin,rot} = \frac{1}{2} \sum m_j (r_j \omega)^2 = \frac{1}{2} \omega \sum m_j r_j^2$$

$$E_{kin,rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

128

Teoria sprężystości





Teoria sprężystości to dział mechaniki ciała stałego, który opisuje, jak ciała odkształcają się pod wpływem przyłożonych sił oraz jak wracają do pierwotnego kształtu po ich usunięciu. Dotyczy ona materiałów sprężystych, czyli takich, które dążą do powrotu do stanu początkowego po ustaniu działania obciążenia.

130

Sprężystość ciał stałych

Podstawowe pojęcia

a) Ciało sprężyste

Ciało, które po ustaniu działania sił zewnętrznych powraca do pierwotnego kształtu i wymiarów.

Jeśli odkształcenia nie zanikają całkowicie — mówimy o ciałach plastycznych.

b) Obciążenie

Zewnętrzne działanie (siły, momenty, ciśnienie), powodujące odkształcenie ciała.

c) Odkształcenie

Zmiana kształtu lub wymiarów ciała pod wpływem obciążenia.
W teorii sprężystości zakłada się, że są to małe odkształcenia.

Sprężystość ciał stałych

Naprężenia (σ)

Naprężenie to miara wewnętrznych sił działających w materiale.

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

gdzie:

σ – naprężenie [Pa],

F – siła działająca prostopadle do powierzchni [N],

A – pole przekroju poprzecznego [m²].

Rodzaje naprężeń:

- Rozciągające / ściskające (osiowe),
- Ścinające (równoległe do powierzchni),
- Złożone (kombinacja powyższych).

132

Sprężystość ciał stałych

Odkształcenie (ϵ)

Odkształcenie jest miarą zmiany długości lub kształtu w stosunku do wymiarów początkowych.

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

gdzie:

ϵ – odkształcenie względne (bez jednostki),

Δl – zmiana długości,

l_0 – długość początkowa.

133

Sprężystość ciał stałych

Związek między naprężeniem a odkształceniem

Aby opisać zachowanie materiału, trzeba ustalić, jak naprężenie zależy od odkształcenia.

W przypadku ciał sprężystych, w granicach małych odkształceń, zależność ta jest liniowa — co prowadzi nas do prawa Hooke’a.

$$\sigma = E \epsilon$$

gdzie:

σ – naprężenie [Pa],

E – moduł Younga (moduł sprężystości podłużnej) [Pa],

ϵ – odkształcenie względne.

Im większy E , tym materiał jest „sztywniejszy”, czyli trudniej go odkształcić.

Sprężystość ciał stałych

Prawo Hooke'a

Niewielkich odkształceń siła odkształcająca ciało sprężyste jest **proporcjonalna do wydłużenia**:

$$F = k\Delta l$$

gdzie:

F — siła sprężystości [N],

k — **współczynnik sprężystości (stała sprężyny)** [N/m],

Δx — odkształcenie (wydłużenie lub skrócenie) [m].

135

Sprężystość ciał stałych

Związek między modułem Younga E a stałą sprężystości k

Rozważmy pręt o długości l_0 i przekroju A , rozciągany siłą F .
Z prawa Hooke'a:

$$F = k\Delta l$$

Z definicji modułu Younga:

$$E = \frac{Fl_0}{A\Delta l}$$

Podstawiając i przekształcając mamy

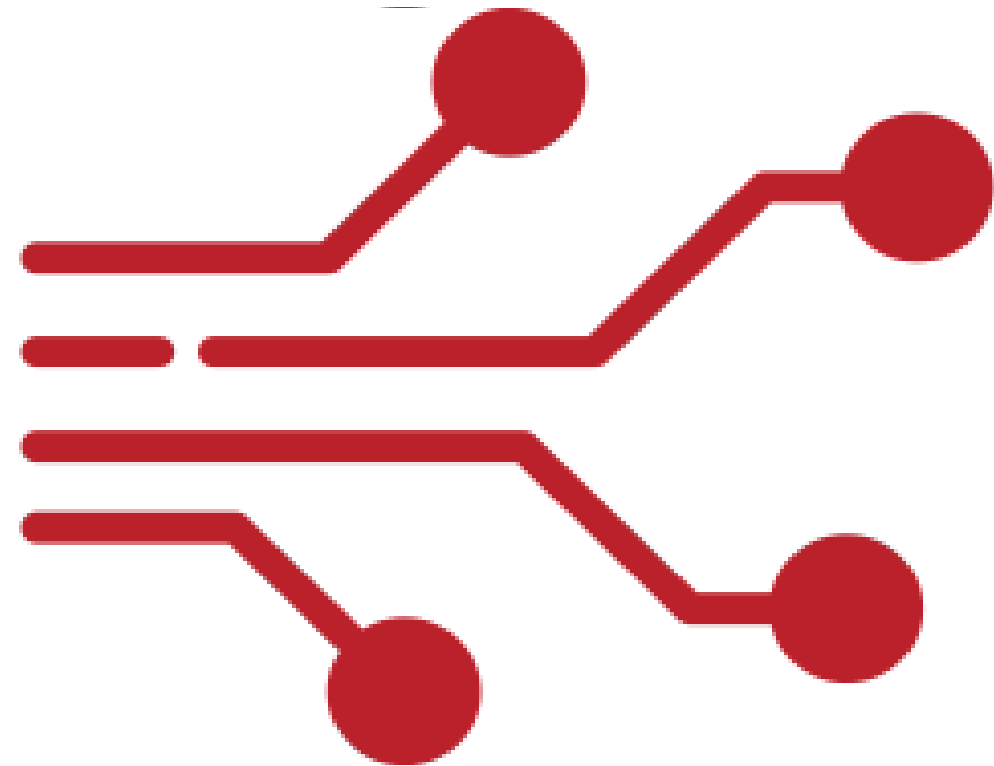
$$k = \frac{EA}{l_0}$$

Wniosek:

Stała sprężyny k jest proporcjonalna do modułu Younga i pola przekroju, a odwrotnie proporcjonalna do długości pręta.

136

Oscylator harmoniczny



137

Oscylator harmoniczny

$$\vec{F} = -k\vec{r}$$

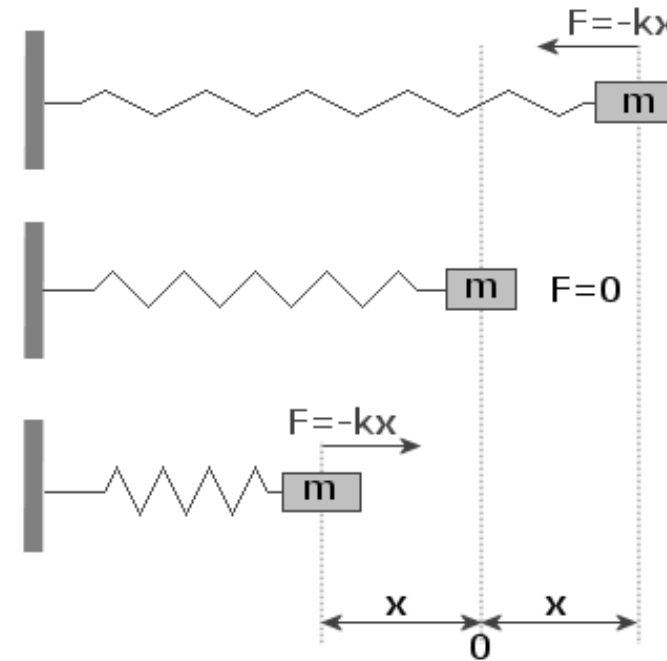
$$F = -kx$$

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -kx(t)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$



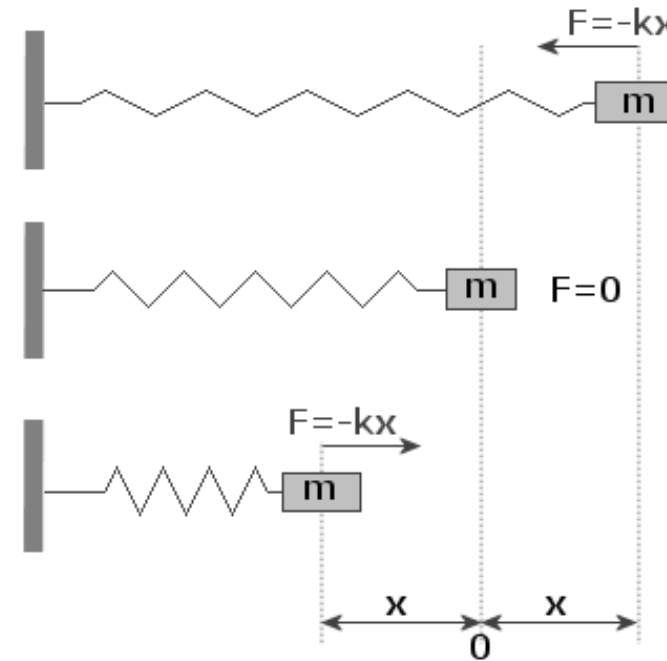
Oscylator harmoniczny

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi) = v(t)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) = a(t)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$



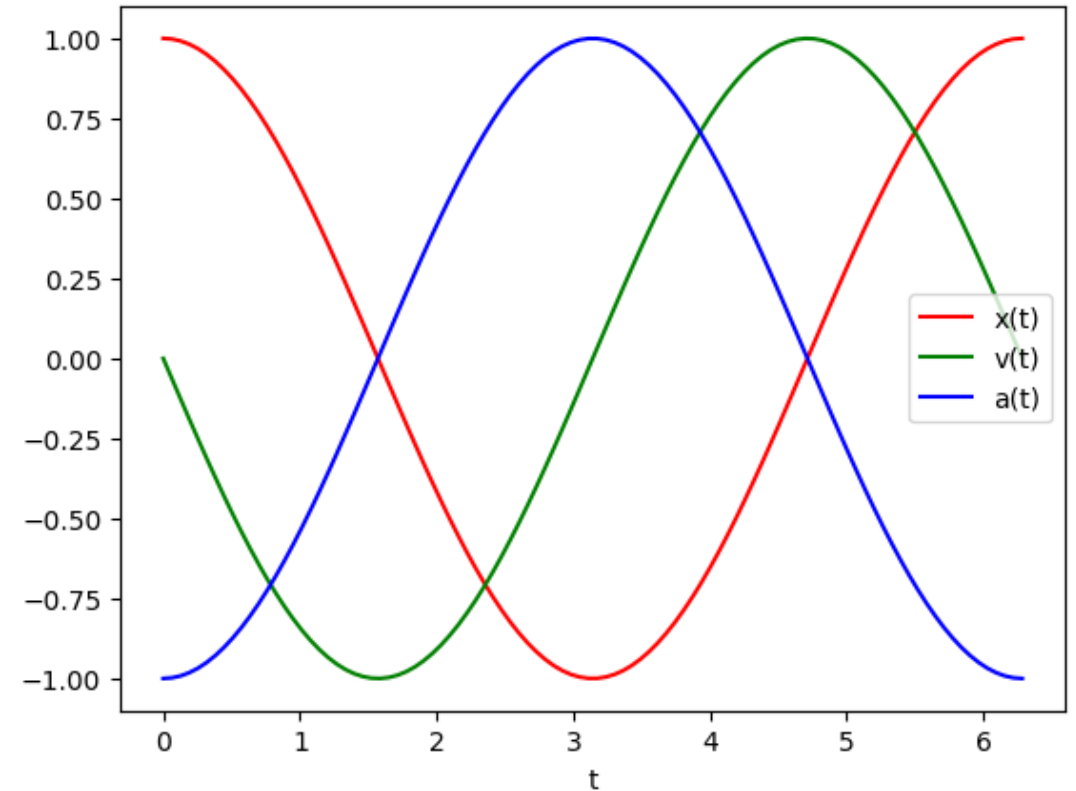
139

Oscylator harmoniczny

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi) = v(t)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) = a(t)$$



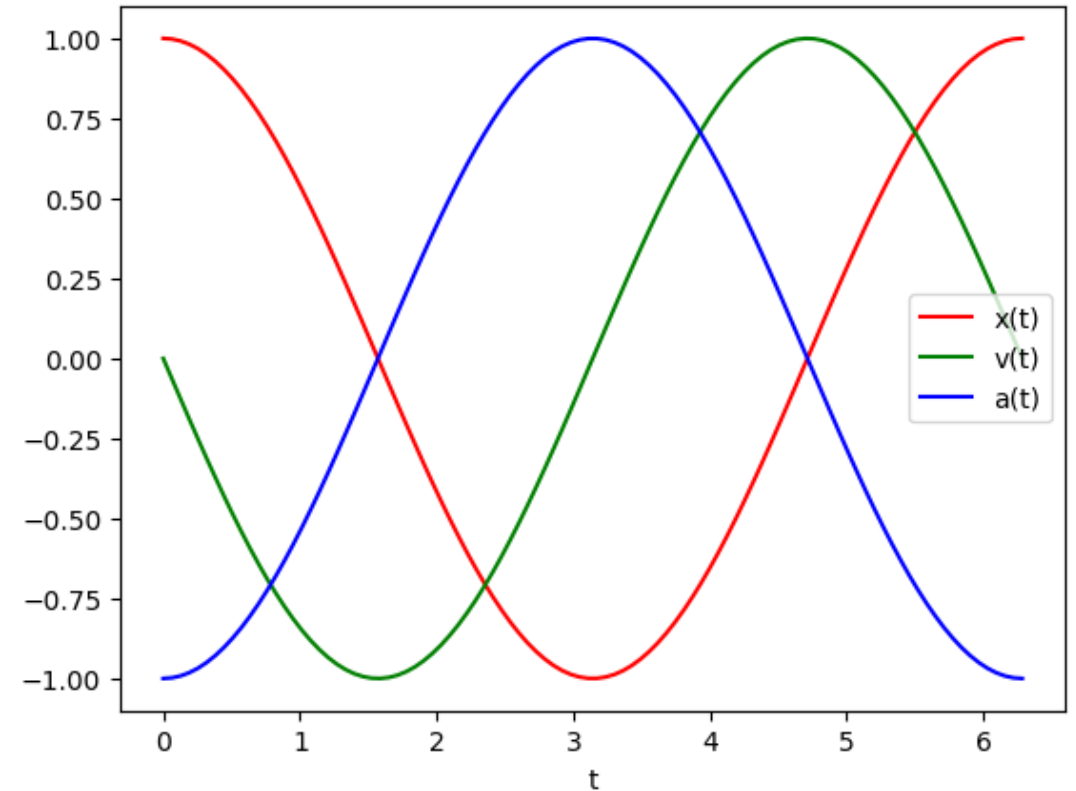
140

Okres drgań oscylatora harmonicznego

$$x(t) = A \cos(\omega t)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$



141

Energia drgań oscylatora harmonicznego

Policzmy pracę potrzebną na wychylenie oscylatora z położenia równowagi na odległość A:

$$W = \int_0^A kx dx = \frac{kx^2}{2} \Big|_0^A = \frac{kA^2}{2}$$

Ogólnie podstawiając za rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego otrzymujemy zależność na energię potencjalną drgań

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)}{2}$$

142

Energia drgań oscylatora harmonicznego

Policzmy teraz energię kinetyczną oscylatora podstawiając za prędkość wynik różniczkowania funkcji położenia po czasie

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \quad \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi) = v(t)$$

$$E_k = \frac{mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \phi)}{2} = \frac{kA^2 \sin^2(\omega t + \phi)}{2}$$

143

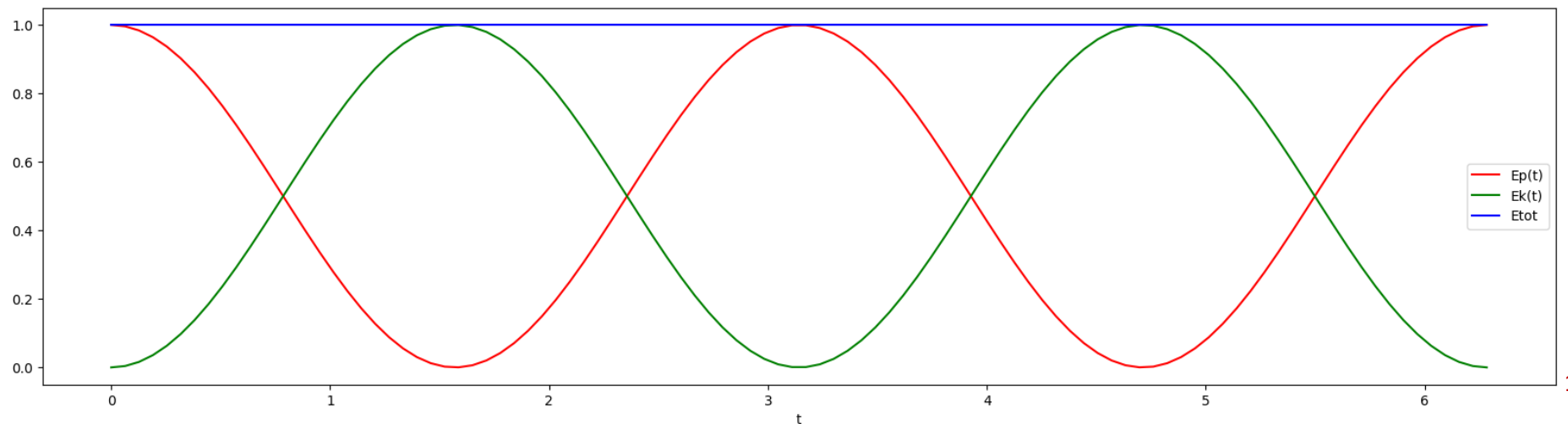
Energia drgań oscylatora harmonicznego

Suma tych energii jest energią całkowitą układu

$$E_{tot} = E_k + E_p$$

$$E_{tot} = \frac{kA^2}{2} (\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi))$$

$$E_{tot} = \frac{kA^2}{2}$$



144

Oscylator harmoniczny z tłumieniem

Rozważmy taki sam oscylator harmoniczny jak wcześniej ale z uwzględnieniem oporu ośrodka, w którym zachodzi ruch. Taka siła oporu związana z ośrodkiem w pierwszym przybliżeniu jest proporcjonalna do prędkości oscylatora.

Zapiszmy ogólne równanie ruchu dla tego oscylatora

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

145

Oscylator harmoniczny z tłumieniem

Przekształcając równanie ruchu do postaci

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

gdzie

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \beta = \frac{b}{2m}$$

są częstością własną układu (bez tłumienia) oraz współczynnikiem tłumienia.

146

Oscylator harmoniczny z tłumieniem

Rozwiązanie równania ruchu zależy od relacji pomiędzy częstotliwością własną ω_0 oraz współczynnikiem tłumienia β .

1. Małe tłumienie – $\beta < \omega_0$

Rozwiązanie ma postać:

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi)$$

gdzie

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Są to drgania okresowe z malejącą amplitudą.

Oscylator harmoniczny z tłumieniem

2. Tłumienie krytyczne – $\beta = \omega_0$

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\beta t}$$

Układ nie drga – powraca do równowagi najszybciej, jak to możliwe, bez oscylacji.

3. Tłumienie silne - $\beta > \omega_0$

$$x(t) = C_1 e^{-\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t} + C_2 e^{-\left(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t}$$

Układ nie wykonuje drgań — po prostu powoli wraca do położenia równowagi.

148

Oscylator harmoniczny z tłumieniem i wymuszeniem

Rozważmy podobny układ jak poprzednio, ale dodajmy do równania siłę wymuszającą drgania postaci

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

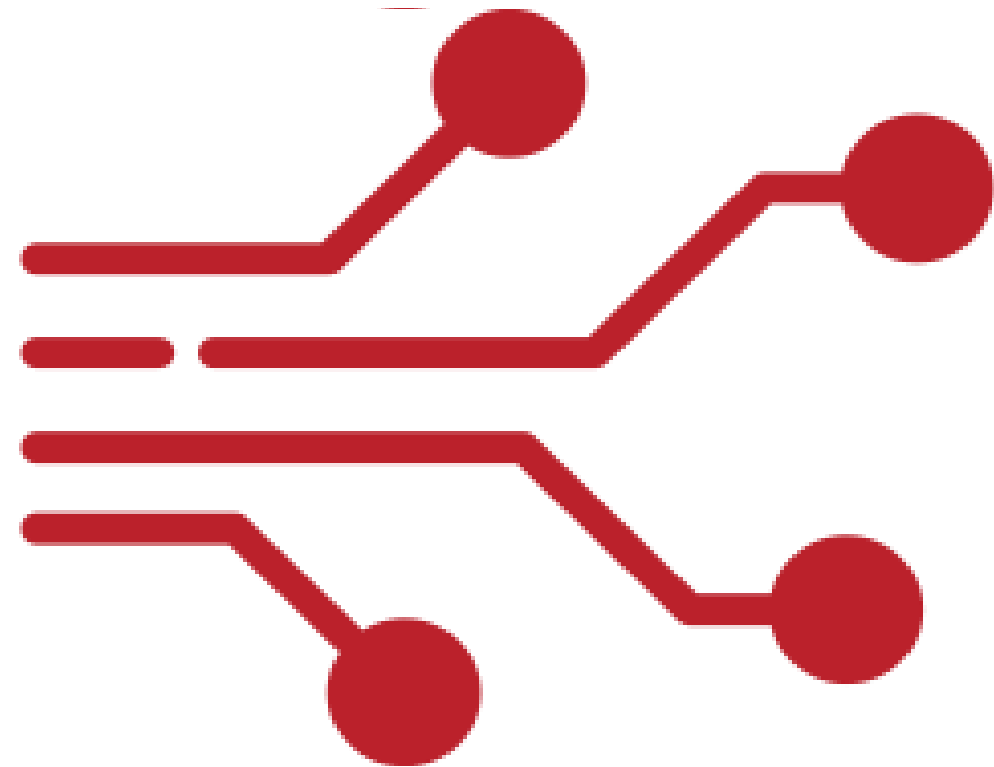
Z drugiej zasady dynamiki otrzymujemy równanie

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx + b \frac{dx}{dt} = F_0 \cos(\omega t)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + kx = f_0 \cos(\omega t)$$

149

Wahadło matematyczne i fizyczne



150

Wahadło matematyczne

$$\vec{M} = I\vec{\epsilon} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$I \frac{d^2\phi(t)}{dt^2} = -mgL \sin(\phi(t))$$

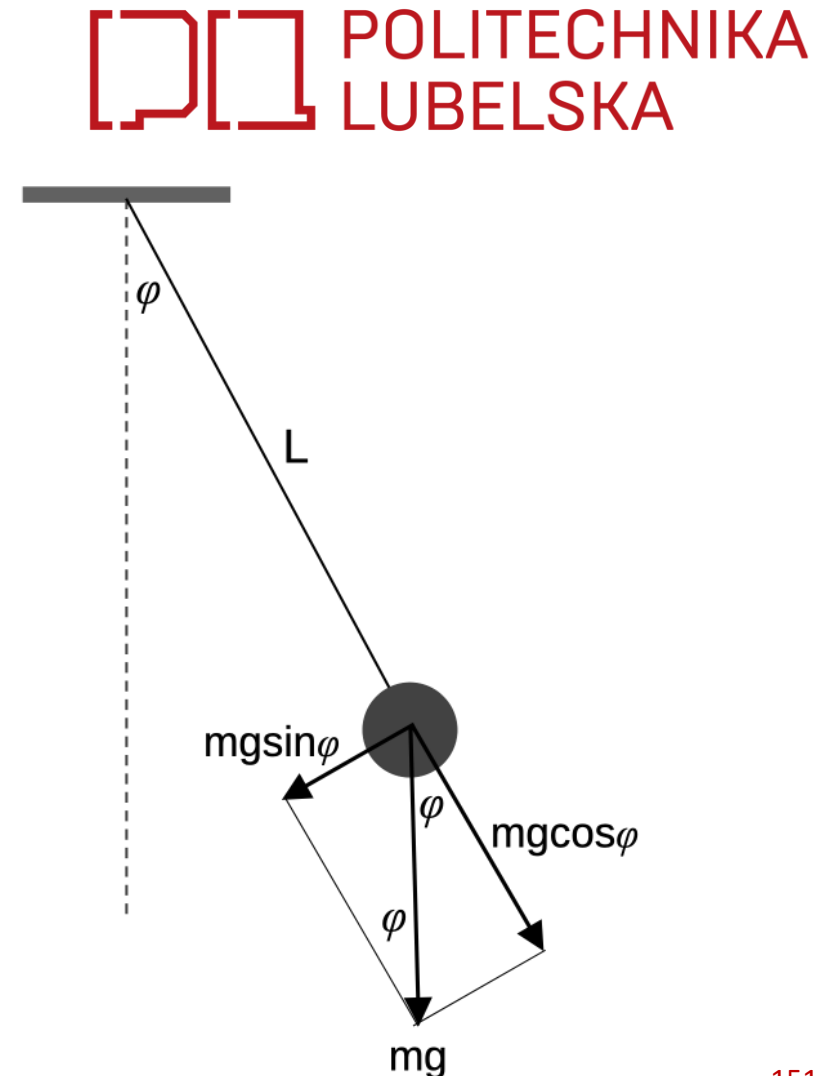
$$mL^2 \frac{d^2\phi(t)}{dt^2} = -mgL \sin(\phi(t))$$

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin(\phi(t)) = 0$$

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \omega^2 \sin(\phi(t)) = 0$$

$$I = mL^2$$

$$\omega^2 = \frac{g}{L}$$



151

Wahadło matematyczne

Dla małych wychyleń ϕ możemy przybliżyć

Funkcję sinus jako funkcję liniową kąta $\sin(\phi) \approx \phi$

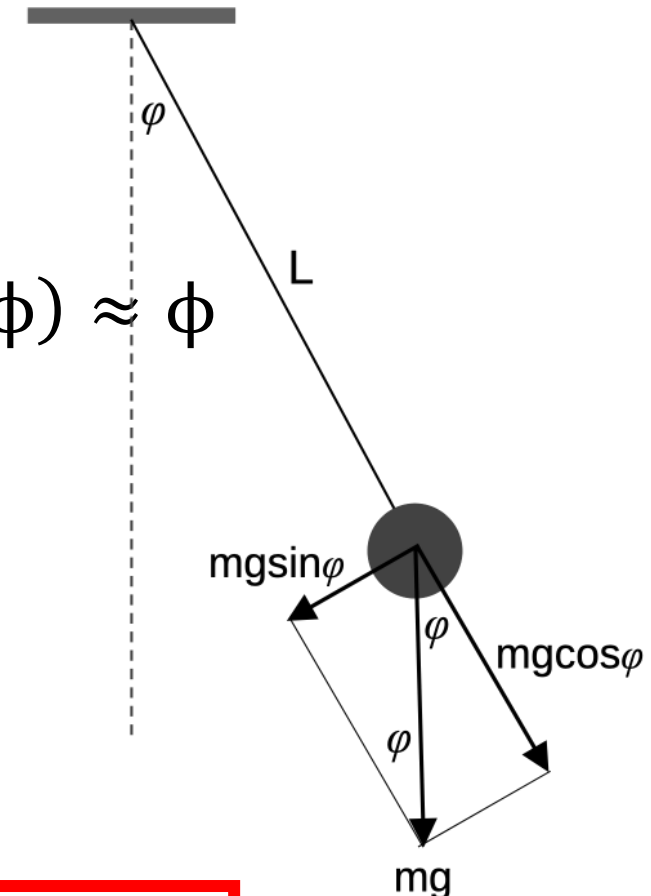
ϕ musi być mniejsze niż 7° .

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \omega^2\phi = 0$$

Równanie to rozwiązujemy podobnie
jak dla oscylatora harmonicznego

$$\phi(t) = A \sin(\omega t + \theta)$$

$$\phi(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$



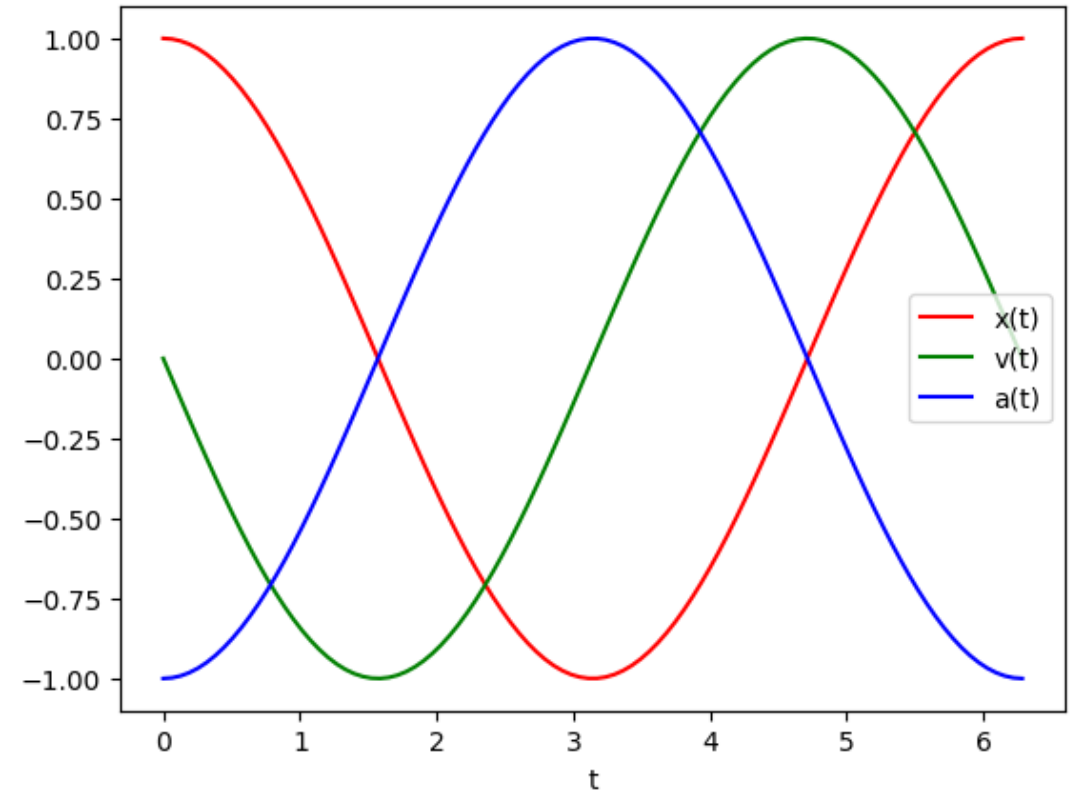
152

Okres wahań wahadła matematycznego

$$\phi(t) = A \cos(\omega t)$$

$$\omega^2 = \frac{g}{L} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$



153

Okres wahań wahadła matematycznego

Dla pełnego nieliniowego równania wahadła matematycznego

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin(\phi(t)) = 0$$

przybliżona postać równania na okres ma postać

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} A^2 + \frac{11}{3072} A^4 + \dots \right)$$

154

Wahadło fizyczne

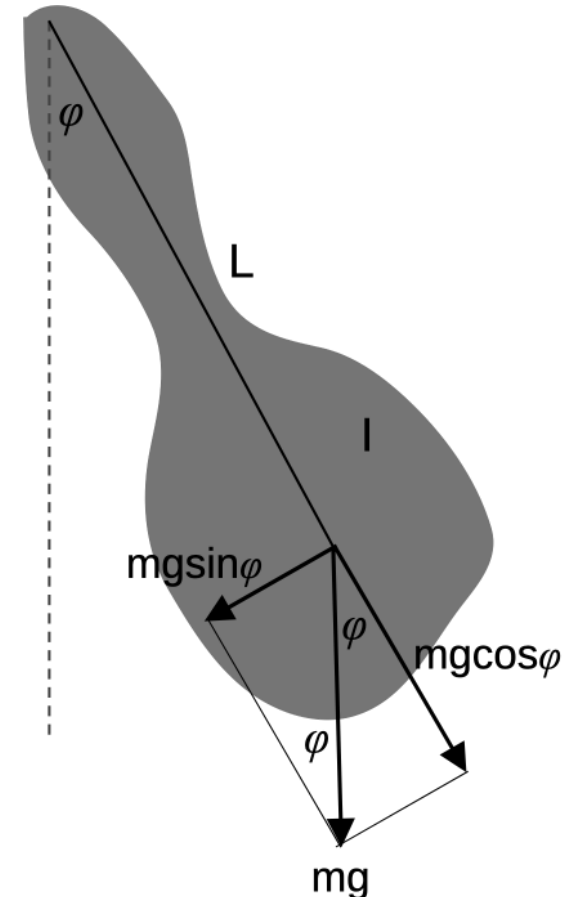
$$\vec{M} = I\vec{\epsilon} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$I \frac{d^2\phi(t)}{dt^2} = -mgL \sin(\phi(t))$$

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \frac{mgL}{I} \sin(\phi(t)) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{mgL}{I}$$

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \omega^2 \sin(\phi(t)) = 0$$



155

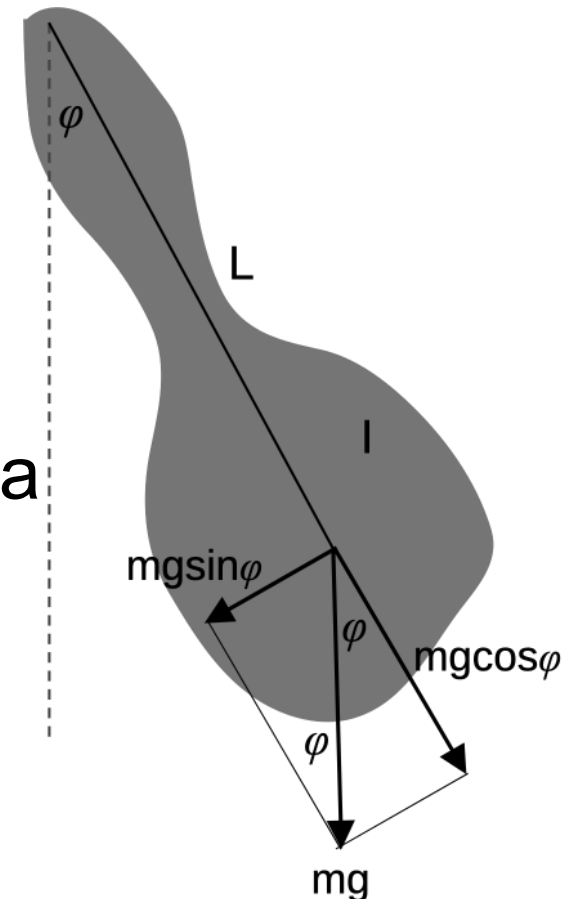
Wahadło fizyczne

Przy założeniu małych wychyleń

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \omega^2\phi(t) = 0$$

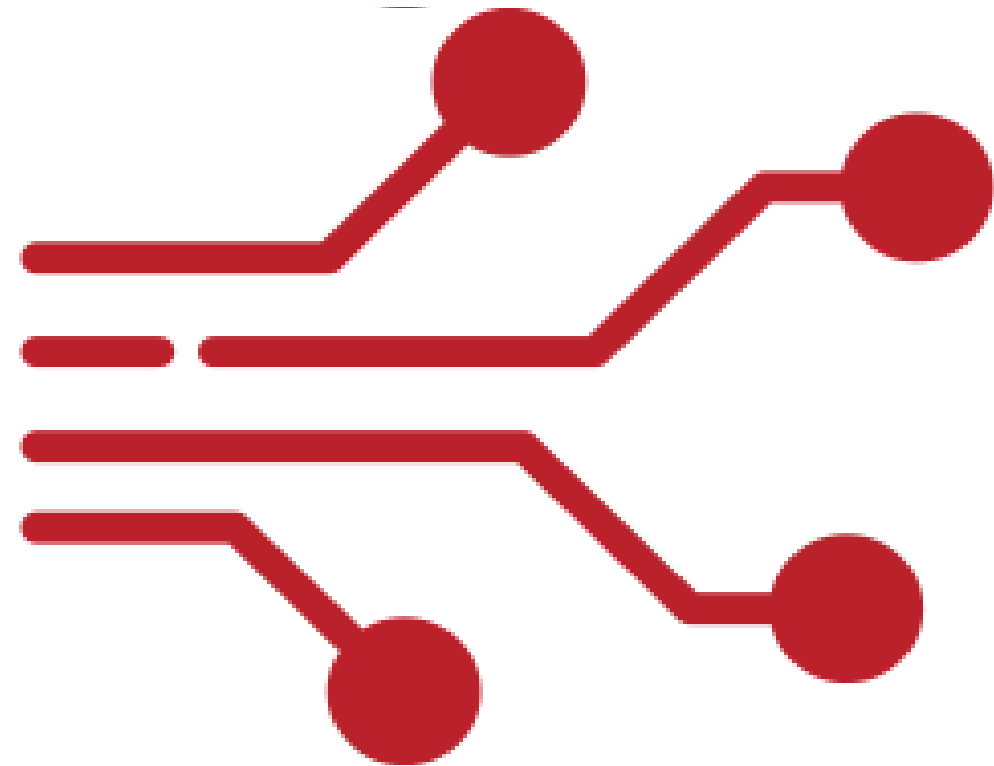
Można znaleźć rozwiązania jak dla wahadła matematycznego. Analogicznie szukamy okresu wahań.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}}$$



156

Równanie falowe



157

Równanie falowe

Rozważamy liniowy łańcuch n jednakowych mas rozmieszczonych wzdłuż osi x w odległościach a każda. Masę j -tą oznaczmy przez m , jej przesunięcie od położenia równowagi przez $u_j(t)$.

Sąsiadujące masy połączone są sprężynami o stałej sprężystości k . Pomijamy tłumienie i nieliniowości.

158

Równanie falowe

Siła działająca na j-tą masę pochodzi od dwóch sprężyn:

$$F_j = -k(u_j - u_{j-1}) - k(u_j - u_{j+1})$$

$$F_j = k(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1})$$

Z drugiej zasady dynamiki mamy

$$m \frac{d^2 u_j}{dt^2} = k(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1})$$

To jest podstawowe równanie dyskretne (różnicowe) dla każdego $j=1, 2, 3, \dots, n$.

159

Równanie falowe

W granicy $a \rightarrow 0$, przy jednoczesnym $m \rightarrow 0$ tak, by gęstość liniowa $\rho = m/a$ oraz „sztywność na jednostkę długości” $K = ka$ pozostały skończone, możemy zastąpić indeksowane przemieszczenia funkcją $u(x, t)$

$$u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1} \approx ka^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Stąd dostajemy

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx ka^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

160

Równanie falowe

Stąd otrzymujemy jednowymiarowe równanie falowe postaci

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$c = a \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

gdzie c – prędkość propagacji fali

161

Równanie falowe – przykładowe rozwiązania

Fala płaska biegnąca

Rozwiązanie ma postać

$$u(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$$

gdzie A - amplituda, k - liczba falowa, ω - częstość i ϕ – przesunięcie fazowe.

To rozwiązanie opisuje falę biegnącą w prawo z prędkością fazową

$$c = \frac{\omega}{k}$$

162

Równanie falowe – przykładowe rozwiązania

Fala stojąca

Dla odcinka $0 \leq x \leq L$ i zerowych końców $u(0, t) = u(L, t) = 0$ mamy

$$u_n(x, t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t + \phi_n)$$

gdzie

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L}, n = 1, 2, \dots$$

Jest to równanie fali stojącej np. opisującej drgania struny zaczepionej na końcach.

Zasada Huygensa, superpozycja i interferencja

Zasada Huygensa mówi, że każdy punkt czoła fali można traktować jako źródło wtórnych fal kulistych, a nowa pozycja czoła fali w kolejnym czasie jest styczną do wszystkich tych fal kulistych.

- Tłumaczy rozchodzenie się fal w przestrzeni,
- Pozwala zrozumieć ugięcie fal (dyfrakcję) i interferencję,
- Stosuje się do fal mechanicznych (np. wodnych) i elektromagnetycznych (światło, fale radiowe).

164

Zasada Huygensa, superpozycja i interferencja

Zasada superpozycji - jeżeli w tym samym punkcie w tym samym czasie zachodzą dwa lub więcej drgań, to całkowite drganie jest sumą wektorową (geometryczną lub algebraiczną) drgań składowych.

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

Skutki superpozycji:

- Możliwość wzmacniania się drgań (interferencja konstruktywna)
- Możliwość osłabiania się drgań (interferencja destruktywna)
- Tworzenie fal stojących, jeśli drgania mają jednakową amplitudę i częstotliwość, ale przeciwne kierunki.

165

Zasada Huygensa, superpozycja i interferencja

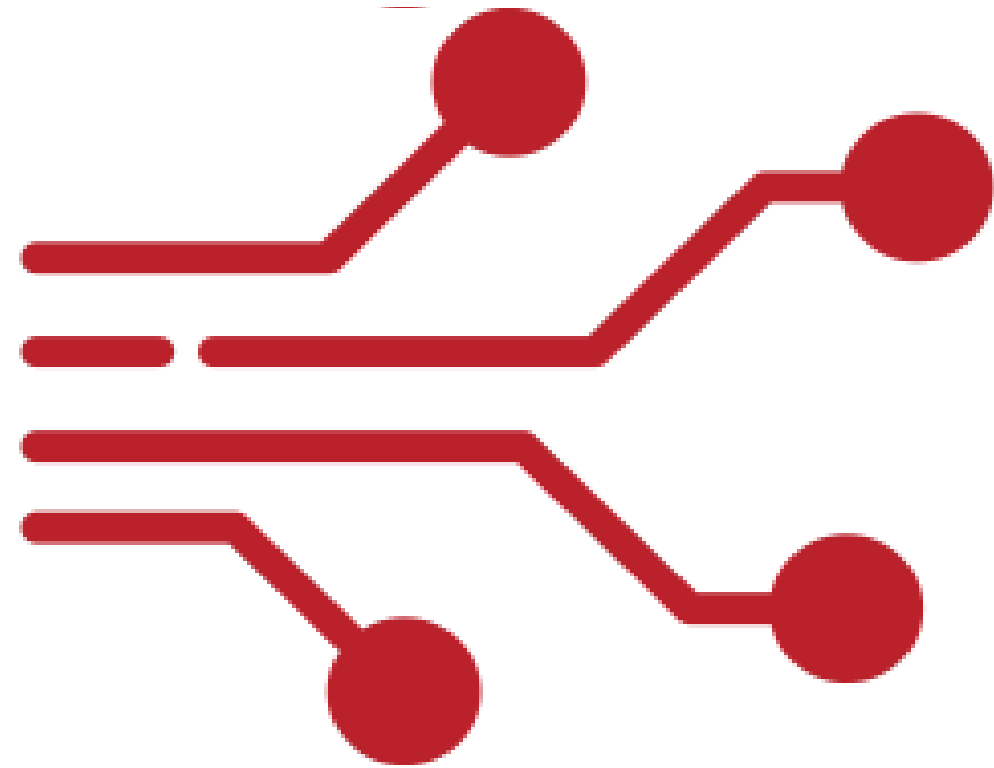
Interferencja to efekt wynikający z zasady superpozycji, gdy dwie fale spotykają się w tym samym punkcie.

Rodzaje interferencji:

- Konstruktywna (wzmocnienie) - fale są zgodne fazowo ($\Delta\phi=0$ lub całkowite wielokrotności 2π), amplituda całkowita: $A=A_1+A_2$
- Destruktywna (osłabienie) - fale są przeciwnie fazowe ($\Delta\phi=\pi$), amplituda całkowita: $A=|A_1-A_2|$
- Częściowa interferencja - fale mają różne fazy i amplitudy $\rightarrow$ powstaje amplituda pośrednia.

166

Prawo powszechnego ciążenia



167

Pierwsze prawo Keplera

Każda planeta porusza się wokół Słońca po elipsie, przy czym Słońce znajduje się w jednym z jej ognisk.

Znaczenie:

- Planety nie poruszają się po okręgu, lecz po elipsie (czyli spłaszczonym okręgu).
- W jednym ognisku elipsy znajduje się Słońce, a w drugim — nic.
- Odległość planety od Słońca zmienia się w trakcie obiegu: w peryhelium (najbliżej Słońca) planeta jest najszybsza, w aphelium (najdalej od Słońca) jest najwolniejsza.

168

Drugie prawo Keplera

Promień wodzący planety (odcinek łączący planetę ze Słońcem) zakreśla w równych odstępach czasu równe pola.

Znaczenie:

- Planeta nie porusza się ze stałą prędkością, lecz zmienia ją w zależności od położenia na orbicie.
- W pobliżu Słońca porusza się szybciej, a dalej od niego wolniej.
- Jednak w danym czasie Δt pole powierzchni zakreślone przez promień wodzący jest zawsze takie samo:

$$\frac{dA}{dt} = \text{const}$$

czyli moment pędu planety względem Słońca jest zachowany.

169

Trzecie prawo Keplera

Kwadraty okresów obiegu planet wokół Słońca są proporcjonalne do sześciąt ich średnich odległości od Słońca.

$$\frac{T^2}{a^3} = const$$

gdzie:

- T — okres obiegu planety wokół Słońca,
- a — półoś wielka orbity (średnia odległość od Słońca).

Znaczenie:

- Planety bardziej oddalone od Słońca poruszają się wolniej i mają dłuższy okres obiegu.
- Stała proporcjonalności jest taka sama dla wszystkich planet w Układzie Słonecznym.

170

Prawo powszechnego ciążenia

W 1687 roku Isaac Newton sformułował w dziele *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (tzw. *Principia*) prawo mówiące, że:

Każde dwa ciała materialne przyciągają się wzajemnie siłą proporcjonalną do iloczynu ich mas i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości między nimi.

$$F_g = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

171

Prawo powszechnego ciążenia

Wektorowo oddziaływanie grawitacyjne zapiszemy jako:

$$\vec{F}_g = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

gdzie:

m_1, m_2 - masy oddziałujących ciał, r – odległość między ciałami,

G – stała grawitacji równa $6,674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}$,

$\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ - jest wektorem jednostkowym wyznaczającym kierunek działającej siły
leżącym na prostej łączącej oba ciała.

172

Prawo powszechnego ciążenia

Siła grawitacji działa wzdłuż linii łączącej środki mas obu ciał.

Jest siłą wzajemną – zgodnie z III zasadą Newtona:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Ciała przyciągają się z siłami równymi co do wartości, lecz przeciwnie skierowanymi.

Siła ta jest zawsze przyciągająca, nigdy odpychająca.

Działa na dowolną odległość (teoretycznie nieskończoną), choć maleje bardzo szybko z odległością (z r^2).

173

Prawo powszechnego ciążenia

Znaczenie i zastosowania

Prawo to pozwoliło:

- obliczać ruch planet i satelitów,
- wyjaśnić spadanie ciał na Ziemię,
- zrozumieć ruch Księżyca,
- przewidzieć istnienie nowych planet (np. Neptuna).
- Newton połączył w jedno zjawisko to, co dotąd wydawało się odrębne:

174

Spadanie jabłka i ruch Księżyca to ten sam mechanizm — grawitacja.

Prawo powszechnego ciążenia

Jak Newton doszedł do prawa powszechnego ciążenia

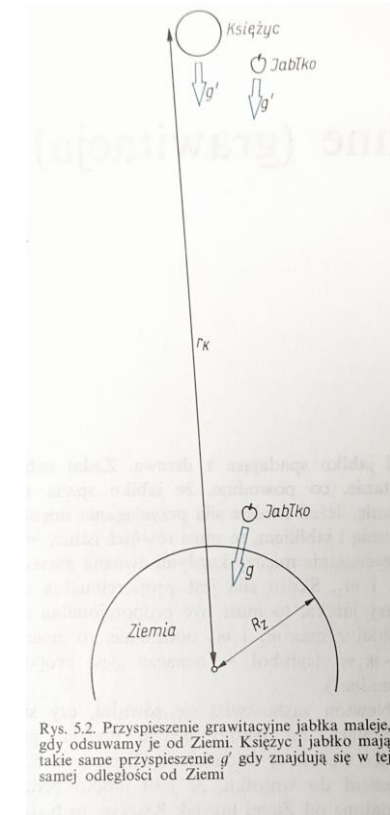
Newton przyrównał przyspieszenie dośrodkowe Księżyca do przyspieszenia ziemskiego z jakim spadają przedmioty na Ziemię. Można wyrazić to wzorami:

$$a = \frac{v^2}{r_K} = \frac{4\pi r_K}{T^2}$$

gdzie r_K - odległość do Księżyca, T – okres obiegu Księżyca wokół Ziemi.

Dzieląc przez przyspieszenie ziemskie mamy

$$\frac{a}{g} = 1/3590 \approx (1/60)^2 \approx R_Z^2/r_K^2$$



Rys. 5.2. Przyspieszenie grawitacyjne jabłka maleje, gdy odsuwamy je od Ziemi. Księżyc i jabłko mają takie same przyspieszenie g' gdy znajdują się w tej samej odległości od Ziemi

J. Orear, Fizyka, WNT, Warszawa 1998

175

Doświadczenie Cavendisha

Henry Cavendish (1731–1810) był angielskim fizykiem i chemikiem, znanym z niezwyklej precyzji pomiarów. W 1798 roku przeprowadził eksperyment, którego celem było:

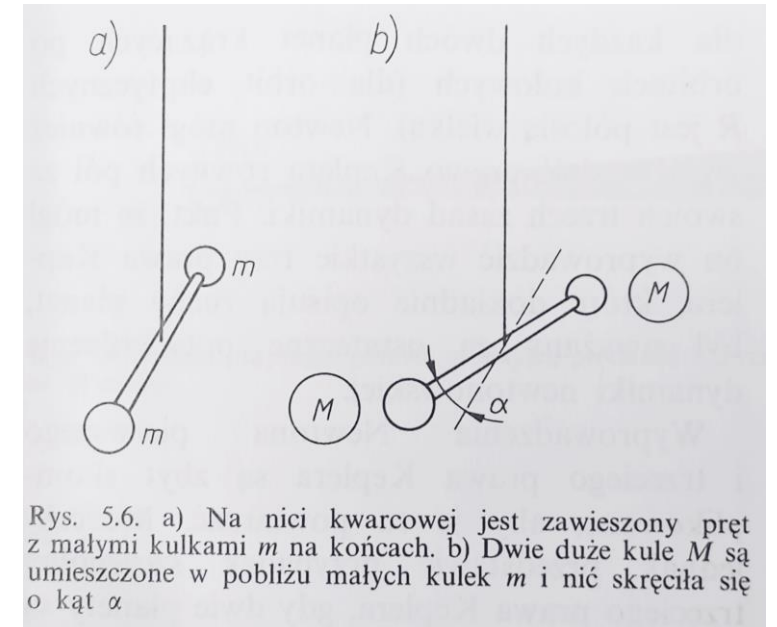
- zmierzenie siły grawitacyjnego przyciągania między ciałami o znanej masie w warunkach laboratoryjnych.
- Dzięki temu mógł wyznaczyć stałą grawitacji G oraz masę Ziemi.

176

Doświadczenie Cavendisha

Cavendish użył niezwykle czułego urządzenia, zwanego wagą skręceń przedstawioną na rysunku.

- Duże kule M przyciągają małe kule m grawitacyjnie.
- To powoduje skręcenie drutu o kąt α .
- Siła grawitacji jest równoważona przez moment sprężystości drutu.
- Mierzając ten kąt, Cavendish mógł obliczyć moment skręcający, a więc i siłę przyciągania.



J. Orear, Fizyka, WNT, Warszawa 1998

Doświadczenie Cavendisha

Dla równowagi momentów sił mamy:

$$\vec{M}_{\text{skręcający}} = \vec{M}_{\text{grawitacyjny}}$$
$$k\alpha = Fr = G \frac{Mm}{r^2} r$$
$$G = \frac{k\alpha r}{Mm}$$

gdzie k – stała sprężystości skrętnej nici kwarcowej, α – kąt skręcenia, r – odległość między kulami, M i m – masy kul.

Wyznaczyć $G = 6,75 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$.

178

Prawo powszechnego ciążenia

Znajdźmy ze wzorów na oddziaływanie grawitacyjne mas i siły dośrodkowej relację opisywaną przez trzecie prawo Keplera dla planet krążących wokół Słońca.

$$F_g = G \frac{Mm}{r^2}, \quad F = \frac{mv^2}{r}$$
$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2} \quad v = r\omega, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = G \frac{M}{r^3}$$

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = \text{const}$$

179

Pierwsza prędkość kosmiczna

$$F_g = G \frac{Mm}{r^2}, \quad F = \frac{mv^2}{r}$$

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$v^2 = \frac{GM}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

180

Pierwsza prędkość kosmiczna

$$F_g = G \frac{Mm}{r^2}, \quad F = \frac{mv^2}{r}$$
$$mg = G \frac{Mm}{r^2} \qquad gr^2 = GM$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{gr} = 7,9 \frac{km}{s}$$

181

Druga prędkość kosmiczna

Zapiszmy bilans energetyczny dla rakiety

$$E_C = -G \frac{Mm}{R_Z} + \frac{mv_0^2}{2} = -G \frac{Mm}{\infty} + \frac{mv_K^2}{2} = 0$$

Po przekształceniach wyznaczamy v :

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R_Z}} = \sqrt{2gR_Z} = \sqrt{2}v_I = \\ = 11,2 \frac{km}{s}$$

182

Natężenie pola grawitacyjnego

Natężenie pola grawitacyjnego w danym punkcie to siła grawitacji działająca na jednostkową masę próbną umieszczoną w tym punkcie.

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}_g}{m}$$

Z prawa powszechnego ciążenia mamy

$$\gamma = G \frac{M}{r^2}$$

Kierunek wektora $\vec{\gamma}$ jest zawsze dośrodkowy – wskazuje w stronę masy wytwarzającej pole.

183

Natężenie pola grawitacyjnego

Na powierzchni Ziemi natężenie wynosi

$$\gamma = G \frac{M_Z}{R_Z^2}$$

Podstawiając wartości:

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}, \quad M_Z = 5,97 \times 10^{24} kg, \quad R_Z = 6,37 \times 10^6 m$$

Otrzymujemy:

$$g \approx 9,81 \frac{m}{s^2}$$

184

Natężenie pola grawitacyjnego

Przybliżenie pola jednorodnego przy powierzchni Ziemi.

Należy zależność natężenia grawitacyjnego dla punktu nad powierzchnią Ziemi rozwinąć w szereg Taylora:

$$\gamma(h) = G \frac{M_Z}{(R_Z + h)^2}$$
$$\gamma(h) \approx \gamma_0 \left(1 - \frac{2h}{R_Z} + \dots \right)$$

dla małych wysokości nad powierzchnią $h \ll R_Z$ otrzymujemy przybliżenie jednorodnego pola grawitacyjnego

$$\gamma(h) \approx \gamma_0 = g$$

Praca w polu grawitacyjnym

Jeśli ciało o masie m porusza się w polu grawitacyjnym z punktu A do punktu B, to siła grawitacji wykonuje pracę

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} \left(-G \frac{Mm}{r^2} \right) dr$$

Po scałkowaniu dostajemy

$$W_{AB} = GMm \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

186

Potencjał pola grawitacyjnego

Potencjał pola grawitacyjnego w danym punkcie to praca, jaką wykonałaby siła grawitacji przy przeniesieniu jednostkowej masy z nieskończoności do tego punktu.

$$V = -\frac{W}{m}$$
$$V(r) = -\frac{GM}{r}$$

Jednostką potencjału grawitacyjnego jest J/kg. Potencjał jest ujemny (bo pole przyciąga – wykonuje pracę dodatnią, gdy ciało spada).

187

Energia potencjalna pola grawitacyjnego

Energia potencjalna ciała o masie m w polu masy M :

$$U(r) = mV(r) = -\frac{GMm}{r}$$

Zmiana energii potencjalnej między punktami A i B:

$$\Delta U = U_B - U_A = -GMm \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

i jest równa pracy wykonanej na przeniesienie ciała w polu grawitacyjnym z punktu A do B.

188

Pole zachowawcze

Pole grawitacyjne jest **polem zachowawczym**, ponieważ:

$$W_{AB} = -\Delta U$$

i praca nie zależy od drogi, a tylko od położenia końcowego i początkowego.

Oznacza to, że w ruchu po torze zamkniętym sumaryczna praca wynosi:

$$W_{całkowite} = 0$$

Związek między natężeniem a potencjałem grawitacyjnym

Jak znaleźć natężenie/siłę pola grawitacyjnego znając potencjał grawitacyjny.

Skoro potencjał pola grawitacyjnego jest całką siły grawitacji po odległości to należy wykonać operację odwrotną i policzyć (dla przypadku jednowymiarowego):

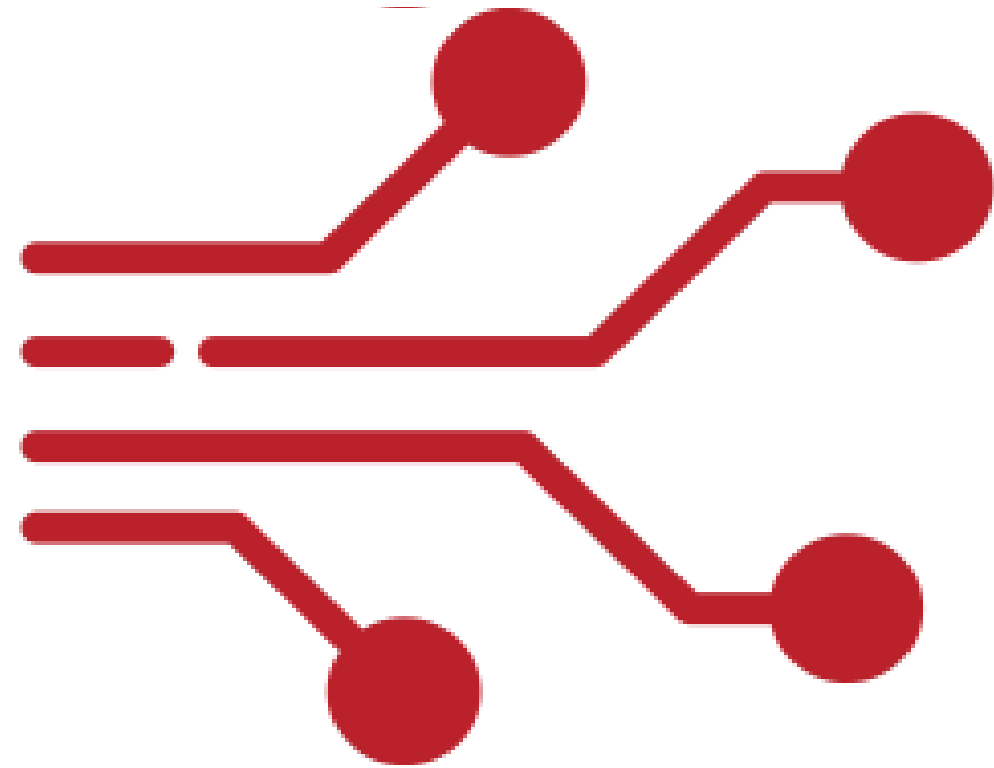
$$\gamma(r) = -\frac{dV(r)}{dr}$$

Wektorowo dla dowolnego pola zapiszemy:

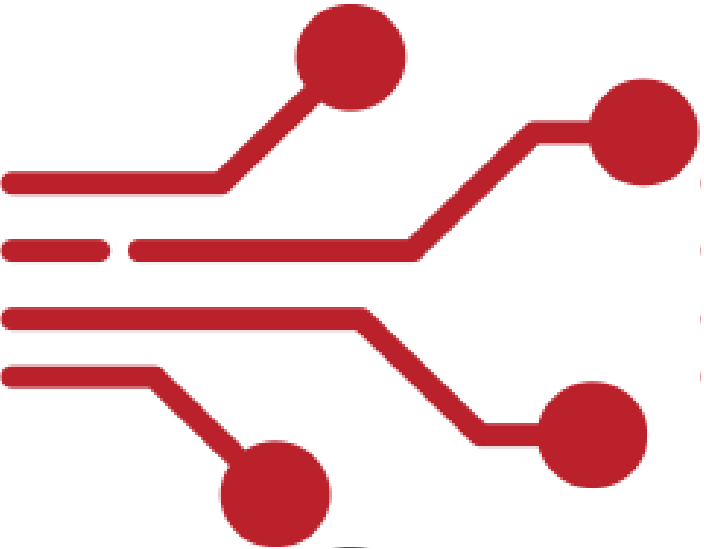
$$\vec{\gamma} = -\nabla V = -gradV$$

190

Hydrostatyka



191



Czym jest ciecz w ujęciu fizycznym?

Ciecz to stan skupienia materii, który:

- ma stałą objętość, ale nie ma własnego kształtu – przyjmuje kształt naczynia,
- cząsteczki mogą się przemieszczać względem siebie (w przeciwieństwie do ciał stałych).

W hydrostatyce analizujemy ciecz idealną – nieściśliwą, bez lepkości, w stanie spoczynku.

192

Ciśnienie

Ciśnienie p to siła nacisku na jednostkę powierzchni:

$$p = \frac{F}{S}$$

Gdzie F - siła działająca prostopadle do powierzchni S .

Jednostką ciśnienia w układzie SI jest Pascal

$$[p] = 1Pa = 1N/m^2$$

Prawo Pascala

Jeżeli na ciecz zamkniętą w naczyniu wywieramy ciśnienie z zewnątrz, to ciśnienie to rozchodzi się jednakowo we wszystkich kierunkach i do wszystkich punktów cieczy.

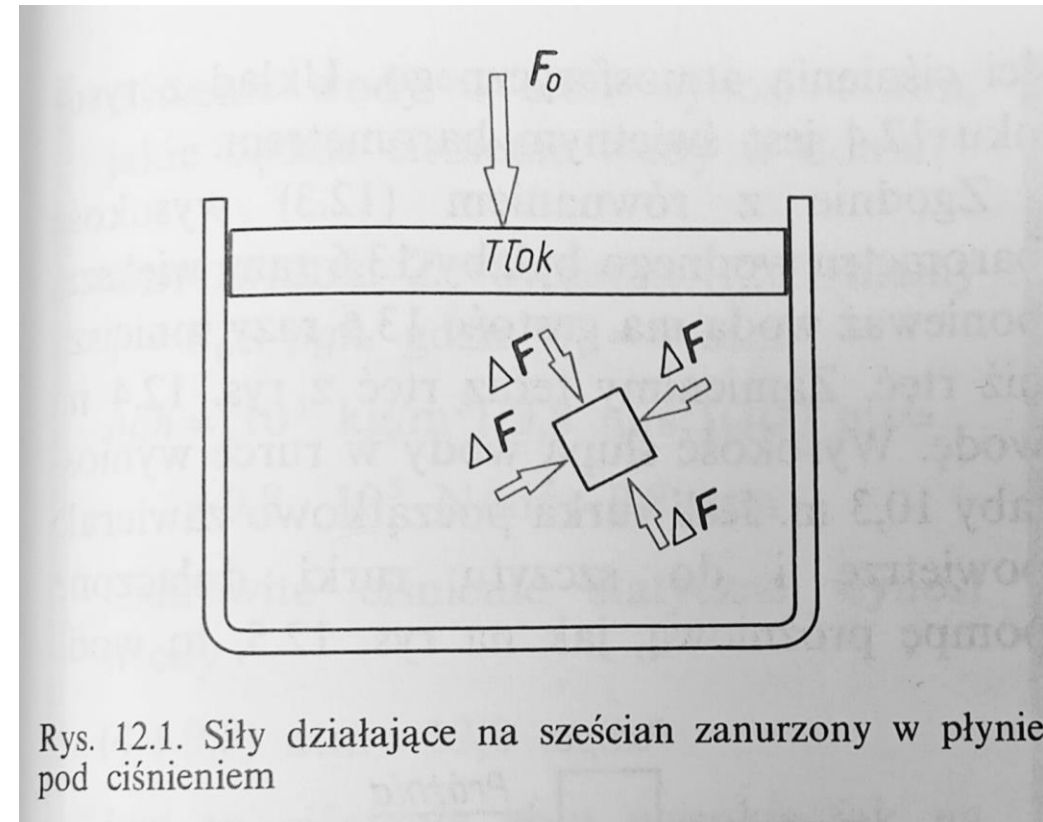
Zastosowanie:

- hydrauliczne prasy, hamulce, podnośniki,
- działanie układów hydraulicznych i płynów w zamkniętych przestrzeniach.

194

Prawo Pascala

Jeżeli ciśnienie P_0 wywierane jest na powierzchnię cieczy, to rozchodzi się ono jednakowo na wszystkie kierunki powierzchni ograniczającej ciecz.



Rys. 12.1. Siły działające na sześcian zanurzony w płynie pod ciśnieniem

J. Orear, Fizyka, WNT, Warszawa 1998

195

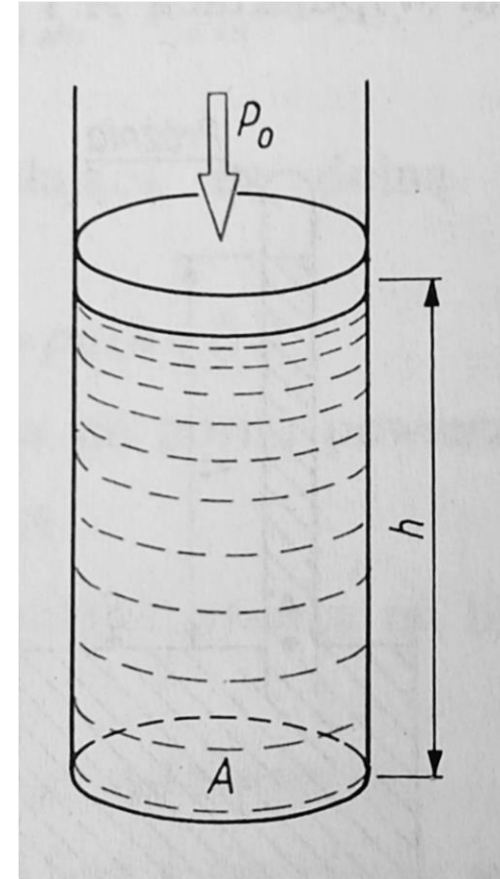
Prawo Pascala

$$mg = (\rho V)g = \rho Ahg$$

$$F = P_0A + \rho ghA$$

$$P = P_0 + \rho gh$$

gdzie ρ – gęstość cieczy,
 g - przyspieszenie ziemskie,
 A - pole powierzchni dna
naczynia,
 h - wysokość słupa cieczy .



J. Orear, Fizyka, WNT, Warszawa 1998

196

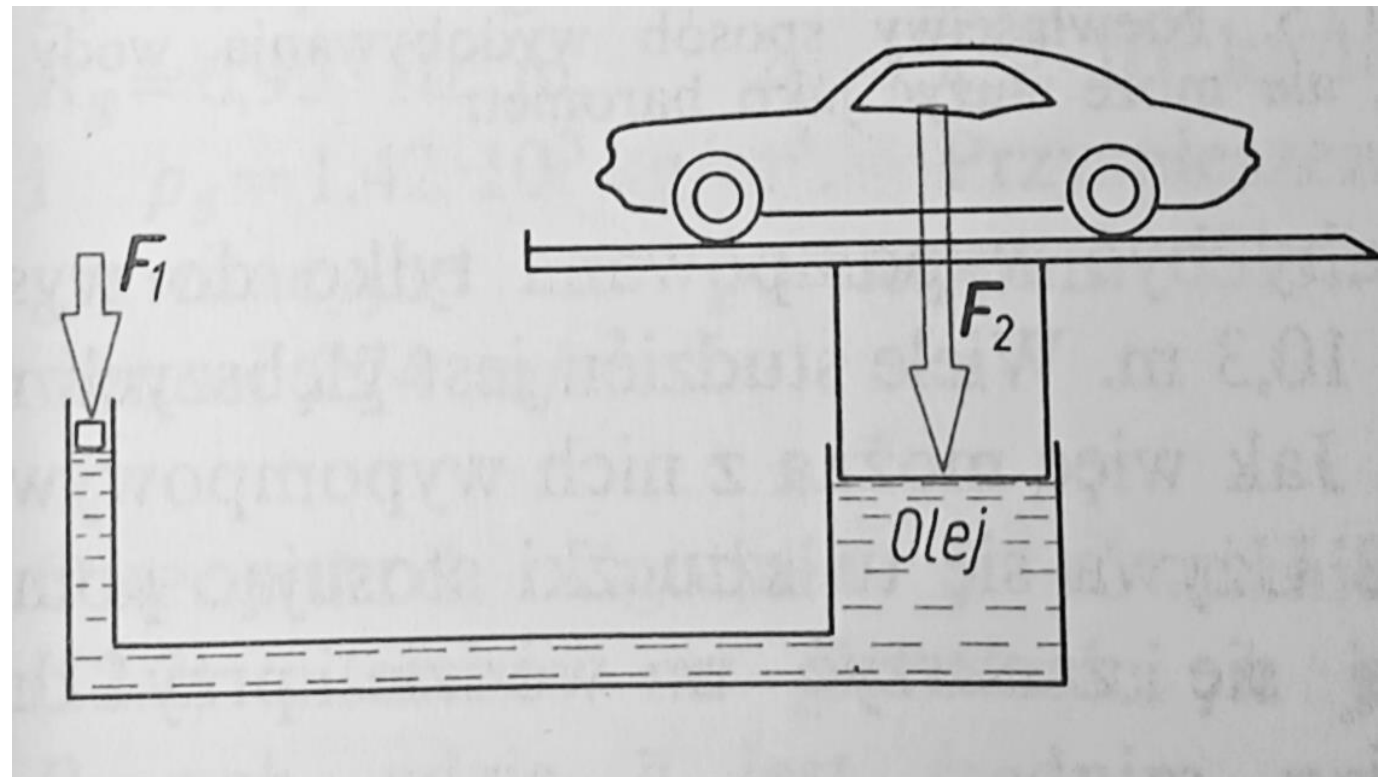
Prawo Pascala

Zgodnie z prawem Pascala działając na mały tłok nawet małą siłą jesteśmy w stanie podnosić ciężkie przedmioty.

$$P_1 = P_2$$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00



J. Orear, Fizyka, WNT, Warszawa 1998

197



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

197

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Barometr

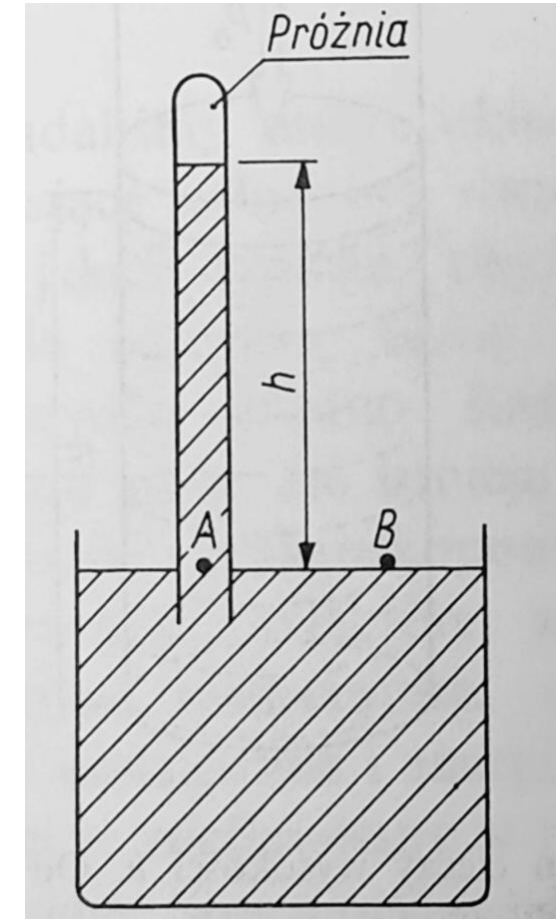
Powietrze również wywiera ciśnienie hydrostatyczne. Wyobraźmy sobie rurkę szklaną wypełnioną rtęcią wraz z naczyniem (rysunek obok). Ciśnienie w punktach A i B jest takie samo ze względu na tę samą wysokość.

$$P_A = \rho_{Hg}gh$$

Z drugiej strony w punkcie B panuje ciśnienie atmosferyczne.

Z równości tych ciśnień i znajomości gęstości rtęci możemy wyliczyć wysokość słupa rtęci. Dla ciśnienia 10100 hPa otrzymujemy $h=760\text{mm}$.

Tym sposobem oznaczać ciśnienie jako wysokość słupa rtęci (mmHg).



198

J. Orear, Fizyka, WNT, Warszawa 1998

Wzór barometryczny

Dla cienkiej warstwy powietrza o grubości dz siła grawitacji równoważy różnicę ciśnienia:

$$\begin{aligned} dp &= -\rho g dz & p &= \frac{\rho}{M} RT \\ dp &= -\frac{p}{RT} M g dz & \frac{dp}{p} &= -\frac{Mg}{RT} dz \\ \int_{p_0}^{p(z)} \frac{dp}{p} &= -\frac{Mg}{RT} \int_0^z dz \\ p(z) &= p_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}} \end{aligned}$$

199

Prawo Archimedeasa

Rozważmy ciało o objętości V całkowicie zanurzone na wysokości h w cieczy o gęstości ρ . Dla uproszczenia przyjmijmy, że ciało ma kształt prostopadłościanu o wysokości l i polu podstawy A .

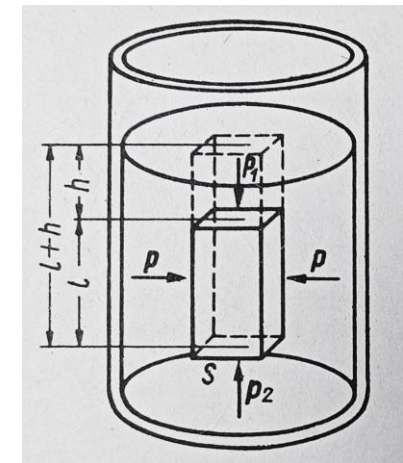
Na to ciało działają następujące siły:

Na powierzchnię dolną

$$F_d = p_d S = (p_0 + \rho g(h + l))A$$

Na powierzchnię górną

$$F_g = p_g S = (p_0 + \rho gh)A$$



Źródło: J. Massalski, M. Massalska,
Fizyka dla inżynierów, tom 1, WNT
Warszawa 1980

200

Prawo Archimiedesa

Siły działające na boczne ścianki równoważą się.

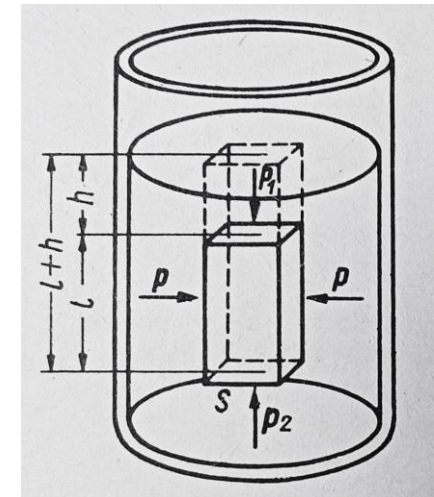
Obliczmy różnicę sił F_d i F_g :

$$F_w = F_d - F_g = \rho g(h + l - h)A$$

$$F_w = \rho g l A$$

$$V = l A$$

$$F_w = \rho g V$$



Źródło: J. Massalski, M. Massalska,
Fizyka dla inżynierów, tom 1, WNT
Warszawa 1980

Stąd treść prawa Archimiedesa: Na każde ciało zanurzone w cieczy lub gazie działa siła wyporu skierowana ku górze, równa ciężarowi wypartej cieczy (lub gazu).

201

Równanie Bernoulliego przepływu cieczy

Równanie Bernoulliego opisuje zasadę zachowania energii w przepływającym płynie (cieczy) idealnym (nielepki, nieściśliwy).

Dla przepływu stacjonarnego wzdłuż linii prądu mamy:

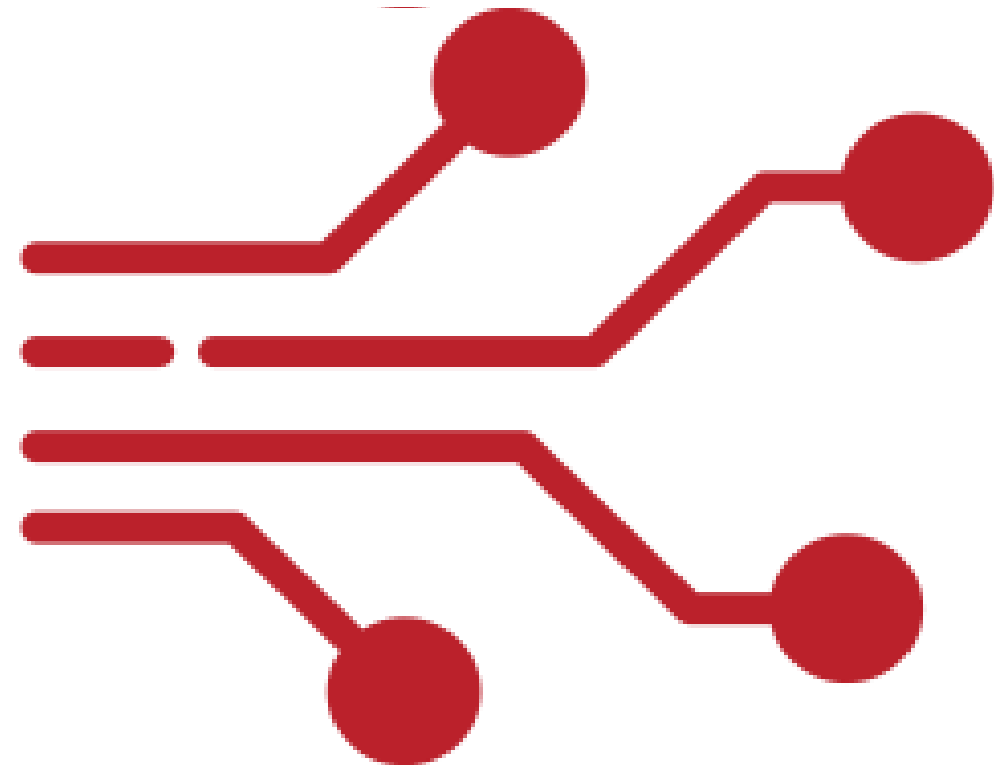
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

Przykłady zastosowania

- Przepływ w rurze o zmiennej średnicy
- Lot skrzydła samolotu - różnica ciśnień nad i pod skrzydłem generuje siłę nośną.
- Hydraulika i pompy - obliczanie spadków ciśnienia w rurociągach.
- Mierniki przepływu - np. przepływomierz Venturiego.

202

Termodynamika



203

Równanie stanu gazu doskonałego

Stan gazu jest opisywane przez podanie trzech parametrów: temperatury T , objętości V i ciśnienia p . Dla gazu doskonałego równanie stanu gazu przybiera postać:

$$\frac{pV}{T} = \text{const}$$

Równanie to wynika z trzech doświadczalnie określonych praw: prawa Boyle'a-Mariotte'a, prawa Gay-Lussaca i prawa Charlesa.

204

Prawo Boyle'a-Mariotte'a

Prawo Boyle'a-Mariotte'a opisuje proces przemiany gazu doskonałego przy jego stałej temperaturze.

W procesie tym pod wpływem ściskania bądź rozprężania gazu zmienia się jego ciśnienie, a temperaturę pozostaje stała ponieważ układ wymienia ciepło z otoczeniem (przemiana izotermiczna).

Prawo to opisuje matematyczna zależność

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

Iloczyn ciśnienia i objętości w przemianie izotermicznej jest stały.

205

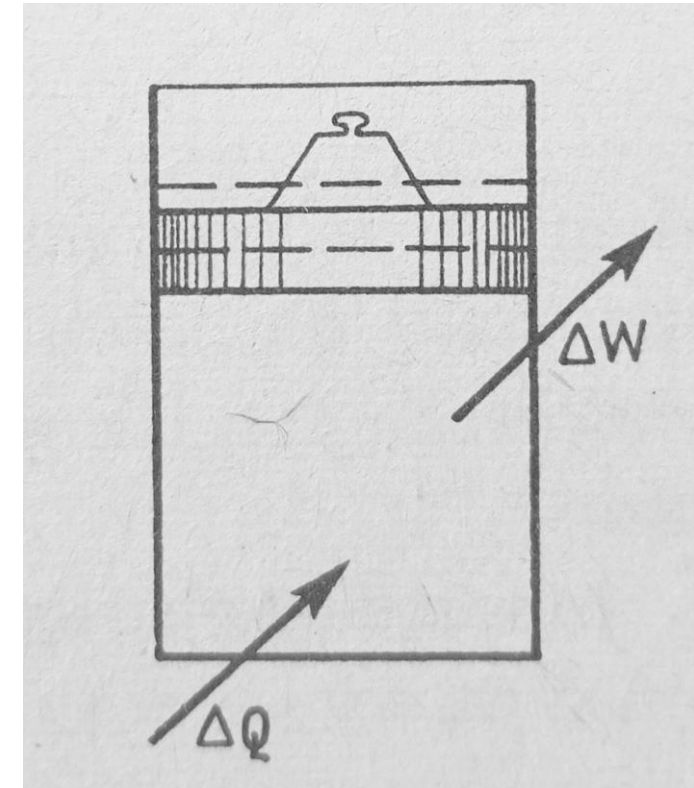
Prawo Gay-Lussaca

Prawo Gay-Lussaca opisuje proces przemiany gazu doskonałego przy jego stałym ciśnieniu. W procesie tym pod wpływem podgrzewania bądź ochładzania gazu zmienia się jego objętość bez zmiany ciśnienia (przemiana izobaryczna).

Prawo to opisuje matematyczna zależność

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

Stosunek objętości do temperatury w przemianie izobarycznej jest stały.



Źródło: J. Massalski, M. Massalska,
Fizyka dla inżynierów, tom 1, WNT
Warszawa 1980

206

Prawo Charlesa

Prawo Charlesa opisuje proces przemiany gazu doskonałego przy zachowaniu stałej objętości.

W procesie tym pod wpływem podgrzewania bądź ochładzania gazu zmienia się jego ciśnienie bez zmiany objętości (przemiana izochoryczna).

Prawo to opisuje matematyczna zależność

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} = \text{const}$$

Stosunek ciśnienia do temperatury w przemianie izochorycznej jest stały.

207

Mol substancji i hipoteza Avogadro

Mol substancji/pierwiastka – jest to ilość tej substancji wyrażona w gramach i równa jej masie cząsteczkowej. Gdzie masa cząsteczkowa jest to suma mas atomowych składników tworzących molekułę/substancję.

Równe objętości różnych gazów, w tych samych warunkach temperatury i ciśnienia, zawierają taką samą liczbę cząsteczek. Jest to konsekwencja równania stanu gazu doskonałego.

Znając masę atomu wodoru $m_H = 1,673 \times 10^{-24} \text{ g/atom}$ możemy znaleźć liczbę atomów w jednym molu wodoru jako $N_0 = 6,02 \times 10^{23} \frac{\text{atomów}}{\text{mol}}$. Liczba ta jest tzw. liczbą Avogadro.

208

Równanie stanu gazu doskonałego

Zbierając razem opisane wcześniej doświadczenia oraz równania możemy zapisać równanie stanu gazu doskonałego dla jednego mola gazu w warunkach normalnych w postaci

$$R = \frac{p_0 V_0}{T_0}$$

gdzie R – jest stałą gazową równą $8,31 \frac{J}{mol \cdot K}$, $p_0 = 1013 hPa$, $V_0 = 22,4 dm^3$,
 $T_0 = 273,15 K = 0^\circ C$.

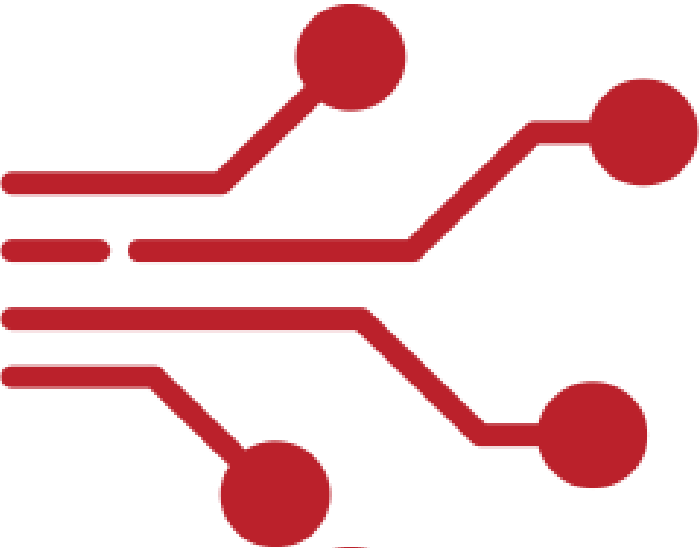
Zatem dla dowolnej masy m gazu mamy

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

gdzie M – jest masą cząsteczkową gazu a m/M – liczbą cząsteczek w gazie.

Równanie to nazywa się równaniem Clapeyrona.

209



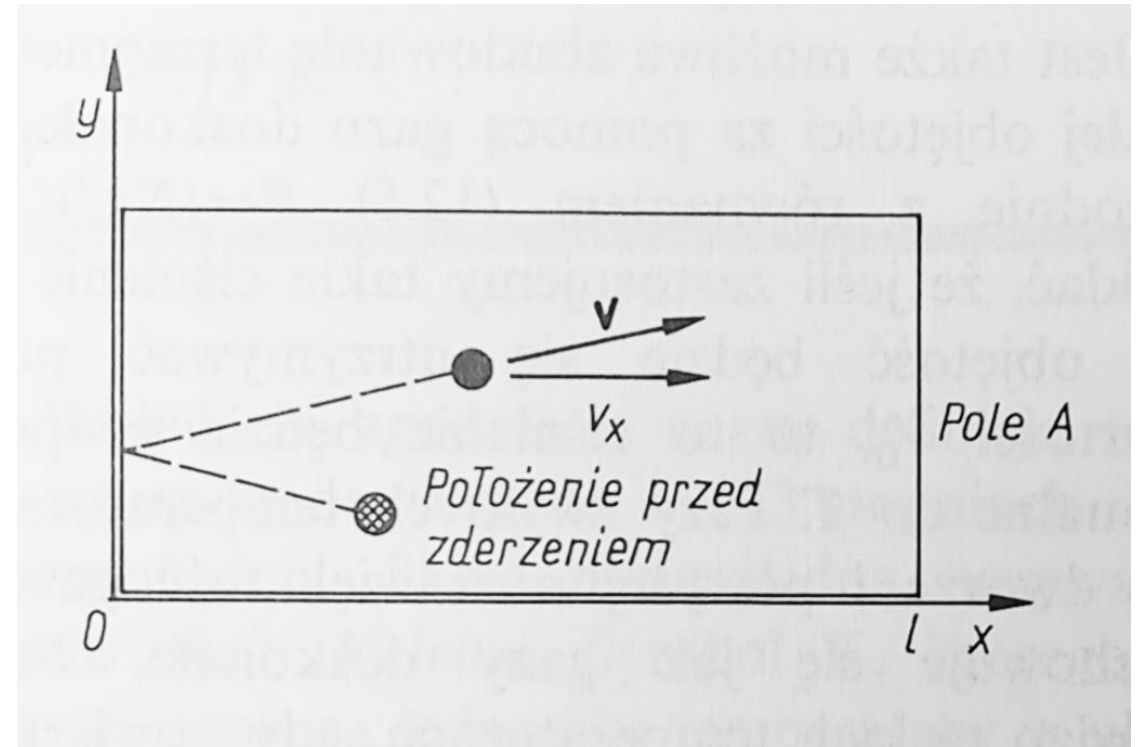
Do tej pory równanie stanu gazu doskonałego przedstawialiśmy jako wynik doświadczeń, w których poddawano gazy przemianom – izobarycznej, izotermicznej i izochorycznej.

W tym miejscu podejmiemy próbę wyprowadzenia tego równania z zasad dynamiki.

210

Równanie stanu gazu doskonałego

Wyobraźmy sobie gaz jako punktowe nieoddziałujące cząsteczki o masie m każda. Niech te cząsteczki zderzają się między sobą i ze ścianami naczynia idealnie sprężyście. W objętości $V=L^3$ znajduje się N cząsteczek. Rozważmy ruch jednej z cząsteczek jak na rysunku.



J. Orear, Fizyka, WNT, Warszawa 1998

211

Równanie stanu gazu doskonałego

Zmiana pędu w trakcie zderzenia wynosi

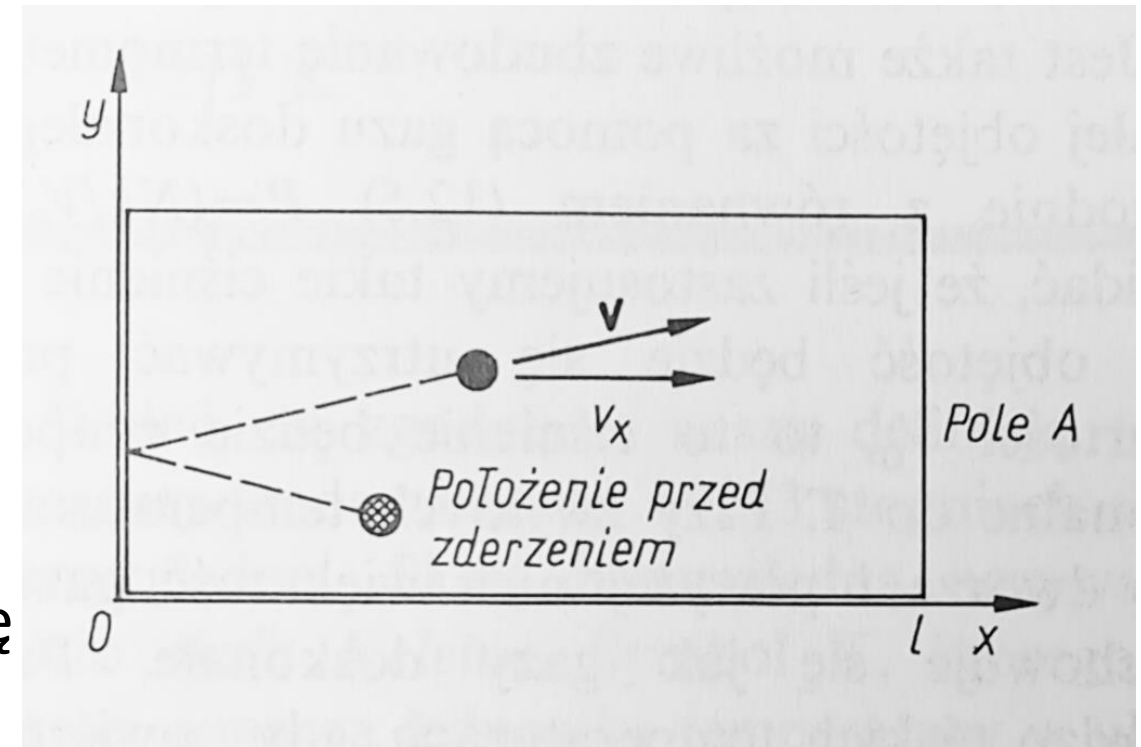
$$\Delta p_x = 2mv_x$$

Czas między kolejnymi zderzeniami ze ścianą wynosi

$$\Delta t = \frac{2L}{v_x}$$

Zatem średnia siła działająca na ścianę w trakcie zderzeń z cząsteczką wynosi

$$F = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{mv_x^2}{L}$$



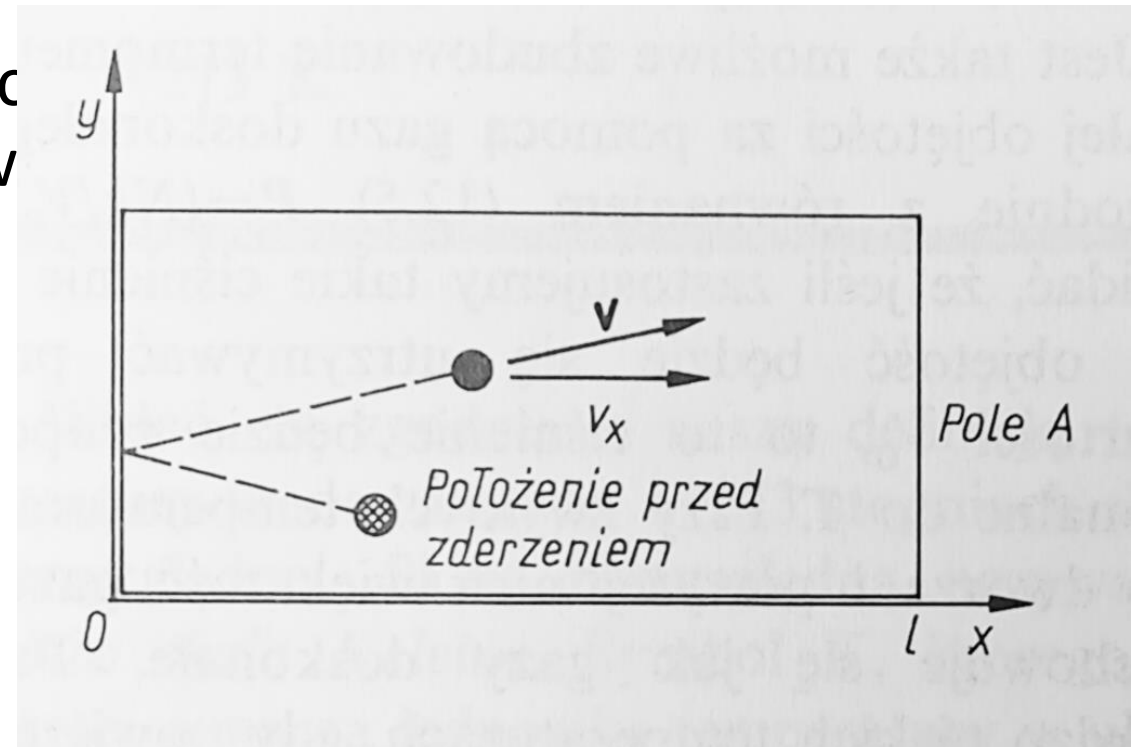
J. Orear, Fizyka, WNT, Warszawa 1998

212

Równanie stanu gazu doskonałego

Dzieląc przez powierzchnię i mnożąc przez liczbę wszystkich cząsteczek w zbiorniku otrzymujemy ciśnienie panujące wewnątrz

$$\frac{F}{A} = \frac{Nm\overline{v_x^2}}{AL} = \frac{Nm\overline{v_x^2}}{V} = p$$



J. Orear, Fizyka, WNT, Warszawa 1998

213

Równanie stanu gazu doskonałego

Zauważmy, że dla prędkości średnich mamy związek:

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$$

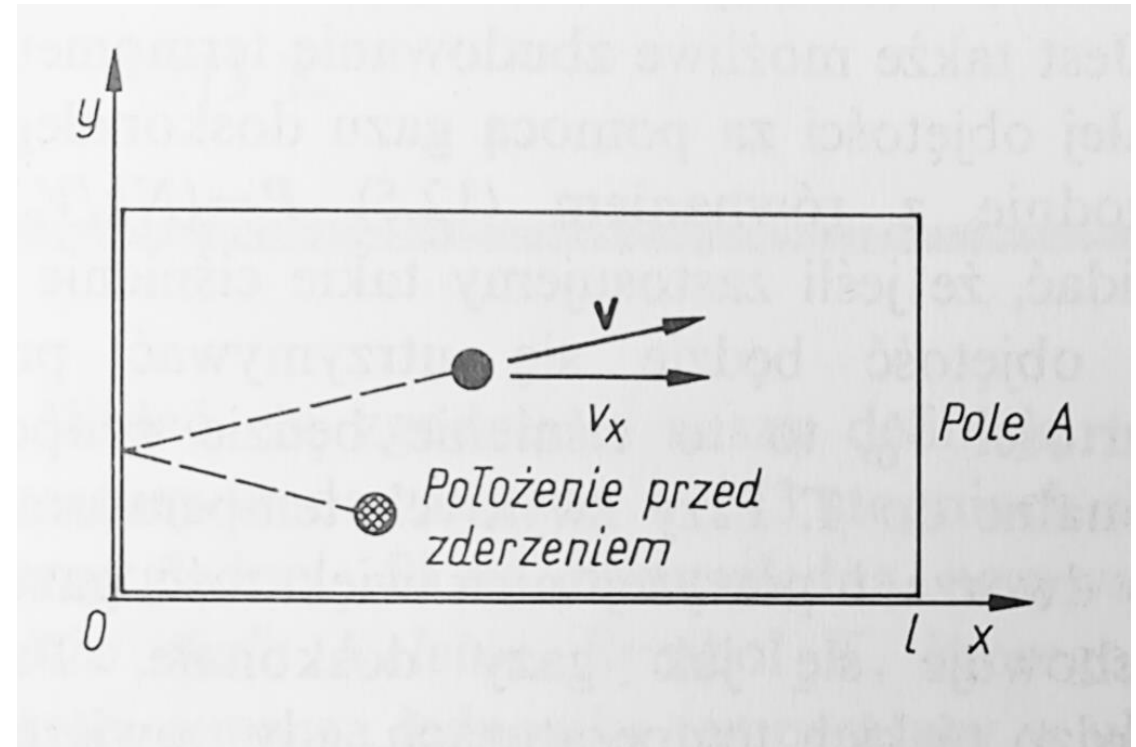
$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$$

Zatem

$$\overline{v^2} = 3\overline{v_x^2} \quad \overline{v_x^2} = \frac{\overline{v^2}}{3}$$

Stąd

$$P = \frac{\overline{v^2}}{3} Nm$$



J. Orear, Fizyka, WNT, Warszawa 1998

214

Temperatura

Zauważmy, że do równania na ciśnienie wyprowadzonego z pierwszych zasad dynamiki wchodzi średnia prędkość kwadratowa, co jest powiązaniem ciśnienia cząsteczek gazu z ich energią kinetyczną ruchu postępowego. Zdefiniujmy zatem nową wielkość – temperaturę jako miarę energii wewnętrznej gazu cząsteczkowego, dla której mamy związek

$$T = \left(\frac{2}{3k} \right) \frac{m \overline{v^2}}{2}$$

Możemy teraz równanie stanu gazu doskonałego przepisać w postaci

$$PV = NkT$$

Gdzie k – stała Boltzmannna równa $1,38 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$, T - temperatura w skali bezwzględnej Kelwina.

215

Temperatura

Związek temperatury z energią kinetyczną cząsteczek wyprowadzany jest z mechaniki statystycznej, co wykracza poza ramy tego wykładu. Jednak przyjrzyjmy się tej relacji.

$$\frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}kT$$

Z relacji tej wynika, że w tej samej temperaturze średnia energia kinetyczna cząsteczek w chaotycznym ruchu postępowym jest taka sama dla wszystkich gazów. Stąd możemy wyznaczyć średnią kwadratową prędkość cząsteczek gazu jako

$$v = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

216

Ekwipartycja energii

W układzie będącym w stanie równowagi termicznej, każdemu niezależnemu stopniowi swobody cząsteczki (czyli każdej współrzędnej, od której zależy energia kwadratowo) przypada średnia energia na cząstkę równa:

$$E_{\text{śr}} = \frac{1}{2} kT$$

Jeśli cząstka ma f stopni swobody to dostajemy

$$E_{\text{śr}} = \frac{f}{2} kT$$

217

Ekwipartycja energii

Stopień swobody to każda niezależna zmienna fizyczna, która określa stan ruchu układu (położenie lub energia).

Innymi słowy to liczba niezależnych parametrów potrzebnych do pełnego opisu ruchu układu fizycznego, każdy stopień swobody odpowiada jednemu niezależnemu kierunkowi ruchu lub jednej współrzędnej w przestrzeni konfiguracyjnej układu.

Dla jednoatomowych cząsteczek liczba stopni swobody wynosi 3 bo atom może poruszać się w trzech kierunkach niezależnych x , y i z .

Dla dwuatomowych cząsteczek f równa się 5, na co składają się 3 stopnie ruchu postępowego oraz jeden obrót i jedno drganie wzdłuż osi cząsteczki.

Dla dowolnej cząsteczki N atomowej mamy $3N-6$ stopni swobody, przy czym dla cząsteczek liniowych jest to $3N-5$.

218

Energia wewnętrzna

Energia wewnętrzna to całkowita energia mikroskopowa gazu — suma energii wszystkich jego cząsteczek wynikająca z:

- ich ruchu (energia kinetyczna),
- drgań i rotacji (dla cząsteczek złożonych),
- oraz oddziaływań wewnętrznych między cząsteczkami (energia potencjalna).

W gazie doskonałym przyjmujemy, że:

- cząsteczki nie oddziałują ze sobą (brak energii potencjalnej oddziaływań międzycząsteczkowych),
- zatem energia wewnętrzna wynika wyłącznie z energii kinetycznej ruchu cząsteczek (ruchu postępowego, rotacyjnego i drgającego).

$$U = \sum_i E_{k,i}$$

219

Energia wewnętrzna

Z wcześniejszych rozważań na temat energii średniej cząsteczek mamy

$$E_{\text{śr}} = \frac{f}{2} kT$$

Zatem dla N cząsteczek w gazie energia wewnętrzna wynosi

$$U = N \frac{f}{2} kT$$

Energia wewnętrzna gazu zależy tylko od temperatury.

220

I zasada termodynamiki

Zmiana energii wewnętrznej układu jest równa sumie ciepła dostarczonego do układu i pracy wykonanej nad układem.

$$\Delta U = \Delta Q + W$$

Zatem:

- jeśli układ otrzymuje ciepło ($Q > 0$) i jest ściskany ($W > 0$) → jego energia wewnętrzna rośnie;
- jeśli układ oddaje ciepło ($Q < 0$) lub rozpręża się ($W < 0$) → energia wewnętrzna maleje.

221

I zasada termodynamiki

W nieskończenie małym procesie termodynamicznym:

$$dU = dQ + dW$$

Gdzie dU – przyrost energii wewnętrznej, dQ – ciepło oddane lub pobrane przez gaz, dW – praca wykonana nad albo przez gaz.

222

Praca gazu doskonałego

Dla gazu doskonałego wykonującego pracę objętościową zapiszemy

$$\delta W = -\vec{F} \cdot d\vec{x} = -\frac{F}{A} A dx = -p dV$$

(znak ujemny wynika stąd, że praca wykonana przez gaz zmniejsza jego energię wewnętrzną.

Zatem możemy zapisać I zasadę termodynamiki jako

$$dU = dQ - p dV$$

223

Ciepło właściwe

Ciepło właściwe to ilość ciepła potrzebna do podniesienia temperatury jednostki masy substancji o 1 kelwin (lub 1°C), bez zmiany jej stanu skupienia.

$$c = \frac{\Delta Q}{m\Delta T}$$

Gdzie ΔQ -ilość dostarczonej (odebranej) energii na sposób ciepła,
 m – masa substancji, ΔT – zmiana temperatury.

Jednostką ciepła właściwego jest

$$[c] = \frac{J}{kg \cdot K}$$

224

Ciepło właściwe molowe

W termodynamice często zamiast jednostki masy używa się jednego mola substancji.

Ciepło właściwe molowe to ilość ciepła potrzebna do ogrzania jednego mola substancji o 1 K:

$$C = \frac{\Delta Q}{n\Delta T}$$

Gdzie n -liczba moli substancji, a $C = cM$ i M - masa molowa, ΔQ -ilość dostarczonej (odebranej) energii na sposób ciepła, ΔT – zmiana temperatury.

Jednostką ciepła właściwego jest

$$[C] = \frac{J}{\text{mol} \cdot K}$$

225

Ciepło właściwe w stałej objętości

Policzmy ciepło właściwe w procesie podgrzewania gazu doskonałego w stałej objętości $V = \text{const}$, $dV=0$.

Z I zasady termodynamiki mamy

$$dU = dQ, \quad U = \frac{f}{2}RT$$

Zatem z definicji ciepła właściwego mamy

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V = \left(\frac{dU}{dT} \right)_V = \frac{f}{2}R$$

226

Ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu

Teraz policzmy podobnie ciepło właściwe gazu doskonałego przy stałym ciśnieniu
Z I zasady termodynamiki mamy

$$dQ = dU + pdV, \quad pV = nkT = RT$$

$$V = \frac{RT}{p} \quad dV = \frac{R}{p} dT$$

$$dQ = C_V dT + p \left(\frac{R}{p} dT \right)$$

$$\frac{dQ}{dT} = C_V + R$$

$$C_P - C_V = R$$

227

Rozprężanie izotermiczne

W procesie izotermicznym (bez zmiany temperatury) energia wewnętrzna układu pozostaje stała. Stąd

$$dU = 0 \quad dQ = pdV = dW$$
$$\Delta Q = \Delta W = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{NkT}{V} \right) dV$$

$$\Delta Q = \Delta W = NkT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

228

Rozprężanie adiabatyczne

Rozprężanie adiabatyczne to proces, w którym gaz zwiększa swoją objętość (rozpręża się), nie wymieniając ciepła z otoczeniem. Zazwyczaj proces taki zachodzi bardzo szybko, dzięki czemu gaz nie nadąża wymienić ciepła z otoczeniem. Rozpiszmy pierwszą zasadę termodynamiki.

$$dQ = 0 \quad dU + pdV = 0 \quad dU = C_V dT$$
$$C_V dT + PdV = 0$$

Zróżniczkujemy $RT = pV$

$$RdT = pdV + Vdp$$

229

Rozprężanie adiabatyczne

Podstawmy do pierwszego równania

$$c_V \left(\frac{PdV}{R} + \frac{VdP}{R} \right) + pdV = 0$$

$$\left(\frac{C_V + R}{R} \right) pdV + \frac{C_V V}{R} dp = 0$$

$$C_V + R = C_p$$

Zatem

$$C_p PdV + C_V V dp = 0$$

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0$$

Gdzie $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

230

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Rozprężanie adiabatyczne

Scałkujemy stronami ostatnie równanie

$$\gamma \int \frac{dV}{V} + \int \frac{dp}{p} = 0$$
$$\gamma \ln V + \ln p = \ln b$$

Gdzie logarytm z b jest naszą stałą całkowania.

$$\ln(pV^\gamma) = \ln b$$
$$pV^\gamma = b$$

Stąd

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$$

231

Rozprężanie adiabatyczne

Dla przemiany adiabatycznej można zapisać równanie w zmiennych temperatury i objętości (T , V).

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

Stąd przy możemy wyznaczyć jak zachowuje się w trakcie tej przemiany temperatura układu

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}$$

Gdzie T_1 , T_2 - temperatura początkowa i końcowa, V_1 i V_2 - objętość początkowa i końcowa.

232

Cykl Carnota

Cykl Carnota to idealny, odwracalny cykl termodynamiczny, który opisuje najbardziej wydajny silnik cieplny, działający między dwoma źródłami ciepła o różnych temperaturach.

Cykl ten został opracowany przez Nicolasa Léonarda Carnota w 1824 roku — zanim jeszcze sformułowano drugą zasadę termodynamiki. Stanowi model teoretyczny silnika cieplnego, który wykorzystuje różnicę temperatur do wykonywania pracy.

233

Cykl Carnota

Silnik Carnota działa między:

- źródłem ciepła (gorącym) o temperaturze T_1 ,
- zimnym zbiornikiem (otoczeniem) o temperaturze T_2 , gdzie $T_1 > T_2$.

W czasie cyklu gaz roboczy (np. gaz doskonały) przechodzi przez cztery przemiany odwracalne:

- Rozprężanie izotermiczne ($T = \text{const}$), gaz pobiera ciepło ΔQ_1 ze źródła o temperaturze T_1 i wykonuje pracę ($\Delta Q_1 > 0$, $W_{AB} > 0$)
- Rozprężanie adiabatyczne, gaz rozpręża się bez wymiany ciepła ($Q = 0$), temperatura maleje z T_1 do T_2
- Sprężanie izotermiczne, gaz oddaje ciepło ΔQ_2 do chłodnicy o temperaturze T_2 ($\Delta Q_2 < 0$, $W_{CD} < 0$)
- Sprężenie adiabatyczne, gaz spręża się bez wymiany ciepła, temperatura rośnie z T_2 do T_1

234

Cykl Carnota

Gaz w cyklu Carnota wykonuje pracę równą

$$W = \Delta Q_1 - \Delta Q_2$$

- Bo w jednym cyklu gaz:
- pobiera ciepło ΔQ_1 z gorącego źródła,
- oddaje ΔQ_2 do zimnego źródła,
- różnica energii to praca użyteczna.

235

Sprawność silnika Carnota

Sprawność (η) to stosunek wykonanej przez układ pracy użytecznej do pobranego przez układ ciepła

$$\eta = \frac{W}{\Delta Q_1} = \frac{\Delta Q_1 - \Delta Q_2}{\Delta Q_1}$$

$$\eta = 1 - \frac{\Delta Q_2}{\Delta Q_1}$$

Korzystając z równań opisujących poszczególne przemiany w cyklu można sprawność silnika Carnota zapisać za pomocą temperatury grzałki i chłodnicy jako

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

236

Sprawność silnika Carnota

Wnioski z wzoru Carnota na sprawność silnika

- Sprawność zależy tylko od temperatur źródeł, nie od rodzaju gazu ani substancji roboczej.
- Nie da się osiągnąć 100% sprawności, dopóki $T_2 > 0$.
- Maksymalna sprawność wymaga, by proces był odwracalny i bez strat energii.
- Każdy rzeczywisty silnik ma mniejszą sprawność niż silnik Carnota pracujący między tymi samymi temperaturami.

237

II zasada termodynamiki

Pierwsza zasada termodynamiki stanowi zasadę zachowania energii, nie tłumaczy jednak kierunków przebiegu procesów termodynamicznych.

Sformułujmy teraz II zasadę termodynamiki, która wynika z szeregu obserwacji procesów termodynamicznych. Istnieje kilka wersji tej zasady, a wynika to z rodzaju obserwowanych procesów.

1. Nie można zbudować perpetuum mobile drugiego rodzaju.
2. Gdy dwa ciała o różnych temperaturach są w kontakcie termicznym, to ciepło będzie przepływało od ciała o wyższej temperaturze do ciała o niższej temperaturze.

238

II zasada termodynamiki

3. Żadna cykliczna maszyna cieplna pracująca między temperaturami T_1 (maksymalną) i T_2 (minimalną) nie może mieć sprawności większej niż

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

4. W układzie izolowanym adiabatycznie entropia nie może maleć.

Perpetum mobile pierwszego rodzaju to hipotetyczna maszyna, która pracuje sama przez się dostarczając ciepło otoczeniu (złamanie zasady zachowania energii).

Perpetum mobile drugiego rodzaju to hipotetyczna maszyna, która zamieniałaby całe dostarczone ciepło na pracę bez żadnych strat.

239

Entropia

Entropia jest miarą nieuporządkowania układu cząsteczek. Im większy jest stan nieporządku położeń i prędkości cząsteczek w układzie tym większe prawdopodobieństwo wystąpienia takiego stanu.

Możemy zdefiniować entropię równaniem

$$S = k \ln p$$

gdzie S – entropia, k – stała Boltzmannna, p – prawdopodobieństwo tego, że układ znajduje się w tym konkretnym stanie.

240

Entropia

Dla procesów odwracalnych przy wymianie ciepła definiujemy entropię równaniem

$$S = \frac{\delta Q}{T}$$

gdzie δQ – jest energią dostarczaną układowi na sposób ciepła,
a T – jest temperaturą układu wyrażoną w skali bezwzględnej Kelwina.

Jednostką entropii jest

$$[S] = \frac{J}{K}$$

241

Konsekwencje II zasady termodynamiki - przykłady

Ciepła kawa w chłodnym pokoju

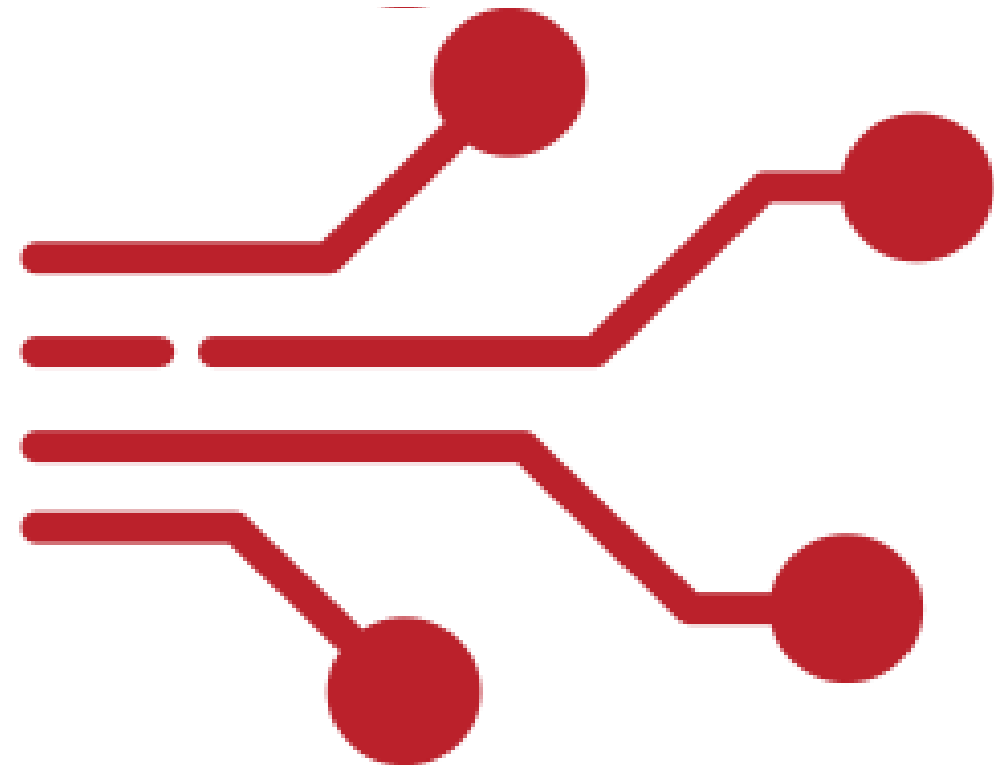
- Ciepło przechodzi z kawy (cieplejszej) do powietrza (chłodniejszego).
Entropia kawy maleje, ale entropia powietrza rośnie bardziej — więc łączna entropia całego układu rośnie.

Lodówka

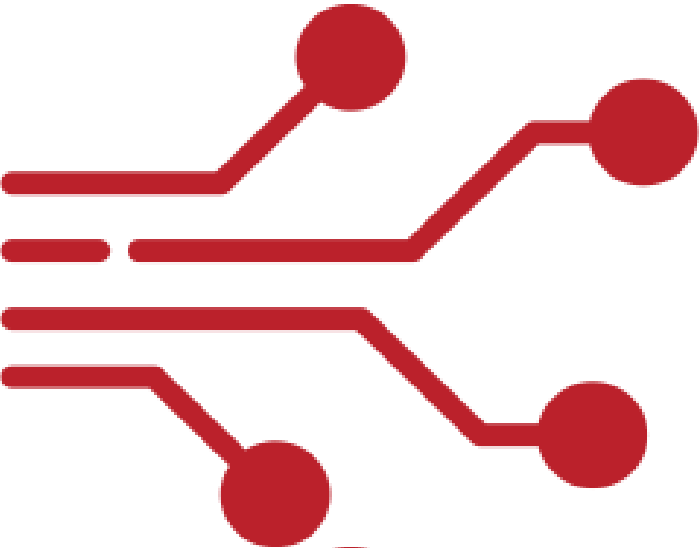
- Lodówka przenosi ciepło z zimnego wnętrza do ciepłego otoczenia, czyli wbrew naturalnemu kierunkowi przepływu.
Aby to zrobić, musi zużyć pracę elektryczną na pracę sprężarki zapewniającej ciągły obieg czynnika chłodzącego, który w trakcie obiegu cyklicznie ulega rozprężaniu, parowaniu i skraplaniu przenosząc ciepło z wnętrza lodówki na zewnątrz. Druga zasada termodynamiki mówi nam, że taki proces bez wykonywania pracy jest niemożliwy.

242

Elektrostatyka



243



Elektrostatyka to dział fizyki zajmujący się ładunkami elektrycznymi w spoczynku, czyli takimi, które nie poruszają się względem siebie.

Jej zadaniem jest badanie:

- jak ładunki oddziałują na siebie,
- jakie pole elektryczne wytwarzają,
- jak energia jest związana z tym polem.

244

Definicje

Ładunek elektryczny (ozn. q) to podstawowa wielkość fizyczna charakteryzująca zdolność ciała do uczestniczenia w oddziaływaniach elektrycznych.

Ładunek jest źródłem pola elektrycznego oraz obiektem, na który to pole działa.

W układzie SI jednostką ładunku elektrycznego jest kulomb (C).

Ładunek elementarny:

Najmniejszą niepodzielną porcją ładunku (w sensie cząstkowym) jest ładunek elementarny:

$$e = 1,602 \times 10^{-19} C$$

- Ładunek elektronu wynosi $q_e = -e$, a ładunek protonu $q_p = +e$.

245

Definicje

Właściwości ładunku:

Dwojaka natura – istnieją dwa rodzaje ładunków:

- dodatnie (+),
- ujemne (–).

Ciała o ładunkach różnoimiennych przyciągają się,
a jednoimiennych odpychają się.

Kwantowanie ładunku – każdy ładunek jest całkowitą wielokrotnością ładunku elementarnego:

$$q = n \cdot e \quad n \in \mathbb{Z}$$

246

Zasada zachowania ładunku

W układzie izolowanym (zamkniętym) całkowity ładunek elektryczny pozostaje stały, niezależnie od zachodzących w nim procesów.

Oznacza to, że ładunki mogą się przemieszczać, łączyć lub rozdzielać, ale ich suma algebraiczna nie zmienia się:

$$\sum q = \text{const}$$

Ta zasada obowiązuje w każdym procesie fizycznym, także w reakcjach jądrowych czy chemicznych, jak również w procesie kreacji i anihilacji par elektron pozyton.

247

Prawo Coulomba

Prawo to opisuje siłę wzajemnego oddziaływania między dwoma punktowymi ładunkami elektrycznymi.

Dwa punktowe ładunki elektryczne q_1 i q_2 działają na siebie siłą, której wartość jest:

- proporcjonalna do iloczynu tych ładunków,
- odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi,
- skierowana wzdłuż linii łączącej oba ładunki.

Wyrażamy ją wzorem

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

gdzie k – stała Coulomba, r – odległość między ładunkami, $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ - wektor jednostkowy określający kierunek działania siły oddziaływania elektrycznego. 248

Prawo Coulomba

Kierunek i zwrot:

- Siła działa wzdłuż prostej łączącej ładunki.
- Jest przyciągająca, jeśli ładunki są różnoimienne, odpychająca, jeśli jednoimienne.

Charakter:

- Jest siłą wektorową, więc należy uwzględniać kierunek i zwrot przy obliczeniach.
- Jest siłą centralną (zależy tylko od odległości).
- Działa zgodnie z III zasadą dynamiki Newtona — oba ładunki działają na siebie siłami równymi co do wartości i przeciwnymi co do zwrotu.

Stałą k możemy wyrazić jako: $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 8,98 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$ gdzie $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$

jest stałą przenikalności przenikalności elektrycznej próżni.

249

Zasada superpozycji

Całkowita siła elektrostatyczna działająca na dany ładunek jest geometryczną sumą (sumą wektorową) wszystkich sił Coulomba pochodzących od poszczególnych ładunków.

Jeśli na ładunek q_0 działają inne ładunki $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ to każdy z nich wywołuje niezależnie swoją siłę $\vec{F}_{i0}$. Zatem całkowita siła elektrostatyczna działająca na zerowy ładunek wynosi

$$\vec{F}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i0}$$

250

Dipol elektryczny

Weźmy dwa ładunki elektryczne $-Q$ i $+Q$ odległe od siebie o l jak na rysunku. Taki układ ładunków nazywamy dipolem elektrycznym. Obliczmy siłę działającą na trzeci ładunek punktowy q umieszczony w odległości r od ładunków $-Q$ i $+Q$. Z podobieństwa trójkątów utworzonych przez ładunki oraz przez wektory otrzymujemy relację

$$\frac{F}{F_1} = \frac{l}{r}$$

Podstawiając równanie na siłę Coulomba mamy

$$F = \frac{l}{r} F_1 = \frac{l}{r} k \frac{Qq}{r^2} = kq \frac{Ql}{r^3} = kq \frac{p}{r^3}$$

gdzie p - moment dipolowy.

W ogólności mamy

$$\vec{p} = Q\vec{l}$$

a siła działająca na ładunek q

$$\vec{F} = kq \frac{\vec{p}}{r^3}$$

251

Natężenie pola elektrycznego

Pole elektryczne to stan przestrzeni, w którym na umieszczony ładunek działa siła elektryczna.

Natężenie pola elektrycznego to wektorowa wielkość fizyczna, która określa, jak silne jest pole w danym punkcie i w jakim kierunku działa siła na ładunek próbny.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Gdzie $\vec{E}$ - wektor natężenia pola elektrycznego, $\vec{F}$ - siła oddziaływania elektrycznego na ładunek próbny, q – ładunek próbny.

252

Natężenie pola elektrycznego

Z tej definicji wynika:

Kierunek wektora $\vec{E}$ taki sam jak kierunek siły, jaka działa na dodatni ładunek próbny.

Zwrot wektora $\vec{E}$ jest:

- od ładunków dodatnich (bo dodatnie odpychają dodatnie),
- w stronę ładunków ujemnych (bo przyciągają dodatnie).

Wartość $|\vec{E}|$ mówi, jak silne jest pole w danym punkcie.

Jednostką natężenia elektrycznego jest

$$[E] = \frac{N}{C}$$

Później zobaczymy również, że można użyć innych jednostek (volt na metr):

$$[E] = \frac{V}{m}$$

253

Pole elektryczne ładunku punktowego

Z prawa Coulomba możemy wyznaczyć natężenie pola elektrycznego wokół ładunku punktowego Q jako

$$\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

gdzie wektor jednostkowy $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ jest skierowany od ładunku Q do punktu, w którym obliczamy pole.

Tak jak dla sił tak i dla pola obowiązuje zasada superpozycji. Jeżeli w danym miejscu działa kilka pól elektrycznych od różnych ładunków, to:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

czyli całkowite pole jest sumą wektorową pól pochodzących od wszystkich ładunków.

254

Linie sił pola elektrycznego

Linie sił pola elektrycznego (często zwane też *liniami pola elektrycznego*) to umowne krzywe, których styczna w każdym punkcie pokazuje kierunek wektora natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ w tym punkcie.

Pole elektryczne istnieje w całej przestrzeni i ma kierunek oraz wartość w każdym punkcie.

Zamiast rysować tysiące wektorów $\vec{E}$, używamy linii pola, które dają wizualny obraz:

- kierunku działania siły na ładunek dodatni,
- względnej siły pola (im gęstsze linie — tym silniejsze pole),
- rozkładu pola wokół ładunków lub układów ładunków (np. dipola, powierzchni naładowanych itd...).

255

Pole elektryczne dipola elektrycznego

Znając wartość siły elektrycznej działającej na ładunek punktowy znajdujący się w odległości r od ładunków $-Q$ i $+Q$ dipola elektrycznego możemy wyznaczyć wektor oraz wartość natężenia pola elektrycznego wzdłuż symetralnej odcinka łączącego ładunki tworzące dipol.

Z definicji mamy

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Zatem natężenie pola elektrycznego wynosi

$$\vec{E} = k \frac{\vec{p}}{r^3}$$

Dla dużych odległości ładunku próbnego od dipola elektrycznego wartość r jest w przybliżeniu równa odległości tego ładunku od punktu środkowego dipola.

256

Linie sił pola elektrycznego

Podstawowe cechy linii sił pola elektrycznego:

- Zawsze zaczynają się na ładunkach dodatnich i kończą na ujemnych. Oznacza to, że linie pokazują kierunek ruchu *dodatniego ładunku próbnego* w tym polu.
- Nie mają początku ani końca w punkcie, gdzie nie ma ładunku. Wyjątek: linie mogą rozciągać się „do nieskończoności”, jeśli nie ma ładunku, który je zakończy.
- Nie przecinają się. Gdyby się przecinały, oznaczałoby to dwa różne kierunki pola w jednym punkcie — co jest niemożliwe.
- Gęstość linii odpowiada wartości natężenia pola. Im więcej linii przypada na jednostkę powierzchni, tym większe $|\vec{E}|$
- Są zawsze prostopadłe do powierzchni przewodników w stanie równowagi elektrostatycznej.

257

Strumień pola elektrycznego i twierdzenie Gaussa

Jeżeli wokół ładunku punkowego Q , znajdującego się w próżni, zakreślimy powierzchnię kuli o promieniu r , to natężenie pola na powierzchni kuli będzie

$$E = k \frac{Q}{r^2}$$

Natomiast liczba linii sił pola przechodząca prostopadle przez powierzchnię kuli, czyli strumień pola wynosi

$$\Phi = ES = 4\pi r^2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

W sytuacji gdy wektor natężenia pola nie jest prostopadły do powierzchni, wówczas uwzględniamy tylko składową normalną (prostopadłą) do powierzchni, zatem strumień pola możemy zdefiniować jako iloczyn skalarny wektora natężenia i jednostkowego wektora normalnego do powierzchni.

$$d\Phi = |\vec{E}| \cos \phi dS$$

gdzie dS – element powierzchni przez którą przenika pole, ϕ – kąt pomiędzy wektorem natężenia pola elektrycznego a kierunkiem prostopadłym do elementu powierzchni dS , a $d\Phi$ – strumień pola elektrycznego elementu powierzchni dS .

258

Strumień pola elektrycznego i twierdzenie Gaussa

Całkując po całej powierzchni S mamy

$$\Phi = \int \vec{E} d\vec{S}$$

A dla ładunku punktowego

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_S \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Zatem w ogólności można zapisać

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

259

Wzór ten odnosi się do dowolnej powierzchni zamkniętej ograniczającej ładunek Q .

Strumień pola elektrycznego i twierdzenie Gaussa

Dla układu n ładunków elektrycznych i dowolnej powierzchni ograniczającej obszar, w którym znajdują się te ładunki możemy zapisać równanie

$$\Phi = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n Q_n$$

Powyższe równanie jest twierdzeniem Gaussa mówiącym że strumień pola elektrycznego przez dowolną powierzchnię zamkniętą jest równy całkowitemu ładunkowi zgromadzonemu wewnątrz tej powierzchni podzielonemu przez stałą przenikalności elektrycznej próżni ϵ_0 .

260

Pole elektryczne od liniowego ładunku elektrycznego

Zdefiniujemy liniowy rozkład ładunku stanowiący naładowaną ładunkiem Q nieskończoną prostą

$$\lambda = \frac{Q}{L}$$

Obliczmy strumień pola elektrycznego przechodzący przez powierzchnię walca o promieniu r , ograniczającego ładunek liniowy i skorzystajmy z prawa Gaussa

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r)S = E(r)2\pi rL = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$Q = \lambda L$$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Widzimy, że korzystając z prawa Gaussa rachunki bardzo się upraszczają. Gdyby nie to należałoby obliczyć całkę wzdłuż ładunku liniowego sumującą przyczynki pola elektrycznego od $dq = \lambda dl$ co dla bardziej zaawansowanych rozkładów ładunków mogłoby być kłopotliwe. Podobne rachunki można wykonać dla rozkładów ładunku powierzchniowych i objętościowych.

261

Pole elektryczne od powierzchniowego ładunku elektrycznego

Rozważamy nieskończoną, płaską powierzchnię o jednorodnej gęstości ładunku powierzchniowego σ (jednostka C/m^2).

Symetria:

- pole zależy tylko od odległości od płaszczyzny i jest prostopadłe do płaszczyzny,
- wartości pola po obu stronach płaszczyzny są takie same (tylko zwroty mogą być różne w zależności od znaku σ).
- Dzięki tej symetrii wybieramy bryłę Gaussa w kształcie walca o polu przekroju A , którego oś jest prostopadła do płaszczyzny i który przecina tę płaszczyznę tak, żeby jedna połowa walca była po jednej, a druga po drugiej stronie płaszczyzny.

262

Pole elektryczne od powierzchniowego ładunku elektrycznego

Pole jest prostopadłe do płaszczyzny i skierowane wzdłuż osi walca. Przez ściany boczne walca strumień jest zerowy (pole równoległe do tych ścian). Przez dwie podstawy walca (każda o polu A) pole jest stałe i równe E .
Zatem całkowity strumień przez powierzchnię zamkniętą wynosi:

$$\Phi = EA + EA = 2EA = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

Zatem natężenie pola wynosi

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

263

Praca w polu elektrycznym

Skorzystajmy z definicji pracy by obliczyć jaką pracę wykona pole elektryczne aby przesunąć ładunek q z punktu A do punktu B.

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Należy zauważyć, że jeżeli chcemy wykonać odwrotną czynność czyli przesunąć ładunek q z punktu A do punktu B działając siłą zewnętrzną przeciwko polu elektrycznemu to mamy

$$W_{AB}^{\text{siłazewn.}} = -W_{AB}^{\text{pole}}$$

264

Praca i energia potencjalna pola elektrycznego

Należy pamiętać, że pole elektryczne jest polem zachowawczym, to znaczy, że wykonując pracę wzdłuż krzywej zamkniętej, to znaczy na drodze z punktu A do B a potem z B do A to sumaryczna wykonana praca jest równa zero.

$$W = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Praca między dwoma punktami nie zależy od drogi, tylko od punktu początkowego i końcowego.

Energią potencjalną nazywamy pracę wykonaną przeciwko sile pola elektrycznego na przeniesienie ładunku z nieskończoności w okolice ładunku wytwarzającego to pole.

Dzięki temu naszym poziomem odniesienia będzie nieskończoność, w której wartość energii potencjalnej wynosi zero.

$$U(r) = -q \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

265

Praca i energia potencjalna pola elektrycznego

Zatem dla ładunku punktowego Q jako źródła pola elektrycznego mamy

$$U(r) = -q \int_{\infty}^r E dl = -q \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r} \right) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

266

Potencjał pola elektrycznego

Potencjał elektryczny definiujemy jako energia potencjalna na jednostkowy ładunek

$$V = \frac{U}{q}$$

Jednostką potencjału elektrycznego jest volt wyrażony jako

$$[V] = \frac{J}{C}$$

Dla ładunku punktowego jako źródła pola elektrycznego w odległości r od niego mamy potencjał równy

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

267

Potencjał pola elektrycznego

Różnica potencjałów między dwoma punktami jest równa pracy potrzebnej na przeniesienie ładunku jednostkowego pomiędzy tymi punktami

$$V_A - V_B = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Z powyższego możemy zauważyć, że dla przypadku jednowymiarowego wzdłuż prostej wektor natężenia pola elektrycznego będzie ujemną pochodną potencjału po odległości

$$E = - \frac{dV(r)}{dr}$$

268

Potencjał pola elektrycznego

W ogólności zapiszemy wektor natężenia pola elektrycznego jako ujemny gradient potencjału tego pola

$$\vec{E} = -gradV$$

gdzie gradient dla współrzędnych kartezjańskich definiujemy jako

$$\vec{E} = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

269

Pojemność elektryczna

Pojemność elektryczna C przewodnika (lub układu przewodników) to wielkość określająca, jak duży ładunek Q można zgromadzić na tym przewodniku przy danym potencjale V

$$C = \frac{Q}{V}$$

gdzie:

C — pojemność elektryczna [farad, F],

Q — ładunek zgromadzony na przewodniku [kulomb, C],

V — potencjał (lub różnica potencjałów w przypadku układu) [wolt, V].

270

Pojemność elektryczna

Pojemność elektryczna C przewodnika (lub układu przewodników) to wielkość określająca, jak duży ładunek Q można zgromadzić na tym przewodniku przy danym potencjale V

$$C = \frac{Q}{V}$$

gdzie:

C — pojemność elektryczna,

Q — ładunek zgromadzony na przewodniku,

V — potencjał (lub różnica potencjałów w przypadku układu).

Jednostką pojemności elektrycznej jest farad

$$1F = \frac{1C}{1V}$$

271

Pojemność elektryczna

Najczęściej pojęcie pojemności odnosi się do kondensatora — czyli układu dwóch przewodników, naładowanych przeciwnymi ładunkami $\pm Q$, między którymi występuje różnica potencjałów U

$$C = \frac{Q}{U}$$

Pojemność zależy tylko od kształtu, wymiarów i rodzaju dielektryka między przewodnikami.

Dla kondensatora płaskiego złożonego z dwóch płytek metalowych o powierzchni S i odległości d między płytkami oraz dielektryku wypełniającym tę przestrzeń o stałej przenikalności elektrycznej ośrodka ϵ mamy

$$C = \epsilon_0 \epsilon \frac{S}{d}$$

272

Energia zgromadzona w kondensatorze

Kondensator o pojemności C i napięciu U gromadzi ładunek $Q=CU$.
Ładunek dq wnoszony do kondensatora przy potencjale V wykonuje pracę elementarną:

$$dW = Vdq$$

Ponieważ podczas ładowania napięcie rośnie liniowo od 0 do U w miarę przyrostu ładunku q , mamy zależność:

$$V(q) = \frac{q}{C}$$

Całkowita praca wykonana przy ładowaniu kondensatora od $q=0$ do $q=Q$

$$W = \int_0^Q V(q) dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}$$

273

Łączenie kondensatorów

W celu budowania obwodów elektrycznych z użyciem kondensatorów możemy uzyskiwać pożądane wartości stosując obwody zastępcze złożone z połączonych szeregowo lub równolegle kondensatorów.

Połączenie równoległe

Kondensatory mają wspólne końcówki

Całkowity ładunek wynosi

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

Napięcie dla każdego kondensatora wynosi

$$U_1 = U_2 = \dots = U_n$$

Zatem pojemności

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

274

Łączenie kondensatorów

Połączenie szeregowe - kondensatory są połączone jeden za drugim.

Napięcia się sumują

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

Ładunek na każdym kondensatorze jest taki sam

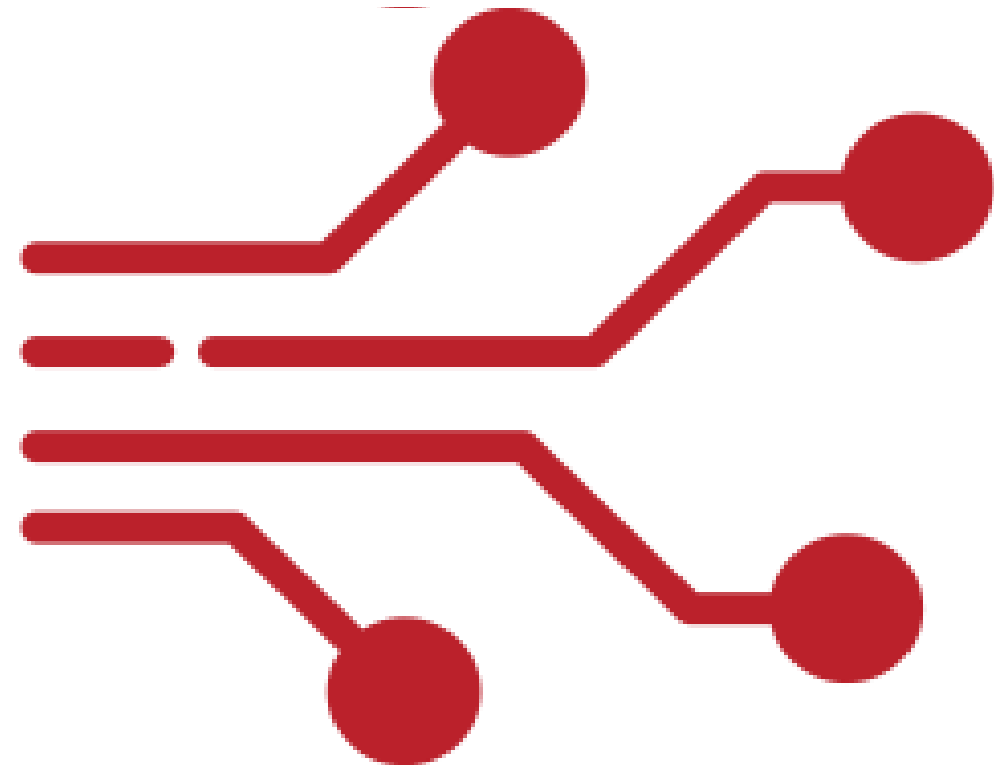
$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n$$

Zatem pojemność wynosi

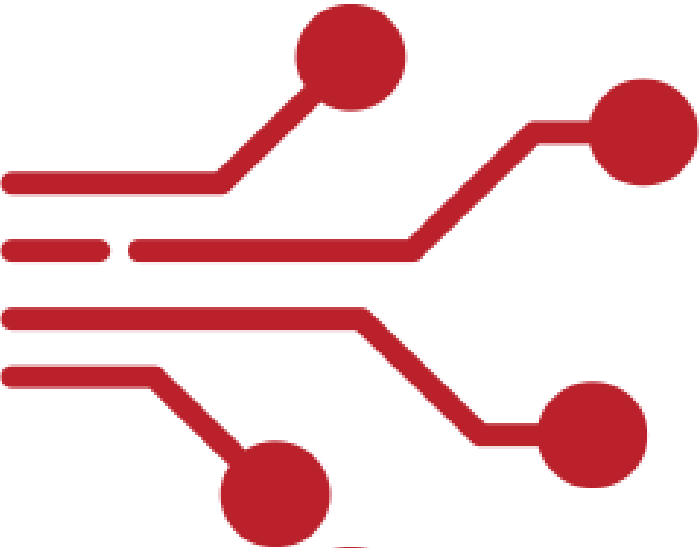
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

275

Elektryczność



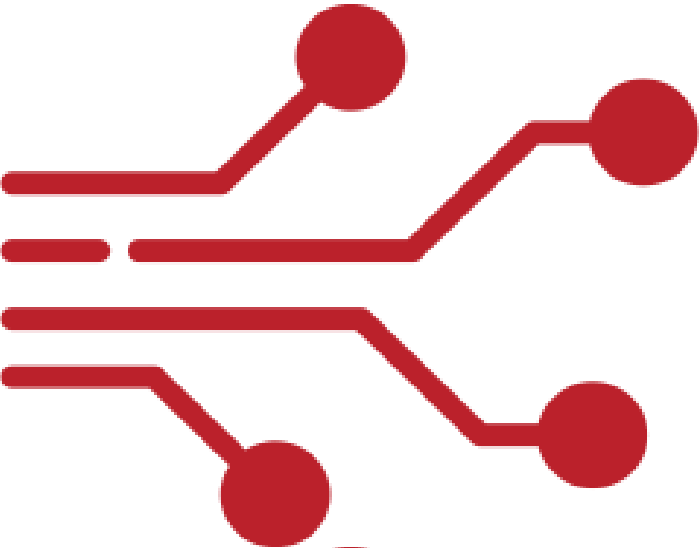
276



Prąd elektryczny to uporządkowany ruch ładunków elektrycznych w przewodniku lub innym ośrodku.

- w metalach prąd powodują elektrony swobodne.
- w elektrolitach przez jony dodatnie i ujemne.
- w półprzewodnikach przez elektrony i dziury.
- w gazach — jony i elektrony powstałe w wyniku jonizacji.

277



Kierunek prądu

Umowny kierunek prądu: od bieguna dodatniego (+) do ujemnego (–) źródła.

Rzeczywisty kierunek ruchu elektronów w metalach: od (–) do (+).

Ta różnica wynika z historycznego przyjęcia konwencji jeszcze przed odkryciem elektronów.

278

Natężenie prądu elektrycznego

Natężenie prądu elektrycznego przepływającego przez jednostkę powierzchni określamy jako ładunek przepływający przez tę powierzchnię w jednostce czasu

$$I = \frac{Q}{t}$$

Jednostką natężenia prądu elektrycznego jest amper wyrażony jako

$$1A = \frac{1C}{1s}$$

Dla zmiennego w czasie przepływającego ładunku możemy natężenie prądu wyrazić jako pochodną

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

279

Gęstość prądu elektrycznego

Zdefiniujemy gęstość prądu elektrycznego jako

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

Gdzie ρ – jest gęstością przepływającego ładunku, a $\vec{v}$ jest wektorem prędkości z jakim poruszają się ładunki. Jednostką gęstości prądu jest $\frac{A}{m^2}$.

Mnożąc skalarnie wektor gęstości prądu przez powierzchnię otrzymamy wartość natężenia prądu elektrycznego

$$I = \vec{j} \cdot \vec{A}$$

Dla niejednorodnego j na powierzchni natężenie obliczamy jako

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

280

Opór elektryczny przewodników

W metalach elektrony są swobodnymi nośnikami ładunku, ale poruszają się przez sieć krystaliczną utworzoną z dodatnich jonów metalu.

Pod wpływem pola elektrycznego $\vec{E}$ elektrony uzyskują średnią prędkość dryfu $\vec{v}_d$ jednak nie rośnie ona bez końca, bo elektrony:

- zderzają się z jonami sieci krystalicznej,
- z zanieczyszczeniami (obcymi atomami w strukturze),
- z defektami sieci (np. dyslokacjami, granicami ziaren),
- a przy wyższych temperaturach – z drganiami cieplnymi sieci (fononami).

Każde takie zderzenie zmienia kierunek ruchu elektronu, przez co średnia prędkość dryfu utrzymuje się na stałym poziomie. To powoduje powstanie oporu.

281

Opór elektryczny przewodników

Model Drudego – opór jako efekt zderzeń

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$$

gdzie σ – przewodnictwo elektryczne, n – koncentracja elektronów przewodnictwa, e – ładunek elektronu, m – masa elektronu, τ – średni czas między zderzeniami.

Można zdefiniować opór właściwy jako odwrotność przewodnictwa elektrycznego

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m}{ne^2\tau}$$

Widzimy więc, że im częstsze zderzenia (mniejsza τ), tym większy opór.

282

Opór elektryczny przewodników

Czynniki wpływające na opór

- Długość przewodnika L i przekrój poprzeczny S . Im dłuższy przewodnik, tym więcej zderzeń, stąd większy opór. Im grubszy przewodnik, tym więcej elektronów na jednostkę powierzchni, stąd mniejszy opór

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

- Rodzaj materiału (rezystywność ρ): Zależy od struktury elektronowej, liczby nośników, czystości itp.
- Temperatura - w metalach wraz ze wzrostem temperatury rosną drgania sieci (więcej zderzeń), więc opór rośnie. W półprzewodnikach jest odwrotnie: wzrost temperatury zwiększa liczbę nośników, więc opór maleje.
- Zanieczyszczenia i niejednorodność materiału, wprowadzają dodatkowe ośrodki rozpraszania – zwiększają opór.

283

Opór elektryczny przewodników

Dla metali opór rośnie z temperaturą:

$$R(T) = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

Gdzie R_0 - opór elektryczny przewodnika w temperaturze T_0 , α - temperaturowy współczynnik oporu elektrycznego.

Jest to liniowa zależność oporu elektrycznego od temperatury.

284

Prawo Ohma

Prawo Ohma mówi, że natężenie prądu elektrycznego płynącego przez przewodnik w danej temperaturze jest wprost proporcjonalne do przyłożonego napięcia, a odwrotnie proporcjonalne do oporu elektrycznego tego przewodnika.

$$I = \frac{U}{R}$$

gdzie U — napięcie między końcami przewodnika [V], I — natężenie prądu płynącego przez przewodnik [A], R — opór elektryczny przewodnika [Ω].

285

Siła elektromotoryczna

Siła elektromotoryczna ϵ to praca wykonana przez siły nieelektrostatyczne (np. chemiczne, indukcyjne, termoelektryczne) przy przemieszczeniu jednostkowego ładunku w zamkniętym obwodzie elektrycznym.

$$\epsilon = \frac{A}{q}$$

Gdzie ϵ - siła elektromotoryczna (SEM), A – praca wykonana nad ładunkiem q .

Jednostką SEM jest Volt

$$[\epsilon] = \frac{J}{C} = V$$

286

Siła elektromotoryczna

W źródle prądu (np. w baterii, ogniwie, prądnicy) działają siły, które nie są elektrostatyczne — np. reakcje chemiczne lub indukcja elektromagnetyczna.

Te siły „pompują” ładunki z potencjału niższego do wyższego (wbrew polu elektrycznemu), utrzymując różnicę potencjałów między biegunami źródła.

Dlatego SEM można rozumieć jako zdolność źródła do wytwarzania napięcia lub do wykonywania pracy nad ładunkami.

W baterii reakcje chemiczne powodują:

- przemieszczanie elektronów w przewodzie zewnętrznym od bieguna ujemnego do dodatniego,
- jednocześnie siły chemiczne wewnątrz źródła przesuwają ładunki przeciwnie do kierunku siły pola elektrycznego.
- Efekt: na zaciskach baterii utrzymuje się różnica potencjałów, nawet przy braku przepływu prądu.

Ta różnica potencjałów w stanie otwartego obwodu jest równa SEM.

287

Prawa prądu stałego

Pierwsze prawo Kirchhoffa — prawo węzłów:

Suma algebraiczna natężeń prądów wpływających do węzła jest równa sumie prądów wypływających z tego węzła.

$$\sum_i I_i = 0$$

To prawo wyraża zasadę zachowania ładunku elektrycznego — ładunek nie może się w węźle gromadzić ani zniknąć. Każdy ładunek, który dopływa do węzła, musi też z niego odpłynąć.

288

Prawa prądu stałego

Drugie prawo Kirchhoffa — prawo oczek:

Suma algebraiczna spadków napięć w oczku obwodu jest równa sumie sił elektromotorycznych (SEM) w tym oczku.

$$\sum_i U_i = \sum_k \epsilon_k$$

To prawo wyraża zasadę zachowania energii elektrycznej — całkowita energia dostarczona ładunkowi przez źródła napięcia w zamkniętym obwodzie równa się energii, którą ten ładunek oddaje w postaci spadków napięć (np. w rezystorach).

289

Łączenie oporów elektrycznych

W praktyce często łączy się kilka rezystorów, aby uzyskać zastępczy opór R o określonej wartości — np. żeby ograniczyć prąd, dobrać napięcie lub symulować inne warunki pracy.

Są dwa podstawowe typy połączeń:

- Szeregowe
- Równoległe
- oraz kombinacje tych typów (tzw. połączenia mieszane).

290

Szeregowe łączenie oporów elektrycznych

Prąd w każdym rezystorze jest taki sam
(bo płynie przez oporniki jeden po drugim).

Napięcia na poszczególnych rezystorach mogą być różne i zależne od wartości oporu.

Całkowite napięcie źródła to suma napięć
na każdym oporze.

Dla rezystorów $R_1, R_2, \dots, R_n$ połączonych szeregowo opór zastępczy wynosi:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

291

Równoległe łączenie oporów elektrycznych

Napięcie na każdym rezystorze jest takie samo (bo wszystkie są przyłączone w tych samych punktach).

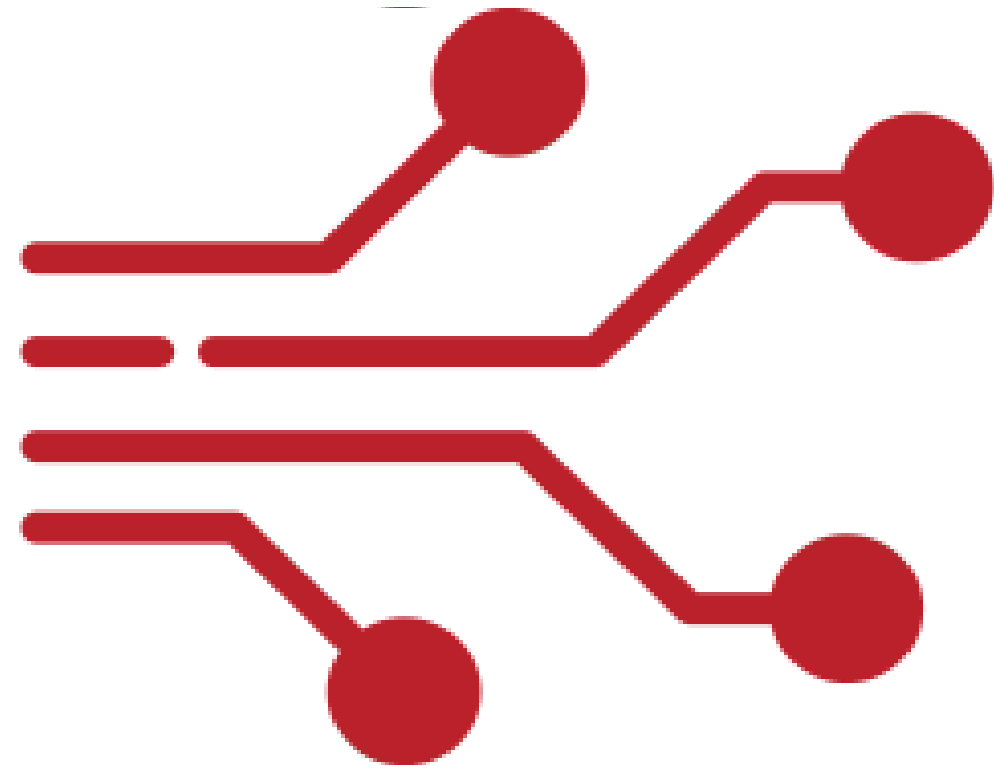
Prąd całkowity rozdziela się między poszczególne gałęzie.

Dla rezystorów $R_1, R_2, \dots, R_n$ połączonych równolegle opór zastępczy wynosi:

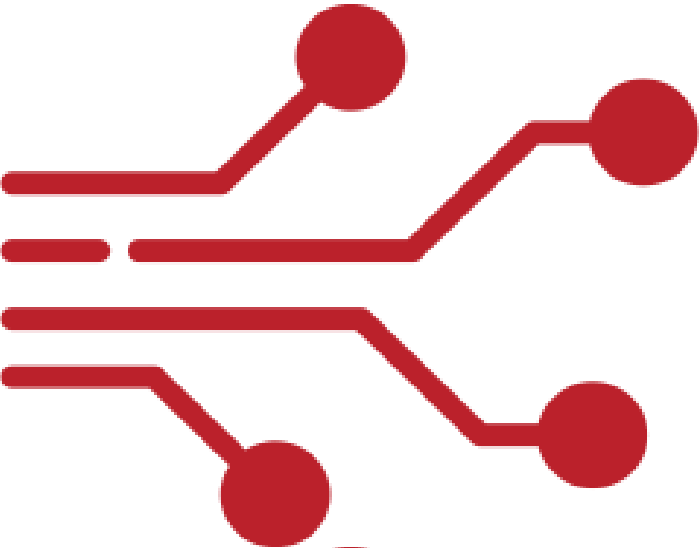
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

292

Magnetyzm



293



Magnetyzm to dział fizyki zajmujący się zjawiskami związanymi z oddziaływaniem pól magnetycznych na materiały oraz na poruszające się ładunki elektryczne.

Innymi słowy — magnetyzm opisuje, jak poruszające się ładunki lub magnesy wytwarzają pola magnetyczne i jak te pola działają na inne ładunki lub magnesy.

294

Siła Lorentza

Na ładunek q , poruszający się z prędkością $\vec{v}$ w polu elektrycznym $\vec{E}$ i magnetycznym $\vec{B}$ działa siła Lorentza postaci

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

gdzie $\vec{B}$ - jest indukcji pola magnetycznego.

Dla samego pola magnetycznego mamy

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Siła magnetyczna nigdy nie wykonuje pracy nad ładunkiem, bo jest zawsze prostopadła do wektora prędkości.

W efekcie zmienia tylko kierunek ruchu, nie zmienia energii kinetycznej.

295

Ruch cząstki w jednorodnym polu magnetycznym

Jeżeli wektor prędkości jest prostopadły do wektora indukcji magnetycznej $\vec{v} \perp \vec{B}$ to tor cząstki poruszającej się w tym polu będzie okręgiem. Możemy ze wzoru na siłę Lorentza wyznaczyć promień tego okręgu oraz okres obiegu ładunku wokół tego okręgu. Siła magnetyczna będzie siłą dośrodkową, zatem

$$F = qvB = \frac{mv^2}{r}$$

$$r = \frac{mv}{qB}$$

Korzystając z relacji dla ruchu po okręgu mamy

$$v = \omega r \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

296

Doświadczenie Ørsteda (Oersteda)

Oersted przeprowadził prosty, ale genialny eksperyment:

- Na stole umieścił igłę magnetyczną (kompas).
- Nad igłą położył przewód elektryczny.
- Następnie włączył prąd elektryczny w przewodzie.

Następnie zaobserwował następujące zachowanie igły magnetycznej:

- Gdy prąd nie płynął, igła magnetyczna ustawiała się w kierunku północ–południe (tak jak zwykły kompas w polu magnetycznym Ziemi).
- Gdy popłynął prąd w przewodzie, igła odchylała się od swojego pierwotnego położenia.
- Po odwróceniu kierunku prądu, igła odchylała się w przeciwną stronę.
- Gdy prąd wyłączano, igła wracała do pozycji północ–południe.

297

Doświadczenie Ørsteda (Oersteda)

Oersted przeprowadził prosty, ale genialny eksperyment:

- Na stole umieścił igłę magnetyczną (kompas).
- Nad igłą położył przewód elektryczny.
- Następnie włączył prąd elektryczny w przewodzie.

Następnie zaobserwował następujące zachowanie igły magnetycznej:

- Gdy prąd nie płynął, igła magnetyczna ustawiała się w kierunku północ–południe (tak jak zwykły kompas w polu magnetycznym Ziemi).
- Gdy popłynął prąd w przewodzie, igła odchylała się od swojego pierwotnego położenia.
- Po odwróceniu kierunku prądu, igła odchylała się w przeciwną stronę.
- Gdy prąd wyłączano, igła wracała do pozycji północ–południe.

298

Pole magnetyczne od przewodnika z prądem

Kiedy przez prostoliniowy przewodnik płynie prąd elektryczny I , w jego otoczeniu wytwarza się pole magnetyczne. To pole ma symetrię osiową — linie sił pola magnetycznego tworzą okręgi wokół przewodnika.

Kierunek i kształt linii pola

- Linie pola magnetycznego są zamkniętymi okręgami wokół przewodnika.
- Ich płaszczyzny są prostopadłe do przewodnika.
- Natężenie pola (indukcja magnetyczna) maleje wraz z odległością od przewodnika — im dalej od niego, tym słabsze pole.

299

Pole magnetyczne od przewodnika z prądem

Reguła prawej dłoni służy do określenia kierunku wektora indukcji magnetycznej $\vec{B}$ wokół przewodnika z prądem elektrycznym.

Jeśli prawą dłońią obejmiesz przewodnik tak, aby kciuk wskazywał kierunek prądu I , to zgięte palce wskażą kierunek linii pola magnetycznego $\vec{B}$.

300

Prawo Biota-Savarta

Wartość i kierunek indukcji magnetycznej w punkcie przestrzeni są proporcjonalne do natężenia prądu oraz do wektora elementu przewodnika i odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości między przewodnikiem a punktem, w którym mierzymy pole.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^2}$$

Gdzie $d\vec{B}$ - indukcja magnetyczna pochodząca od elementu przewodnika $d\vec{l}$, I – wartość natężenia prądu elektrycznego w przewodniku, μ_0 - przenikalność magnetyczna próżni, r – odległość od elementu przewodnika $d\vec{l}$, $\vec{r}$ - wektor jednostkowy wzdłuż odcinka określającego odległość r od elementu przewodnika.

301

Prawo Biota-Savarta

W celu wyznaczenia wartości wektora indukcji magnetycznej dla całego przewodnika w punkcie należy powyższe wyrażenie scałkować

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^2}$$

Indukcja pola magnetycznego wyznaczana jest w teslach.

$$[B] = T = \frac{N}{A \cdot m}$$

A stała przenikalności magnetycznej próżni ma wartość

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{Tm}{A}$$

302

Pole magnetyczne pętli z prądem elektrycznym

Korzystając z równia Biota-Savarta możemy wyznaczyć wartość pola magnetycznego na osi pętli kołowej jako

$$B(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

gdzie R – promień pętli z prądem, x – odległość od płaszczyzny pętli wzdłuż na jej osi.

To samo możemy zrobić dla układu szeregu pętli tworzących cewkę magnetyczną (solenoid). Dla wnętrza cewki mamy o N zwojach i długości L

$$B = \mu_0 \frac{NI}{L}$$

A dla brzegu cewki otrzymujemy równanie

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{NI}{L}$$

303

Prawo Ampera

Podobnie jak dla pola elektrycznego korzystaliśmy z prawa Gaussa tak i dla magnetyzmu możemy skorzystać z prawa Ampera ułatwiającego obliczenia opisującym związek między prądem elektrycznym a wytwarzanym przez niego polem magnetycznym.

Całka krzywoliniowa z wektora indukcji magnetycznej $\vec{B}$ wzdłuż dowolnej zamkniętej krzywej jest równa iloczynowi przenikalności magnetycznej próżni μ_0 i całkowitego prądu I , który przepływa przez powierzchnię ograniczoną tą krzywą.

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Gdzie $\vec{B}$ - wektor indukcji pola magnetycznego, $d\vec{l}$ - element liniowy krzywej L , μ_0 - przenikalność magnetyczna próżni, I – całkowity prąd elektryczny przepływający przez powierzchnię ograniczoną krzywą L .

Prawo Ampera

Dla przewodnika prostoliniowego z prądem korzystając z prawa Ampera mamy

$$\oint_L B dl = B \oint_L dl = B(2\pi r) = \mu_0 I$$

Zatem

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Prawo Ampera ma swoje ograniczenia do przypadków, w których możemy dobrze zdefiniować krzywą zamkniętą po której wykonujemy całkowanie. Dla pojedynczej pętli z prądem łatwiej jest skorzystać z prawa Biota-Savarta.

305

Oddziaływanie pola magnetycznego na przewodnik z prądem

Rozważając równanie na siłę Lorentza możemy policzyć jaka siła działa na ładunki poruszające się w polu magnetycznym ale płynące w przewodniku z prądem.

$$d\vec{F} = dq\vec{v} \times \vec{B}$$

$$d\vec{F} = dq \left(\frac{d\vec{l}}{dt} \right) \times \vec{B} \quad I = \frac{dq}{dt}$$

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

Dla prostoliniowego przewodnika w jednorodnym polu magnetycznym mamy

$$F = ILB \sin \alpha$$

gdzie L – długość przewodnika, α – kąt pomiędzy kierunkiem przepływu prądu a wektorem indukcji pola magnetycznego.

306

Ramka z prądem w jednorodnym polu magnetycznym

Rozważmy ramkę prostokątną utworzoną przez przewodnik z prądem i umieszczoną w obszarze jednorodnego pola magnetycznego.

Przeanalizujemy działające na boki ramki siły zgodnie ze wzorem

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$$

Dwa dłuższe boki (długość a) - siły działają w kierunku równoległym do pola lub w przeciwnych kierunkach - siły się znoszą, nie przyczyniają się do momentu.

Dwa krótsze boki (długość b) - siły wzdłuż osi równoległej do dłuższych boków tworzą parę sił, która próbuje obrócić ramkę.

$$\vec{M} = \vec{a} \times \vec{F}$$
$$M = IabB \sin \alpha$$

Maksymalny moment siły wynosi

$$M = ISB$$

307

Ramka z prądem w jednorodnym polu magnetycznym

Iloczyn prądu natężenia prądu i pola powierzchni S ramki nazywamy momentem magnetycznym ramki

$$\mu = IS$$

Zatem moment siły działający na ramkę możemy zapisać ogólnie jako

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Zastosowania:

- Silniki elektryczne – ramka z prądem w polu magnetycznym - moment obrotowy - ruch obrotowy.
- Galwanometry – pomiar natężenia prądu na podstawie odchylenia ramki w polu magnetycznym.
- Prądnice – odwrócenie procesu: ruch mechaniczny - generowanie prądu.

308

Zjawisko indukcji elektromagnetycznej

Indukcja elektromagnetyczna to zjawisko powstawania siły elektromotorycznej (SEM) i prądu w obwodzie wskutek zmiany magnetycznego strumienia przez powierzchnię ograniczoną tym obwodem. Zjawisko obejmuje dwie najbardziej typowe przyczyny zmiany strumienia: (i) zmiana pola B w czasie i (ii) ruch przewodnika względnie do pola (zmiana geometrii powierzchni). Rozważ przewodnik długości L poruszający się prędkością v prostopadle do jednorodnego B . Ładunki doświadczają siły Lorentza

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Różnica potencjałów na końcach przewodnika (SEM) to praca na ładunku jednostkowym:

$$\epsilon = \frac{1}{q} \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Dla prostego ruchu z geometrią $\vec{v} \perp \vec{B}$ i $d\vec{l}$ równoległym do długości L :

$$\epsilon = BLv$$

309

Zjawisko indukcji elektromagnetycznej

Z drugiej strony licząc strumień pola magnetycznego przez powierzchnię S mamy

$$\epsilon = - \frac{d\Phi}{dt}$$
$$\Phi = BS$$

Przykładowo, jeżeli zmiany strumienia zachodzą w cewce złożonej z N zwojów to sumaryczna siła elektromotoryczna wyniesie

$$\epsilon = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

Reguła Lenza (kierunek indukowanego prądu)

- Prąd płynie tak, by jego własne pole magnetyczne przeciwdziało zmianie strumienia.

Jeżeli strumień rośnie w kierunku „na zewnątrz”, prąd indukowany utworzy pole „do wewnątrz”.

W praktyce stosujemy regułę prawej dłoni i znak minus przed pochodną

310

Równania Maxwella

Zbierając wszystkie przedstawione wcześniej informacje dla pól elektrycznego i magnetycznego oraz zjawisk indukcji elektromagnetycznej możemy teraz podać uogólnione równania opisujące relacje między tymi polami oraz ich zależność od źródeł.

Zbiór tych równań nazywa się równaniami Maxwella. Możemy je zapisać w formie całkowej jak i różniczkowej. Na kolejnych slajdach podana jest ich postać.

311

Równania Maxwella

Prawo Gaussa dla pola elektrycznego

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Strumień pola elektrycznego przez powierzchnię zamkniętą jest proporcjonalny do ładunku wewnątrz tej powierzchni.

- Źródłem pola elektrycznego są ładunki elektryczne.
- Jeśli $Q = 0$, to wektor $\vec{E}$ tworzy linie zamknięte (brak źródeł i ujść).

312

Równania Maxwella

Prawo Gaussa dla pola magnetycznego

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Strumień pola magnetycznego przez dowolną powierzchnię zamkniętą zawsze wynosi zero.

- W przyrodzie nie istnieją pojedyncze bieguny magnetyczne (tzw. monopole magnetyczne).
- Linie pola magnetycznego są zawsze zamknięte – nie mają początku ani końca.

313

Równania Maxwella

Prawo Faradaya indukcji elektromagnetycznej

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Zmienne pole magnetyczne powoduje powstanie wirującego pola elektrycznego.

- To właśnie zjawisko indukcji elektromagnetycznej Faradaya (podstawa działania generatorów, transformatorów).
- Pole $\vec{E}$ nie jest wtedy elektrostatyczne — nie da się go opisać potencjałem skalarnym.

314

Równania Maxwella

Prawo Ampera z poprawką Maxwella

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Pole magnetyczne powstaje nie tylko przez prąd przewodzenia (I), ale również przez zmienne w czasie pole elektryczne ($\partial E / \partial t$) — to tzw. prąd przesunięcia Maxwella.

- Dzięki tej poprawce Maxwell pokazał, że pole EM może rozchodzić się w postaci fal elektromagnetycznych.

315

Równanie falowe

Z równań Maxwella wynika, że pole elektryczne $\vec{E}$ spełnia równanie falowe:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Oraz dla pola magnetycznego $\vec{B}$:

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

gdzie ∇^2 - operator Laplace'a.

316

Równanie falowe

Prędkość fali elektromagnetycznej

Z powyższego równania falowego wynika, że fala elektromagnetyczna rozchodzi się z prędkością:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 m/s$$

317

Równanie falowe

Rozwiązanie równania falowego

Dla fali płaskiej rozchodzącej się wzdłuż osi x:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t + \phi)$$

$$\vec{B}(x, t) = \vec{B}_0 \cos(kx - \omega t + \phi)$$

gdzie ω – częstość kątowna, ϕ – faza, $\vec{E}_0$ i $\vec{B}_0$ - amplitudy, k – liczba falowa

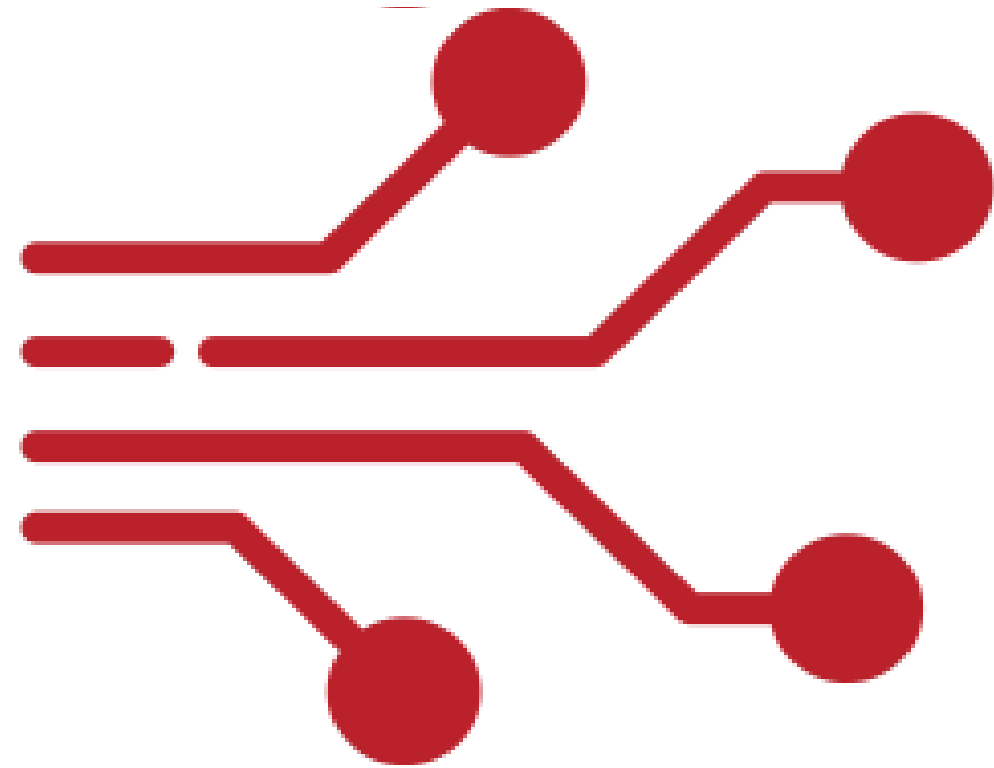
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

λ – długość fali.

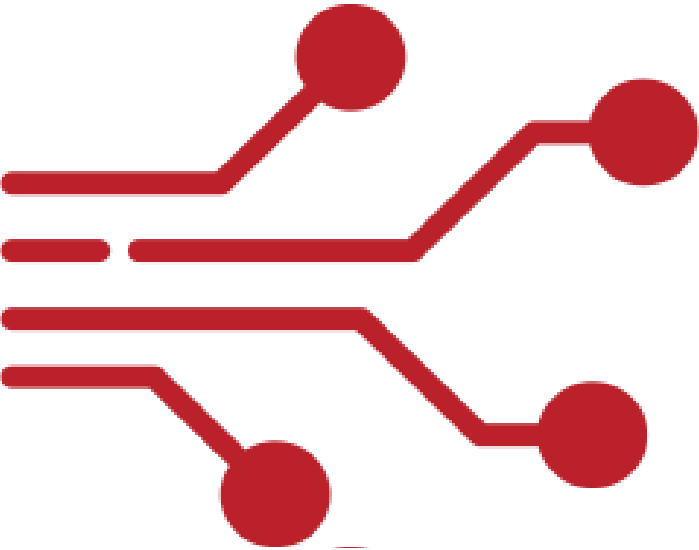
Wektory $\vec{E}$ i $\vec{B}$ są do siebie prostopadłe.

318

Optyka geometryczna i falowa



319



Optyka geometryczna zakłada, że:

Światło rozchodzi się liniowo (wzdłuż promieni).

Zjawiska takie jak odbicie i załamanie można opisać prostą geometrią.

Nie uwzględnia się efektów falowych (dyfrakcji, interferencji).

Promień świetlny jest linią styczną do wektorów kierunku fali elektromagnetycznej — to tzw. przybliżenie promieniowe fali.

320

Prawo odbicia światła

Gdy promień światła pada na gładką powierzchnię (np. lustro), odbija się zgodnie z prawem:

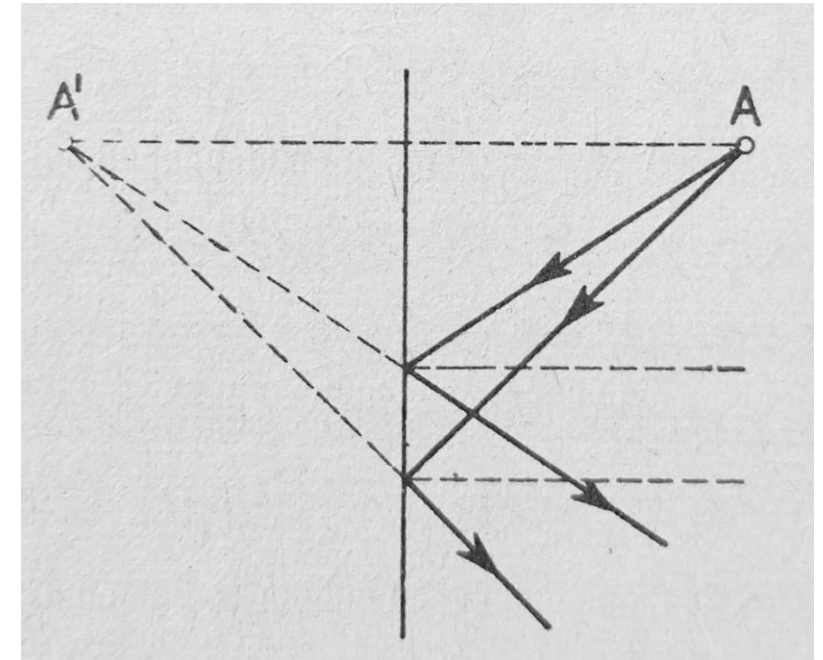
$$\alpha = \beta$$

Kąt padania równy jest kątowi odbicia światła.

α — kąt padania (między promieniem padającym a normalną),

β — kąt odbicia (między promieniem odbitym a normalną).

Oba promienie oraz normalna leżą w jednej płaszczyźnie.



Źródło: J. Massalski, M. Massalska,
Fizyka dla inżynierów, tom 1, WNT
Warszawa 1980

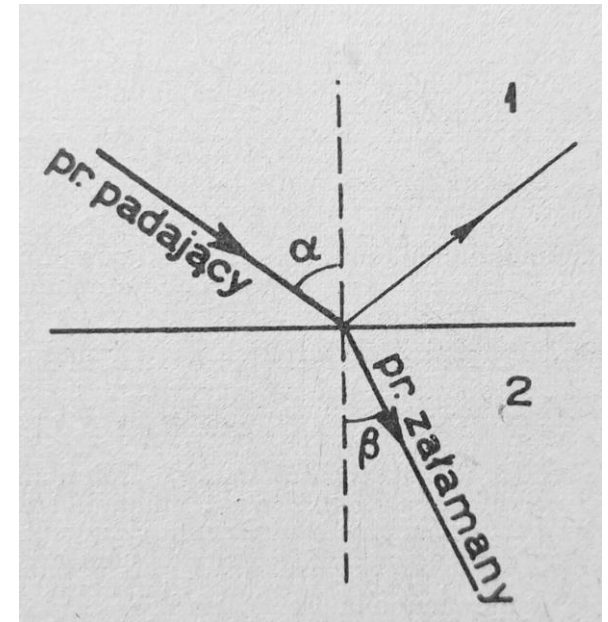
321

Prawo załamania światła (prawo Snelliusa)

Gdy światło przechodzi z ośrodka 1 do ośrodka 2 o różnych współczynnikach załamania n_1 i n_2 :

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$$

Gdzie α — kąt padania, β — kąt załamania, $n = \frac{c}{v}$ - współczynnik załamania (stosunek prędkości światła w próżni do prędkości w ośrodku).



Źródło: J. Massalski, M. Massalska,
Fizyka dla inżynierów, tom 1, WNT
Warszawa 1980

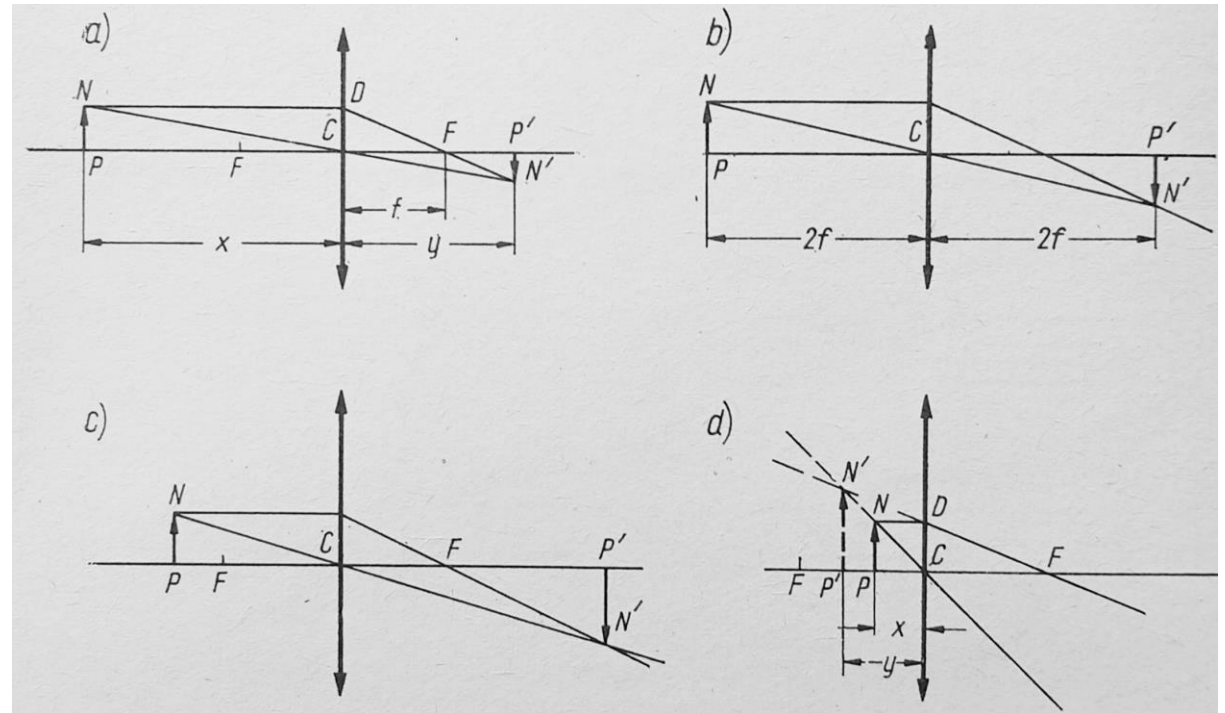
322

Soczewka cienka

Dla soczewki cienkiej o ogniskowej f , obraz przedmiotu powstaje zgodnie ze wzorem:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

gdzie x – odległość przedmiotu od soczewki, y – odległość obrazu od soczewki.



Źródło: J. Massalski, M. Massalska,
Fizyka dla inżynierów, tom 1, WNT
Warszawa 1980

323

Soczewka cienka

Wzór soczewki cienkiej w ośrodku o współczynniku załamania n

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n}{n'} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

gdzie R_1 i R_2 – promienie krzywizny powierzchni soczewki, n – współczynnik załamania światła soczewki, n' – współczynnik załamania światła ośrodka.

324

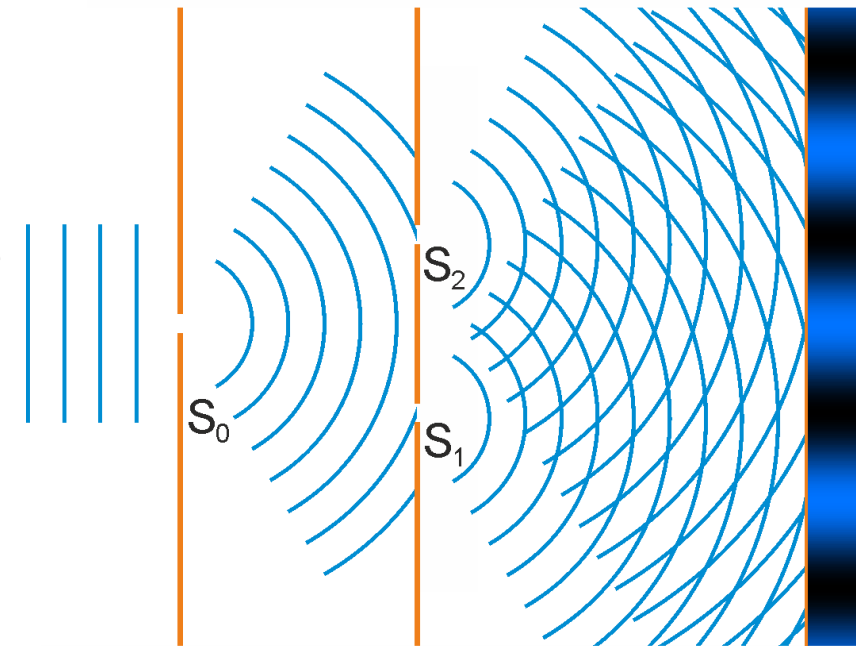
Doświadczenie Younga

Young w doświadczeniu z dwiema szczelinami wykazał falową naturę światła. Opisał wynik eksperymentu jako dyfrakcję fali świetlnej.

Fale wychodzące ze szczelin S_1 i S_2 mają stałą różnicę faz, są koherentne, więc mogą interferować.

W wyniku superpozycji powstają:

- jasne prążki – interferencja konstruktywna ($\Delta\varphi=0,2\pi,4\pi\dots$),
- ciemne prążki – interferencja destruktywna ($\Delta\varphi=\pi,3\pi\dots$).



Źródło:

<https://home.agh.edu.pl/~kakol/efizyka/w29/main29a.html>

Doświadczenie Younga

Różnica dróg optycznych dla kolejnych maksimum (jasnych prążków):

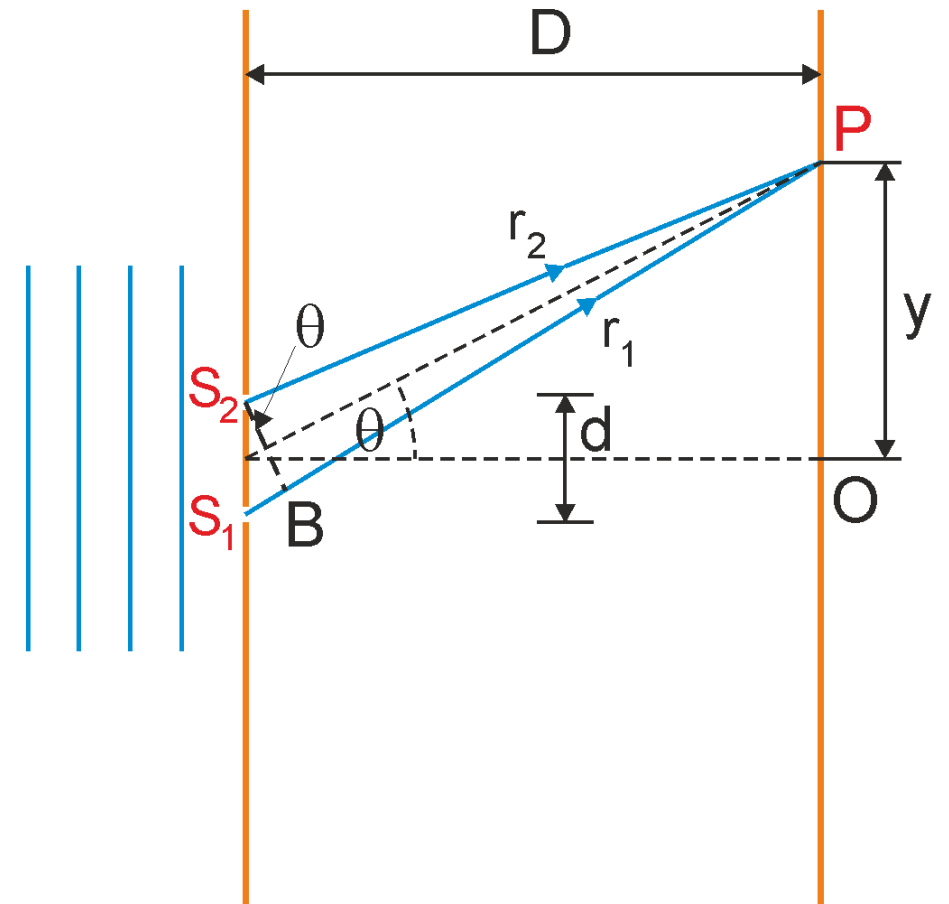
$$\Delta = d \sin \theta = m\lambda$$

gdzie d – odległość między szczelinami,
 m – rząd prążka, λ – długość fali światła.

A odległość między kolejnymi jasnymi prążkami na ekranie wynosi

$$y = \frac{\lambda D}{d}$$

gdzie D – odległość szczelin od ekranu.

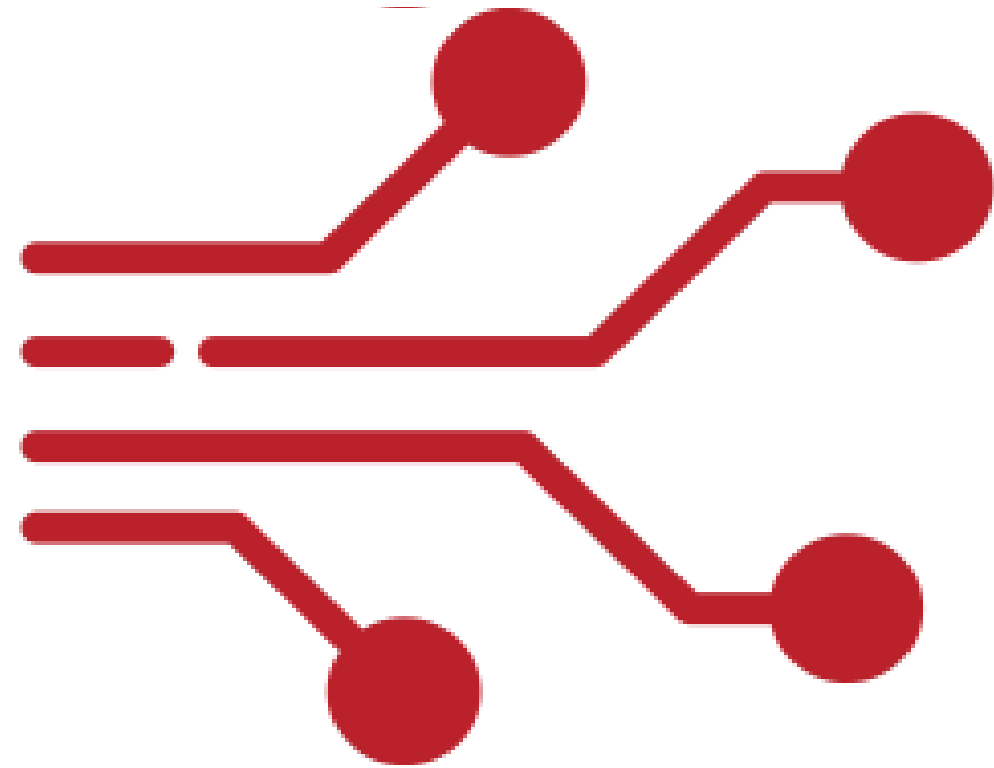


Źródło:

<https://home.agh.edu.pl/~kakol/efizyka/w29/main29a.html>

326

Fizyka współczesna



327

Promieniowanie ciała doskonale czarnego

Ciało doskonale czarne to idealny model fizyczny, który:

- całkowicie pochłania całe padające na nie promieniowanie (nie odbija i nie przepuszcza nic),
- a w stanie równowagi emituje promieniowanie zależne tylko od temperatury, a nie od rodzaju materiału.

W praktyce zbliżonym przyrządem jest komora z małym otworkiem. Promieniowanie, które wpada do środka, prawie nigdy nie wychodzi, więc otwór zachowuje się jak idealny emiter.

328

Promieniowanie ciała doskonale czarnego

Prawo Rayleigha-Jeansa (1900)

Z teorii fal elektromagnetycznych i klasycznej statystyki wynikało, że energia przypadająca na jednostkę objętości i zakres długości fal $d\lambda$ ma postać

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}$$

Przy długości fal dążących do zera $\lambda \rightarrow 0$ energia zmierzała do nieskończoności $u(\lambda, T) \rightarrow \infty$ (katastrofa w nadfiolecie).

329

Promieniowanie ciała doskonale czarnego

Prawo Wiena

Wien wyprowadził równanie rozkładu gęstości energii dla wysokich częstotliwości fal świetlnych jako

$$u(\lambda, T) = \frac{c_1}{\lambda^5} e^{-\frac{c_2}{kT}}$$

Gdzie c_1 i c_2 – stałe empiryczne. Prawo Wiena dobrze przewiduje gęstość energii promieniowania dla $\lambda \rightarrow 0$ jednak daje złe przewidywania dla długich fal.

330

Promieniowanie ciała doskonale czarnego

Rozkład Plancka

Max Planck zaproponował, że atomy ścian emitujące promieniowanie mogą wymieniać energię tylko w porcjach (kwantach) o wartości:

$$E = nh\nu, \text{ gdzie } n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

gdzie $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ jest stałą Plancka, ν – częstotliwością fali światła.

Korzystając z fizyki statystycznej określił rozkład gęstości promieniowania ciała doskonale czarnego jako

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

331

Promieniowanie ciała doskonale czarnego

Rozkład Plancka w granicznych przypadkach odpowiada rozkładowi Wiena i Rayleigha-Jeansa.

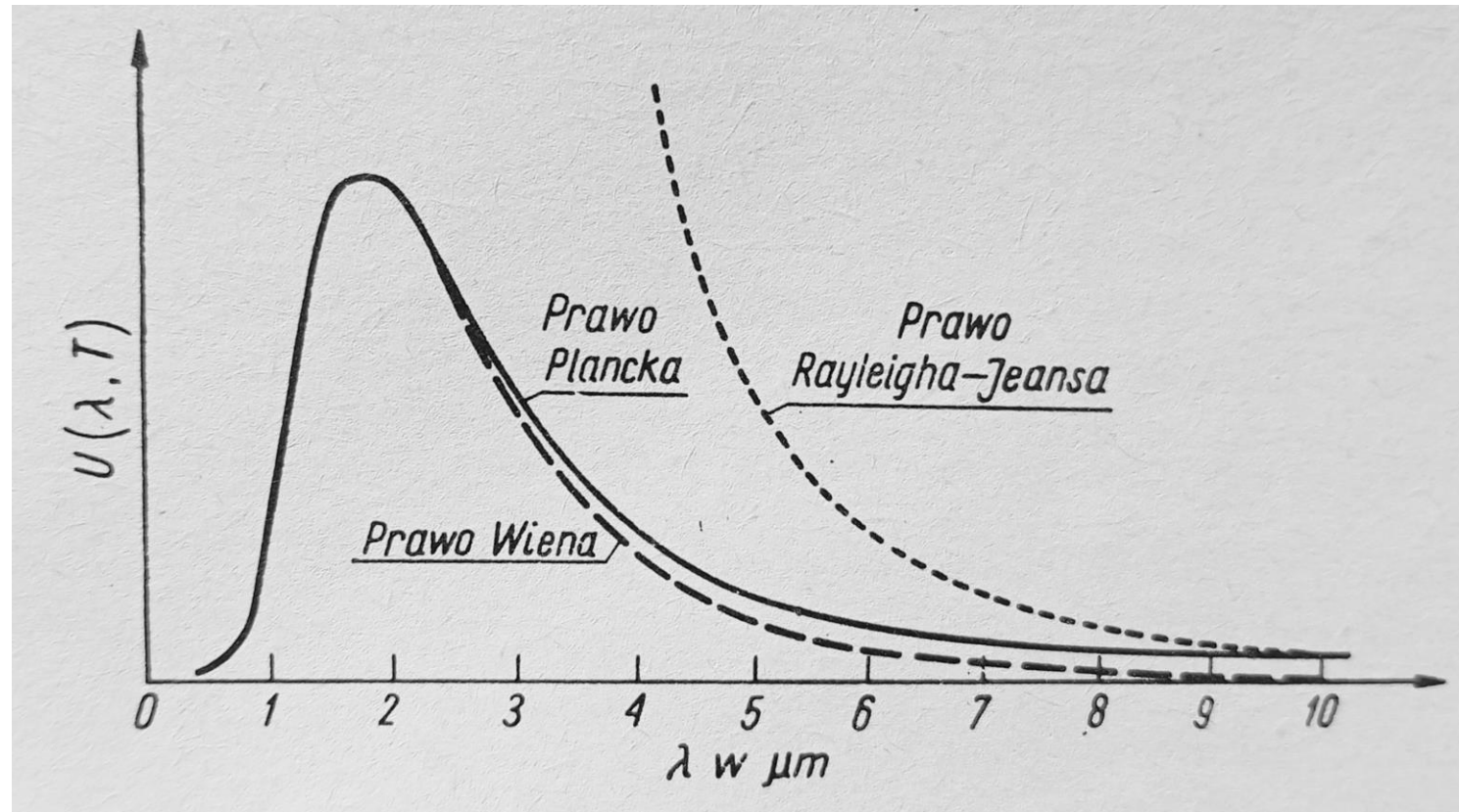
Korzystając z rozkładu Plancka można wyprowadzić eksperymentalne prawo Stefana-Boltzmana określające całkowity strumień energii wypromieniowywanej przez ciało doskonale czarne na jednostkę powierzchni. Całkując po długościach fali rozkład Plancka otrzymujemy równanie

$$\Phi = \sigma T^4$$

Gdzie σ – stała Stefana-Boltzmann, T – temperatura ciała doskonale czarnego w skali Kelvina.

332

Promieniowanie ciała doskonale czarnego



333

Promieniowanie ciała doskonale czarnego

Obliczając maksimum rozkładu Plancka można dojść do doświadczalnego prawa przesunięć Wiena mówiącego, że moc promieniowania elektromagnetycznego emitowanego przez ciało doskonale czarne przyjmuje najwyższą wartość dla długości fali odwrotnie proporcjonalnej do temperatury ciała, zgodnie ze wzorem

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}$$

gdzie λ_{max} - długość fali dla maksymalnej mocy promieniowania, b – stała Wiena, T – temperatura w skali Kelvina.

334

Efekt fotoelektryczny

Zjawisko fotoelektryczne to proces, w którym elektrony są wybijane z powierzchni metalu pod wpływem padającego na niego światła (promieniowania elektromagnetycznego).

Równanie Einsteina dla zjawiska fotoelektrycznego:

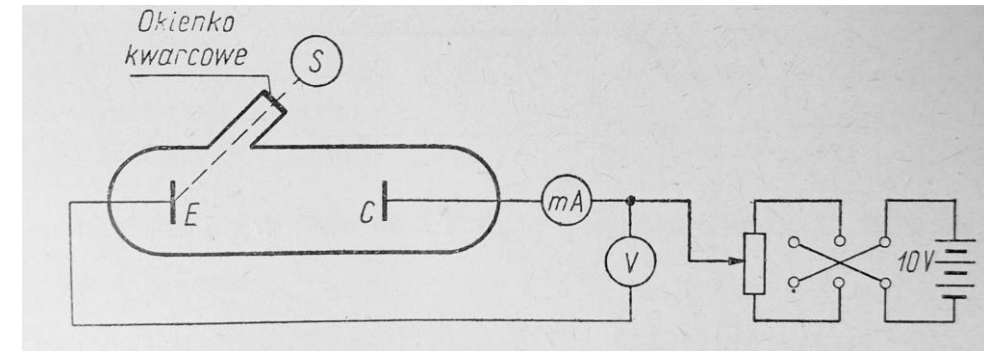
$$E_f = h\nu - W$$

$$E_f = \frac{1}{2}mv^2$$

Gdzie $h\nu$ – energia fotonów, W – praca wyjścia elektronu z powierzchni metalu.

Dla częstotliwości granicznej mamy

$$h\nu_0 = W$$

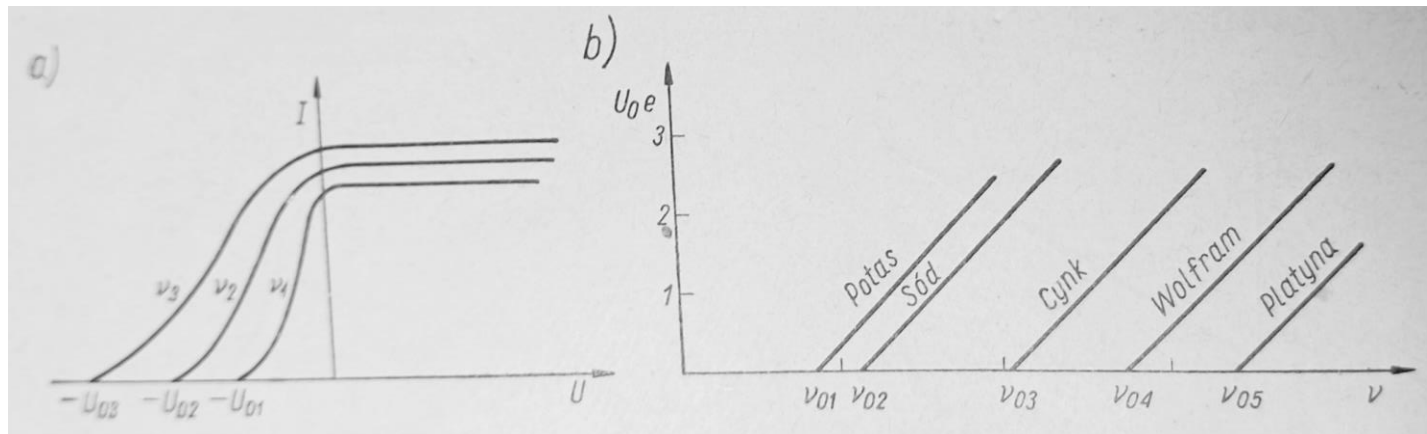


335

Efekt fotoelektryczny

Wyznaczanie stałej Plancka i wartości pracy wyjścia.

$$eU = h\nu - W = E_f = \frac{1}{2}mv_{max}^2$$



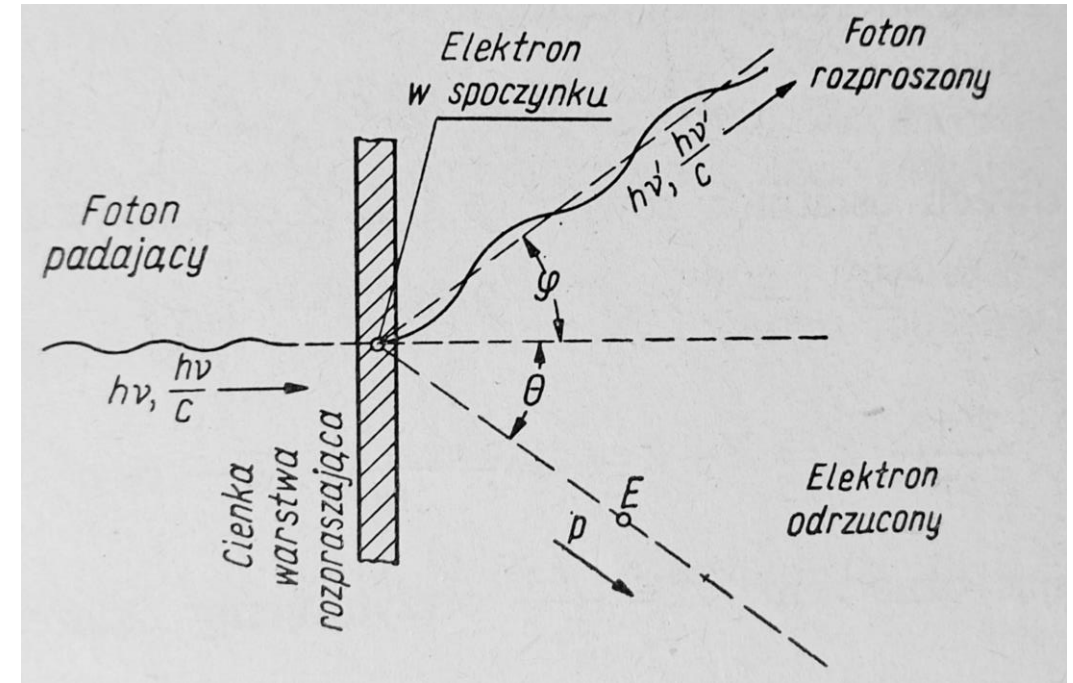
Źródło: J. Massalski, M. Massalska, Fizyka dla inżynierów, tom 2,
WNT, Warszawa 1980

336

Efekt Comptona

Efekt Comptona to zjawisko rozpraszania promieniowania elektromagnetycznego (np. promieni rentgenowskich) na swobodnych lub słabo związanych elektronach, w którym fotony tracą część swojej energii, a ich długość fali się zwiększa.

- Gdy foton o energii $h\nu$ zderza się z elektronem, przekazuje mu część swojej energii i pędu.
- foton po zderzeniu ma mniejszą energię (czyli mniejszą częstotliwość, większą długość fali),
- elektron zostaje wyrzucony z pewną energią kinetyczną.
- To zjawisko potwierdza korpuskularną naturę światła – że fotony zachowują się jak cząstki posiadające pęd.



Źródło: J. Massalski, M. Massalska, Fizyka dla inżynierów, tom 2, WNT, Warszawa 1980

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \quad 337$$

Promieniowanie Roentgena

Schemat działania lampy rentgenowskiej

Źródło elektronów (katoda) — zwykle włókno wolframowe. Elektrony uwalniane są przez emisję

Przyspieszenie — między katodą a anodą przykładane jest wysokie napięcie U (kilowolty do setek kV). Elektron zyskuje energię kinetyczną:

$$E = eU$$

Oddziaływanie z anodą — elektron uderza o materiał anody (np. W, Mo, Cu). Większość energii zamienia się w ciepło; pewna część zostaje wypromieniowana jako promieniowanie rentgenowskie — dwóch rodzajów: ciągłe i promieniowanie charakterystyczne.

Wyjście — promieniowanie przechodzi przez okienko lampy i ewentualne filtry; stosuje się też chłodzenie anody (żeby odprowadzić ciepło).

Większość energii — rząd wielkości — zamienia się w ciepło (tzw. niska sprawność przetwarzania energii na promieniowanie X).

338

Fale de Broglie'a

De Broglie założył, że jeśli światło (fala) może zachowywać się jak cząstka (foton), to odwrotnie — cząstka materialna może zachowywać się jak fala. Oznacza to, że ruchowi cząstki odpowiada fala o pewnej długości zwanej falą de Broglie'a.

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Gdzie λ – długość fali cząstki, p – pęd cząstki, h - stała Plancka.
W 1927 r. Davisson i Germer udowodnili falowy charakter elektronów, obserwując dyfrakcję elektronów na kryształach niklu — efekt analogiczny do ugięcia światła.

339

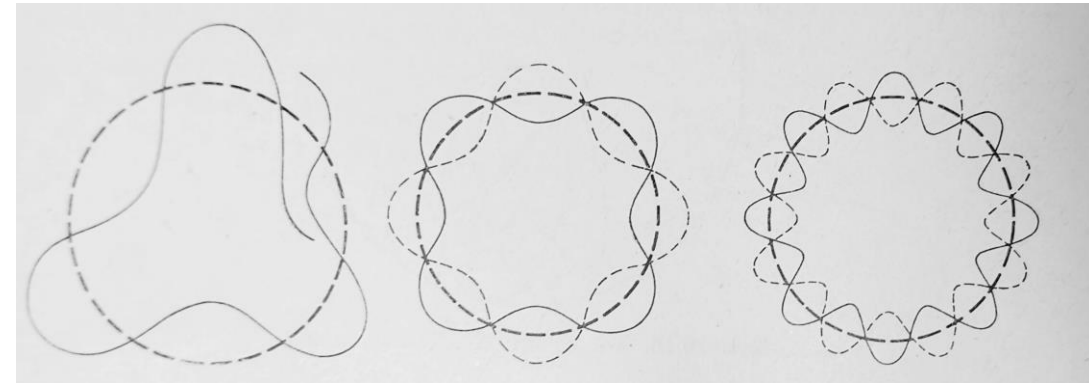
Model atomu Bohra

Model atomu Bohra (1913) to półklasyczny model opisujący budowę atomu wodoru, który łączył założenia fizyki klasycznej i kwantowej. Bohr zaproponował, że elektron krąży wokół jądra po ściśle określonych orbitach bez wypromieniowywania energii, a promieniowanie powstaje tylko podczas przeskoku między tymi orbitami.

$$\frac{ke^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$J = mvr = n \frac{h}{2\pi}$$

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} n^2$$



Źródło: J. Massalski, M. Massalska, Fizyka dla inżynierów, tom 2, WNT, Warszawa 1980

Model atomu Bohra

Energia elektronu wynosi:

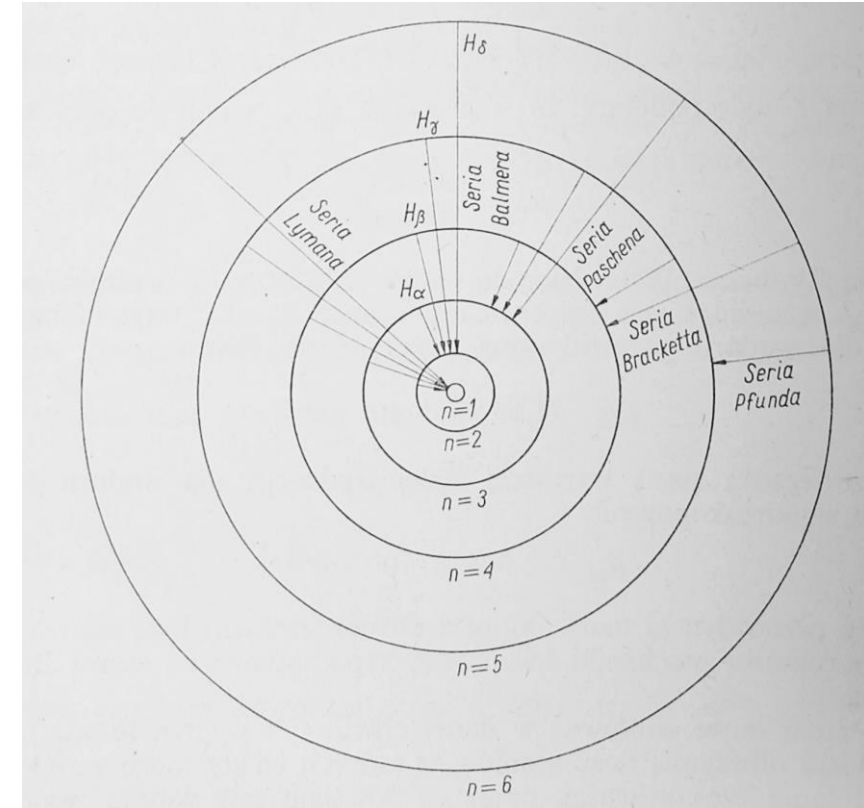
$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - k \frac{e^2}{r}$$

$$E_n = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2}$$

Przejścia elektronu między powłokami z absorpcją bądź emisją fotonu:

$$h\nu = E_n - E_m$$

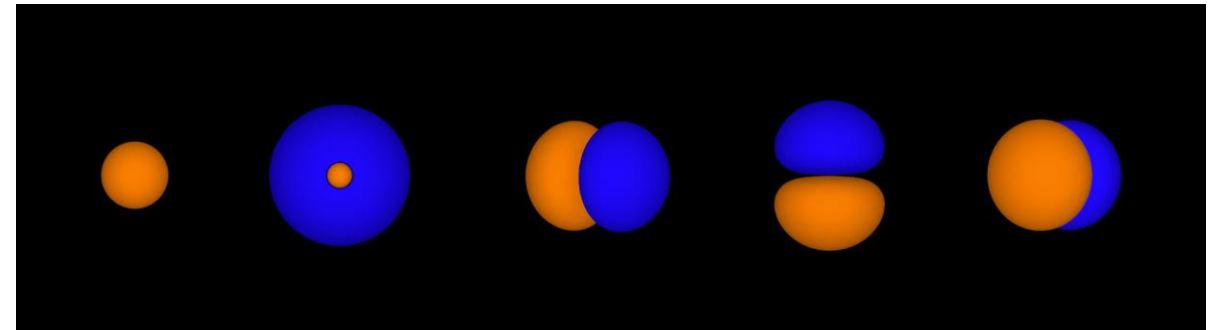
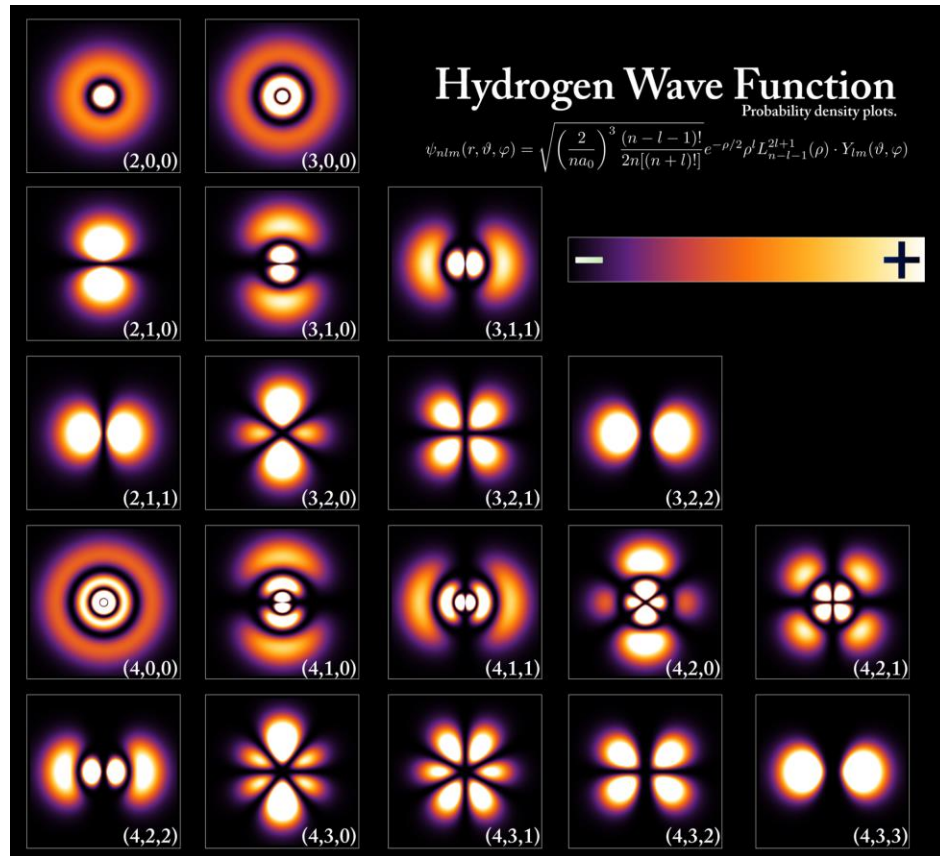
$$h\nu = 13,6eV \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$



Źródło: J. Massalski, M. Massalska, Fizyka dla inżynierów, tom 2, WNT, Warszawa 1980

341

Orbitale elektronowe atomu wodoru



Źródło:

https://en.wikipedia.org/wiki/Atomic_orbital

342

Fizyka jądrowa – podstawowe pojęcia

Jądro atomowe

- To centralna część atomu, zawierająca protony i neutrony.
- Jest dodatnio naładowane (dzięki protonom).
- Stanowi prawie całą masę atomu.
- Jego rozmiar jest rzędu 10^{-15} m (1 fm), podczas gdy cały atom ma rozmiar ok. 10^{-10} m.



Proton (p)

- Cząstka o ładunku dodatnim $+e$ i masie $m_p \approx 1,0073$ u
- Liczba protonów w jądrze określa liczbę atomową Z , czyli numer pierwiastka w układzie okresowym.

343

Fizyka jądrowa

Neutron (n)

- Cząstka **obojętna elektrycznie**, o masie $m_n \approx 1,0087u$
- Razem z protonami tworzy jądro atomowe.
- Utrzymuje stabilność jądra dzięki oddziaływaniom silnym (jądrowym).

Siły jądrowe

- Krótkiego zasięgu ($\sim 1-2$ fm), bardzo silne.
- Działają tylko między sąsiednimi nukleonami.
- Niezależne od ładunku (p-p, p-n, n-n podobne).
- Utrzymują jądro razem, mimo odpychania elektrostatycznego protonów.

344

Fizyka jądrowa

Nukleony

- Wspólna nazwa dla protonów i neutronów – cząstek budujących jądro.
Liczba nukleonów w jądrze = liczba masowa A .

Liczba atomowa (Z)

- Oznacza liczbę protonów w jądrze atomu.
- Decyduje o tym, jakim pierwiastkiem chemicznym jest dana substancja.
- W atomie obojętnym elektrycznie liczba protonów = liczba elektronów.
- Przykład:
 $Z = 6 \rightarrow$ węgiel,
 $Z = 8 \rightarrow$ tlen.

345

Fizyka jądrowa

Liczba masowa (A)

- To całkowita liczba nukleonów (protonów + neutronów) w jądrze:
- $A=Z+N$ gdzie N – liczba neutronów.
- Np. dla atomu węgla $^{12}_6\text{C} \rightarrow A = 12, Z = 6$, więc $N = 6$.

Izotopy

- Izotopy to atomy tego samego pierwiastka (czyli o tym samym Z), ale o różnej liczbie neutronów (N), a więc różnej liczbie masowej (A). Mają te same właściwości chemiczne, ale różne właściwości jądrowe (np. stabilność, promieniotwórczość).

Przykłady:

- ^1H , ^2H (deuter), ^3H (tryt) – izotopy wodoru
- ^{12}C , ^{13}C , ^{14}C – izotopy węgla

346

Fizyka jądrowa

Izobary

Izobary to jądra o tej samej liczbie masowej A , ale różnej liczbie protonów Z . Czyli mają różny pierwiastek, ale taką samą sumę protonów i neutronów.

Przykład:

$^{14}_6\text{C}$ i $^{14}_7\text{N}$ – oba mają $A = 14$, ale różne Z .

Izotony

Izotony to **jądra o tej samej liczbie neutronów N** , ale o różnej liczbie protonów Z .

Przykład:

$^{14}_6\text{C}$ ($N = 8$) i $^{15}_7\text{N}$ ($N = 8$) – izotony, bo oba mają 8 neutronów.

347

Fizyka jądrowa

Nuklid

- To ogólna nazwa na jądro atomowe o określonej liczbie Z i A. Każdy izotop, izobar lub izoton jest konkretnym nuklidem.

Przykład:

$^{12}_6\text{C}$ i $^{14}_6\text{C}$ to różne nuklidy węgla.

Stabilność jądra

- zależy od stosunku liczby neutronów do protonów (N/Z),
- energii wiązania jądra (energia potrzebna do rozdzielenia go na pojedyncze nukleony).
- Jądra zbyt „bogate” w neutrony lub protony stają się niestabilne i ulegają rozpadowi promieniotwórczemu.

348

Fizyka jądrowa

Defekt masy

- Suma mas protonów i neutronów w jądrze jest większa niż masa rzeczywistego jądra. Różnica ta – defekt masy – odpowiada energii wiązania zgodnie ze wzorem Einsteina:
- $E = \Delta m \cdot c^2$

Jednostka masy atomowej (u)

- $1 \text{ u} = 1/12 \text{ masy atomu węgla } ^{12}\text{C} \approx 1,6605 \times 10^{-27} \text{ kg}$

349

Fizyka jądrowa

Energia wiązania jądra

Energia potrzebna do rozdzielenia jądra na swobodne nukleony.

$$E_w = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_j]c^2$$

Gdzie m_p - masa protonu, m_n - masa neutronu, m_j - masa jądra.

Energia wiązania na nukleon $\frac{E_w}{A}$:

- rośnie do maksimum dla żelaza (Fe, A=56),
- Dla jąder cięższych od żelaza energia ta maleje.

Wynika z tego, że zarówno reakcje syntezy (łączenie lekkich jąder), jak i rozszczepienia (dzielenie ciężkich) mogą uwalniać energię.

350

Prawo zaniku promieniotwórczego

Promieniotwórczość to samorzutny rozpad jąder atomowych — niektóre jądra są niestabilne i po pewnym (losowym) czasie ulegają przemianie w inne jądra, emitując przy tym promieniowanie (α , β , γ).

Każde jądro rozpada się z pewnym prawdopodobieństwem, niezależnym od tego, jak długo już istnieje — to kluczowe!

Dlatego zanik promieniotwórczy ma charakter statystyczny, a opisuje go prawo wykładnicze.

351

Prawo zaniku promieniotwórczego

Zmiana liczby jąder atomowych czasie dt jest proporcjonalna do liczby jąder nierozpadniętych:

$$dN = -\lambda N(t)dt$$

$N(t)$ – liczba jąder, które jeszcze się nie rozpadły,

λ – stała rozpadu (prawdopodobieństwo rozpadu jednego jądra w jednostce czasu).

Znak „-” oznacza, że liczba jąder maleje.

352

Prawo zaniku promieniotwórczego

Całkując równanie:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

Otrzymujemy:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

gdzie:

N_0 – liczba jąder w chwili początkowej $t=0$,

$N(t)$ – liczba jąder pozostałych po czasie t ,

λ – stała rozpadu (jednostka [1/s]).

353

Prawo zaniku promieniotwórczego

Okres połowicznego zaniku ($T_{1/2}$) to czas, po którym liczba jąder zmniejsza się o połowę:

$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2}$$

Podstawiając do wzoru $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$:

$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2}$$
$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}$$

354

Prawo zaniku promieniotwórczego

Średni czas życia jednego jądra:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

Jest to średni czas, po którym dane jądro ulegnie rozpadowi.
Związek między τ - $T_{1/2}$:

$$T_{1/2} = \tau \ln 2$$

Aktywność promieniotwórcza - to liczba rozpadów w jednostce czasu

$$A(t) = -\frac{dN}{dt} = \lambda N(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

Jednostki aktywności:

- $1Bq(Bekerel) = 1rozpad/sekunda$,
- $1Ci(Curie) = 3,7 \times 10^{10} Bq$

355

Reakcje jądrowe

Reakcja jądrowa to każdy proces, w którym jądro atomowe ulega przemianie — zmienia swój skład, liczbę protonów lub neutronów, albo stan energetyczny.

Zachodzi przy:

- rozpadach promieniotwórczych (samorzutnych),
- lub zderzeniach jąder / cząstek (reakcje wywołane).

Zachowane są:

- liczba nukleonów (A),
- ładunek elektryczny (Z),
- energia i pęd (łącznie z energią promieniowania).

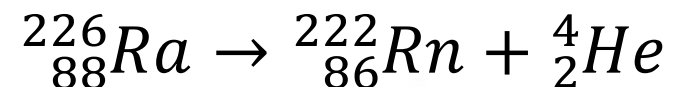
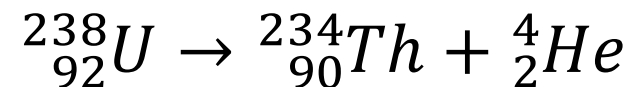
356

Reakcje jądrowe

Rozpad alfa (α) - Emisja cząstek **alfa** w postaci jąder atomów helu ${}^4_2\text{He}$

- Występuje głównie w **ciężkich jądrach** ($Z > 82$, np. U, Th, Ra).
- Po rozpadzie liczba atomowa maleje o 2, a masowa o 4.
- Energia cząstki α : kilka MeV.
- Zasięg w powietrzu: kilka cm (łatwo zatrzymywana).
- Wysoka jonizacja – bardzo niebezpieczna przy wchłonięciu do organizmu.

Przykładowa reakcja:

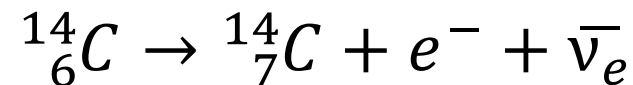
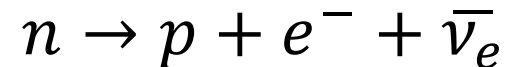


357

Reakcje jądrowe

Rozpad beta (β) - Rozpad beta polega na przemianie neutronu w proton lub odwrotnie, wewnątrz jądra. Towarzyszy mu emisja elektronu lub pozytonu i neutrino.

Rozpad β^- (beta minus) - Zachodzi, gdy w jądrze jest za dużo neutronów. Neutron zamienia się w proton, emitując elektron i antyneutrino.



Skutek:

- liczba masowa A nie zmienia się,
- liczba atomowa Z wzrasta o

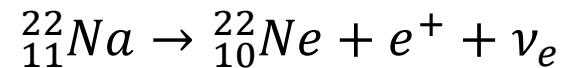
358

Reakcje jądrowe

Rozpad β^+ (beta plus) - Zachodzi, gdy w jądrze jest za dużo protonów.

Proton przekształca się w neutron, emitując pozyton i neutrino:

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$$



Skutek:

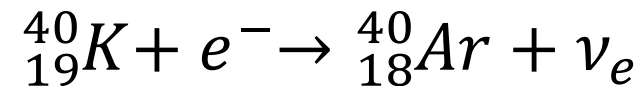
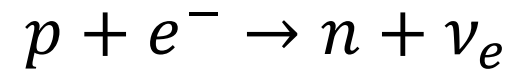
- liczba masowa A nie zmienia się,
- liczba atomowa Z maleje o 1.

Cechy promieniowania β :

- Zasięg w powietrzu: kilkadziesiąt cm.
- Penetracja większa niż α , ale mniejsza niż γ .

Reakcje jądrowe

Wychwyt elektronu (EC, *electron capture*) - Alternatywnie do rozpadu β^+ :
Jądro wychwytuje elektron z powłoki K, co powoduje:



Skutek:

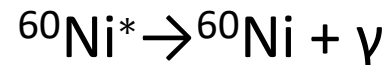
- liczba masowa A nie zmienia się,
- liczba atomowa Z maleje o 1.

360

Reakcje jądrowe

Promieniowanie gamma (γ) - Nie jest cząstką materialną, tylko promieniowaniem elektromagnetycznym bardzo wysokiej energii (fotony γ).

- Pojawia się, gdy jądro po rozpadzie α lub β znajduje się w stanie wzbudzonym.
- Emisja γ pozwala jądro przejść do stanu podstawowego bez zmiany A i Z.



Cechy promieniowania γ :

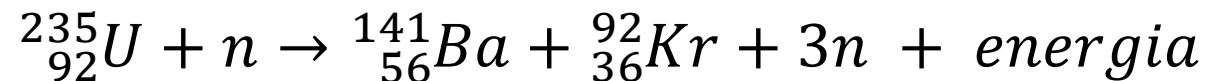
- Brak ładunku i masy spoczynkowej.
- Duża przenikliwość (przechodzi przez kilkadziesiąt cm ołowiu).
- Słabo jonizujące, ale bardzo niebezpieczne przy dużych dawkach.

361

Reakcje jądrowe

Rozszczepienie jąder atomowych - to reakcja jądrowa, w której ciężkie jądro (np. uranu lub plutonu) dzieli się na dwa (czasem trzy) lżejsze jądra oraz kilka neutronów, a przy tym wydziela się ogromna ilość energii. Zjawisko to zachodzi, gdy jądro zostanie wzbudzone – najczęściej przez pochłonięcie neutronu.

Najczęściej omawiany przykład to reakcja z neutronem termicznym (wolnym):



Jądro uranu-235 pochłania neutron, tworząc nietrwałe jądro ${}_{92}^{236}\text{U}^*$, które natychmiast rozpada się na dwa fragmenty o zbliżonych masach (bar i krypton), oraz uwalnia 2–3 neutrony i ok. 200 MeV energii.

362

Reakcje jądrowe

Bilans energii

- W czasie rozszczepienia energia wiązania na nukleon w produktach jest większa niż w jądrze pierwotnym,
- różnica tych energii uwalnia się jako energia kinetyczna fragmentów i neutronów ≈ 200 MeV na jedno rozszczepienie, co odpowiada ok. $8 \cdot 10^{13}$ J na 1 kg U-235 (czyli energia większa miliony razy niż w reakcjach chemicznych).
- Emitowane neutrony mogą powodować kolejne rozszczepienia innych jąder U-235:
- 1 neutron $\rightarrow$ 2–3 nowe neutrony $\rightarrow$ 2–3 kolejne rozszczepienia $\rightarrow$...
- Jeśli liczba neutronów wywołujących dalsze rozszczepienia jest równa 1, proces zachodzi w sposób ustalony (reaktor jądrowy). Jeśli liczba ta przekracza 1 — proces staje się lawinowy (eksplozja jądrowa).

Warunki zajścia reakcji łańcuchowej

- Aby reakcja łańcuchowa była samopodtrzymująca się, muszą być spełnione warunki:
- odpowiednia masa krytyczna materiału rozszczepialnego,
- moderator – spowalnia neutrony (np. woda, grafit),
- osłony i kontrola – pręty pochłaniające neutrony (kad, bor).

363

Reakcje jądrowe

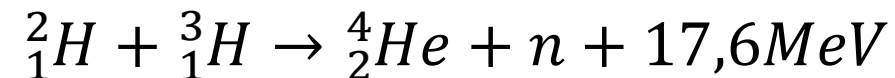
Reakcja termojądrowa to proces, w którym dwa lekkie jądra atomowe łączą się (ulegają fuzji), tworząc jądro cięższe oraz wydzielając ogromną ilość energii.

Zachodzi tylko wtedy, gdy jądra zbliżą się bardzo blisko siebie — pokonując odpychanie elektrostatyczne (tzw. barierę kulombowską).

Aby to było możliwe, potrzebna jest bardzo wysoka temperatura (rzędu milionów kelwinów), stąd nazwa termojądrowa.

Przykład podstawowej reakcji termojądrowej (reakcja deuter–tryt)

Najłatwiejsza do zrealizowania (i najczęściej omawiana) reakcja fuzji:



364

Nadprzewodnictwo – fizyka ciała stałego

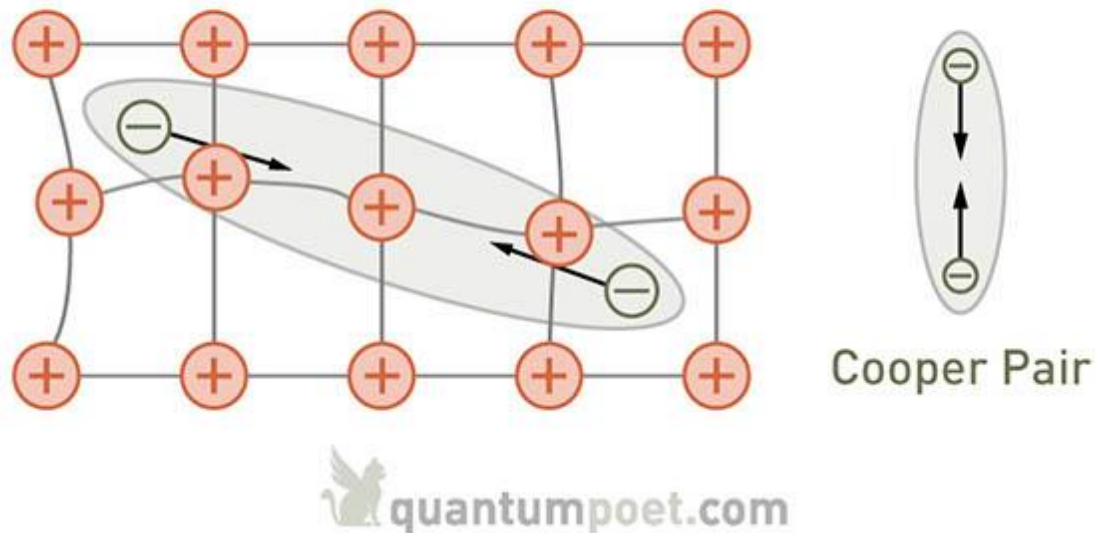
Nadprzewodnictwo to zjawisko całkowitego zaniku oporu elektrycznego oraz wypierania pola magnetycznego (efekt Meissnera) w niektórych materiałach po ich ochłodzeniu poniżej pewnej temperatury krytycznej T_c .

- W niskich temperaturach elektrony w przewodniku mogą tworzyć tzw. pary Coopera — dwa elektrony o przeciwnych spinach i pędach, które są słabo związane dzięki oddziaływaniu z drganiami sieci (fononami).
- Te pary zachowują się jak bosony, dzięki czemu mogą zajmować ten sam stan kwantowy i tworzyć makroskopowy stan kwantowy opisany jedną funkcją falową.

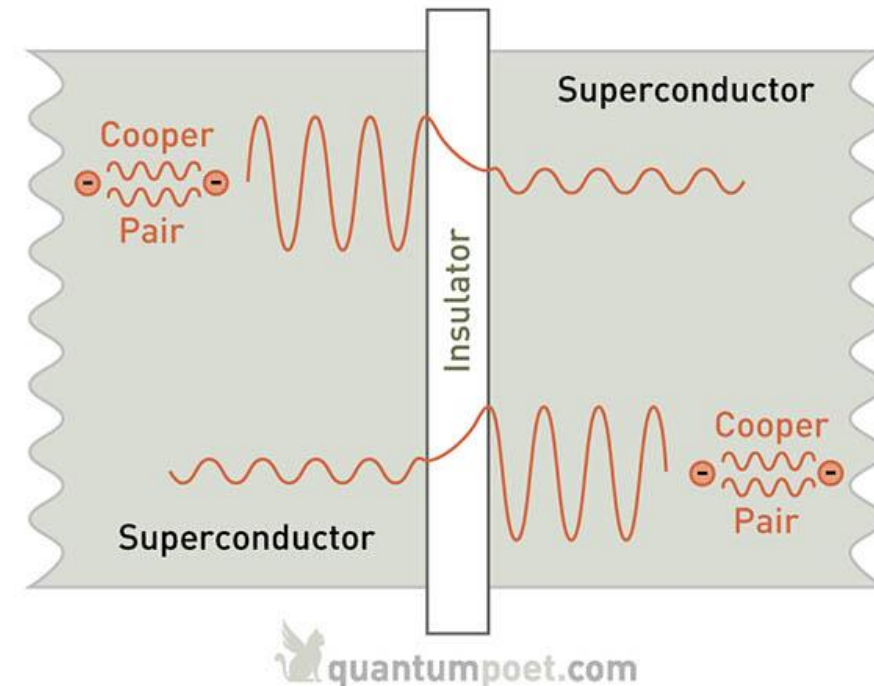
365

Nadprzewodnictwo – fizyka ciała stałego

How Electrons Form Cooper Pairs



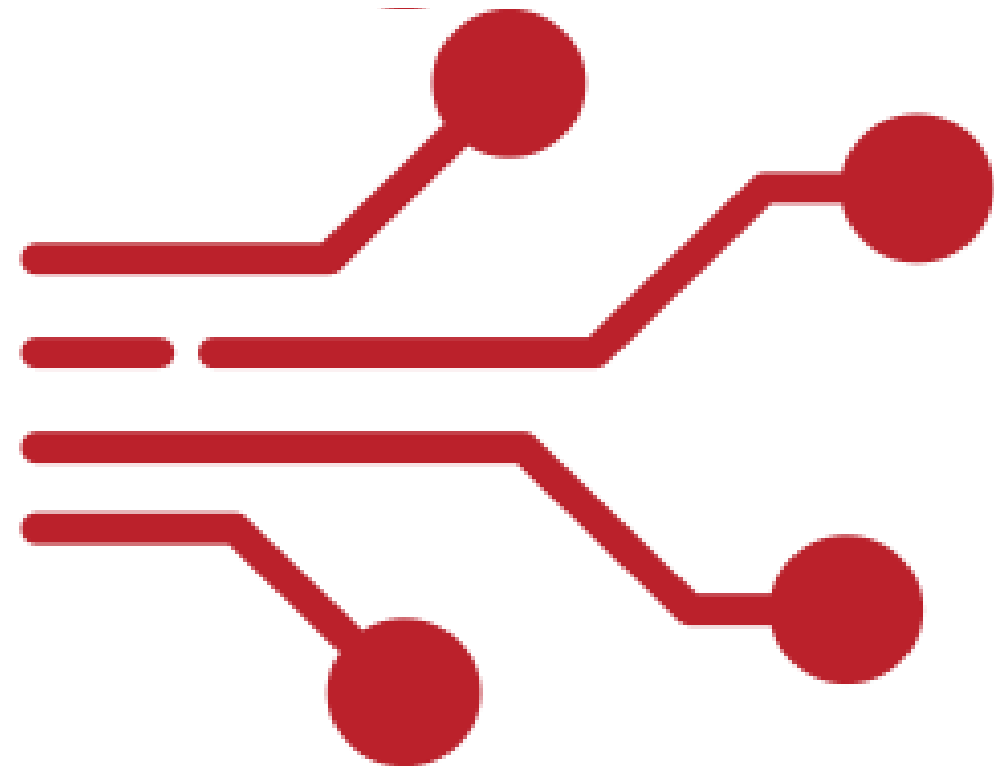
The Josephson Junction



<https://quantumpoet.com/superconducting-quantum-computing/>

366

Elementy mechaniki kwantowej



367

Postulaty mechaniki kwantowej

1. Każdy układ fizyczny jest opisany przez funkcję falową $\Psi(r, t)$, która zawiera pełną informację o stanie układu.

Funkcja ta może być zespolona i nie ma bezpośredniego sensu fizycznego — dopiero jej moduł podniesiony do kwadratu:

$$|\Psi(r, t)|^2$$

określa gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w punkcie r w chwili t .

368

Postulaty mechaniki kwantowej

2. Zasada superpozycji stanów

Jeśli $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$ są możliwymi stanami układu, to dowolna ich kombinacja liniowa:

$$\Psi = c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2 + \dots + c_n \Psi_n$$

Opisuje całkowity stan układu, gdzie c_n - współczynniki w ogólności zespolone. Kwadraty modułów współczynników określają prawdopodobieństwa znalezienia układu w poszczególnych stanach:

$|c_n|^2$ - prawdopodobieństwo znalezienia układu w stanie Ψ_n ,

Gdzie suma tych prawdopodobieństw musi być równa 1

$$\sum_n |c_n|^2 = 1$$

369

Postulaty mechaniki kwantowej

3. Wielkości fizyczne jako operatory

Każdej mierzalnej wielkości fizycznej (np. pęd, energia) odpowiada operator kwantowy działający na funkcję falową.

Operator pędu:

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

Operator energii kinetycznej

$$\hat{E}_k = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

370

Postulaty mechaniki kwantowej

4. Równanie Schrödingera (postulat dynamiki)

Zmiana stanu układu w czasie jest opisana przez równanie Schrödingera:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$$

gdzie $\hat{H}$ to operator Hamiltona, czyli całkowitej energii (kinetycznej + potencjalnej).

Dla cząstki w jednowymiarowym polu potencjału $V(x)$:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

371

Postulaty mechaniki kwantowej

5. Postulat o wartościach mierzonych (wartościach oczekiwanych)

Każdej mierzalnej wielkości fizycznej A odpowiada operator hermitowski $\hat{A}$.

Jeżeli układ znajduje się w stanie opisanym przez funkcję falową Ψ , to wartość średnia pomiarów tej wielkości dana jest przez:

$$\langle A \rangle = \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \hat{A} \Psi dr$$

372

Postulaty mechaniki kwantowej

4. Równanie Schrödingera (postulat dynamiki)

Zmiana stanu układu w czasie jest opisana przez równanie Schrödingera:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$$

gdzie $\hat{H}$ to operator Hamiltona, czyli całkowitej energii (kinetycznej + potencjalnej).

Dla cząstki w jednowymiarowym polu potencjału $V(x)$:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

373

Funkcja falowa

Funkcja falowa sama w sobie nie jest bezpośrednio mierzalna.
Jej moduł kwadratowy ma interpretację probabilistyczną:

$$|\Psi(r, t)|^2$$

jest gęstością prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w punkcie r w chwili t . Zatem Ψ zawiera pełną informację o prawdopodobieństwie wszystkich możliwych wyników pomiaru położenia, pędu, energii itp.

Warunki jakie musi spełniać funkcja falowa:

1. Normalizacja - całkowite prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w całej przestrzeni musi wynosić 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(r, t)|^2 d^3r = 1$$

374

Funkcja falowa

2. Ciągłość i gładkość - Funkcja falowa oraz jej pierwsze pochodne (zwykle) muszą być ciągłe, ponieważ w równaniu Schrödingera występują pochodne drugiego rzędu. Wyjątki mogą się pojawić przy nieciągłościach potencjału (np. przy barierze potencjału).

3. Jednoznaczność - W każdym punkcie przestrzeni i czasie funkcja Ψ musi mieć jedną określoną wartość — nie może być wielowartościowa.

4. Zanikanie w nieskończoności - Aby funkcja była normalizowalna, powinna dążyć do zera, gdy $r \rightarrow \infty$:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi(r, t) = 0$$

375

Funkcja falowa

5. Ortonormalność stanów - Dla różnych stanów własnych (np. o różnych energiach) funkcje falowe są ortogonalne (w przestrzeni wektorowej wzajemnie prostopadłe):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_m^* \Psi_n d^3r = 0$$

dla $m \neq n$.

376

Nieskończona studnia potencjału

Rozpatrzmy cząstkę, która może się poruszać tylko i wyłącznie w obszarze pomiędzy dwiema nieskończonymi ścianami potencjału jak na rysunku.

Zapiszmy równanie Schrodingera dla takiej sytuacji

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x) \quad 0 < x < a$$

Zapiszmy warunki brzegowe dla funkcji falowej $\psi(0) = 0, \psi(a) = 0$ bo $V(0) = V(a) = \infty$.

Przepiszmy równanie Schrodingera w postaci

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0 \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

377

Nieskończona studnia potencjału

Rozwiązaniem ogólnym jest funkcja

$$\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$$

Z warunków brzegowych $\psi(0) = \sin(k \cdot 0) = 0$ wynika $B = 0$, a z $\psi(a) = 0$ mamy $\sin(ka) = 0$

Stąd $ka = n\pi$, dla $n = 1, 2, 3, \dots$

- Czyli

$$k_n = \frac{n\pi}{a}$$

Możemy teraz wyznaczyć wartości energii dla kolejnych stanów układu

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}$$

378

Nieskończona studnia potencjału

Należy znormalizować funkcje własne przyjmując

$$\int_0^a |\psi(x)|^2 dx = 1$$

Funkcje falowe (funkcje własne) mają postać:

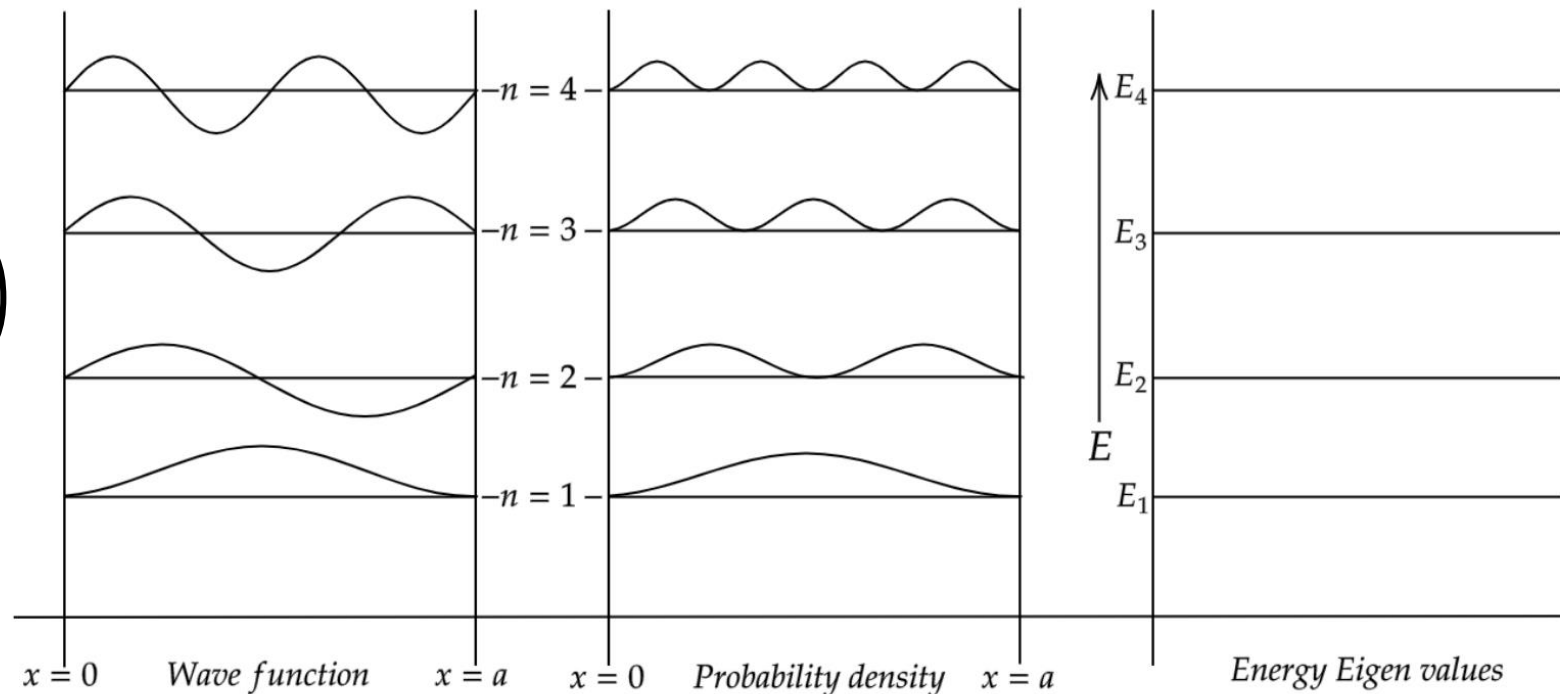
$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

379

Nieskończona studnia potencjału

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}$$



380

J C, Sagar. (2021). Basic Quantum Mechanics. DOI:10.13140/RG.2.2.36496.94726/1.

Kwantowy oscylator harmoniczny

Stacjonarne równanie Schrödingera dla kwantowego oscylatora harmonicznego ma postać

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \psi(x) = E\psi(x)$$

Należy zamienić zmienny tek, by nasze równanie było bezwymiarowe

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \quad \psi(x) = \phi(\xi)$$

Równanie przyjmuje postać

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} + (2\epsilon - \xi^2)\phi(\xi) = 0 \quad \epsilon = \frac{E}{\hbar\omega}$$

381

Kwantowy oscylator harmoniczny

Szukamy ϵ i ϕ takich by spełniony był warunek normalizacji funkcji falowej.

Rozwiązaniem dla oscylatora są funkcje falowe konstruowane z wielomianów Hermita

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right) \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$$

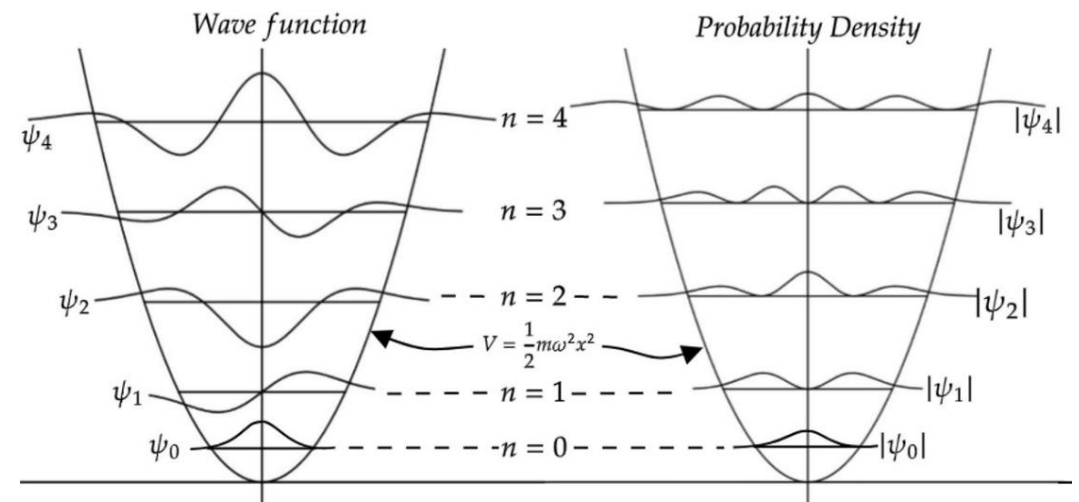
$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Te funkcje są ortonormalne, to znaczy ortogonalne dla $m \neq n$ i znormalizowane

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^* \psi_n dx = \delta_{mn}$$

Gdzie δ_{mn} - to funkcja delta Diraca równa 0 dla $m \neq n$ i równa 1 dla $m = n$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00



J C, Sagar. (2021). Basic Quantum Mechanics.
DOI:10.13140/RG.2.2.36496.94726/1.

382

Zasada nieoznaczoności Heisenberga

Zasada nieoznaczoności Heisenberga to jedna z podstawowych zasad mechaniki kwantowej. Opisuje ona fundamentalne ograniczenie dokładności, z jaką można jednocześnie znać pewne pary wielkości fizycznych cząstki.

Nie można jednocześnie zmierzyć dokładnego położenia x i dokładnego pędu p cząstki. Im dokładniej znamy jedno z nich, tym mniej dokładnie możemy znać drugie.

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Zasada nieoznaczoności Heisenberga dotyczy również par energii i czasu oraz składowych momentu pędu

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad \Delta L_x \cdot \Delta L_y \geq \frac{\hbar}{2}$$

Zasada nieoznaczoności Heisenberga

Konsekwencje zasady nieoznaczoności

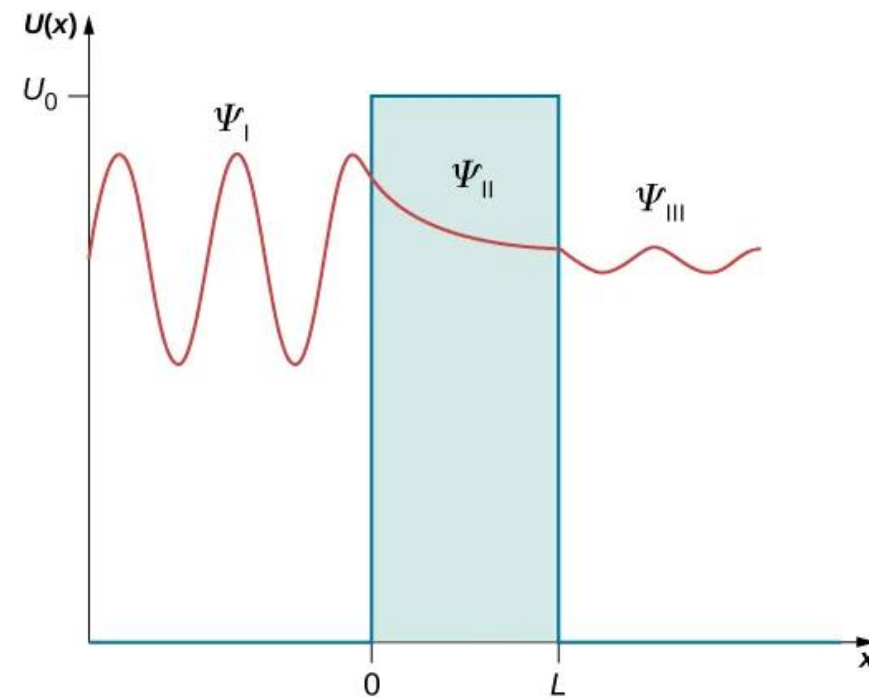
- **Brak klasycznych trajektorii** w mikroświecie – cząstka nie ma jednocześnie dokładnie określonego miejsca i prędkości.
- **Ograniczenie w opisie mikroskopowym** – nie można przewidzieć przyszłości cząstki deterministycznie, tylko prawdopodobnie.
- **Energia punktu zerowego** – nawet w temperaturze 0 K cząstka nie może być całkowicie nieruchoma (bo wtedy $\Delta p = 0 \Rightarrow \Delta x \rightarrow \infty$).

384

Zjawisko tunelowania przez barierę potencjału

Tunelowanie to zjawisko, w którym cząstka kwantowa ma niezerowe prawdopodobieństwo przejścia przez barierę potencjału, nawet jeśli jej energia E jest mniejsza od wysokości bariery U_0 .

- Klasycznie: cząstka nie może pokonać bariery, jeśli $E < U_0$.
- Kwantowo: dzięki zasadzie nieoznaczoności i opisowi falowemu cząstki, istnieje pewne prawdopodobieństwo „przejścia” przez barierę.



Źródło:

<https://openstax.org/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-3/pages/7-6-tunelowanie-cząstek-przez-bariery-potencjału>

385

Zjawisko tunelowania przez barierę potencjału

Dla trzech zdefiniowanych obszarów potencjału rozwiązujemy równanie Schrödingera postaci

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - E)\psi(x)$$

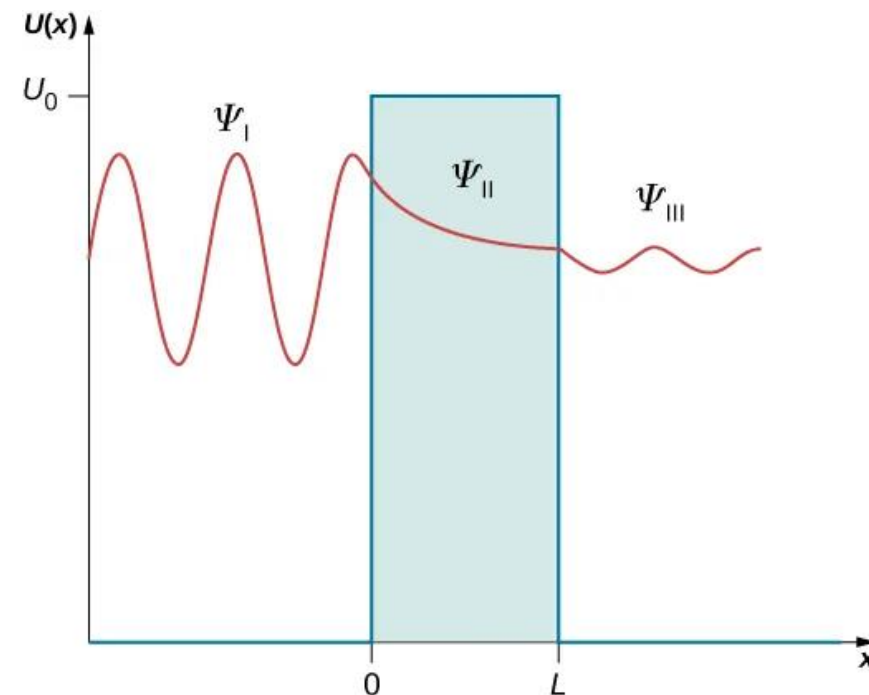
Rozwiązanie ma postać fal wykładniczych w obszarze bariery:

$$\psi(x) = Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x}$$

Poza barierą ($E > U(x)$) mamy falę biegnącą:

$$\psi(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00



Źródło:

<https://openstax.org/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-3/pages/7-6-tunelowanie-cząstek-przez-bariery-potencjału>

386



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

386

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Zjawisko tunelowania przez barierę potencjału

Prawdopodobieństwo tunelowania

Prawdopodobieństwo przejścia cząstki przez barierę (w przybliżeniu dla wysokiej i wąskiej bariery):

$$T = \left(1 + \frac{U_0^2 \sinh^2(\kappa L)}{4E(U_0 - E)} \right)^{-1}$$

Gdzie L – szerokość bariery, U_0 - wysokość bariery potencjału,
 E – energia cząstki tunelującej (przed przejściem przez barierę).

387

Spin elektronu

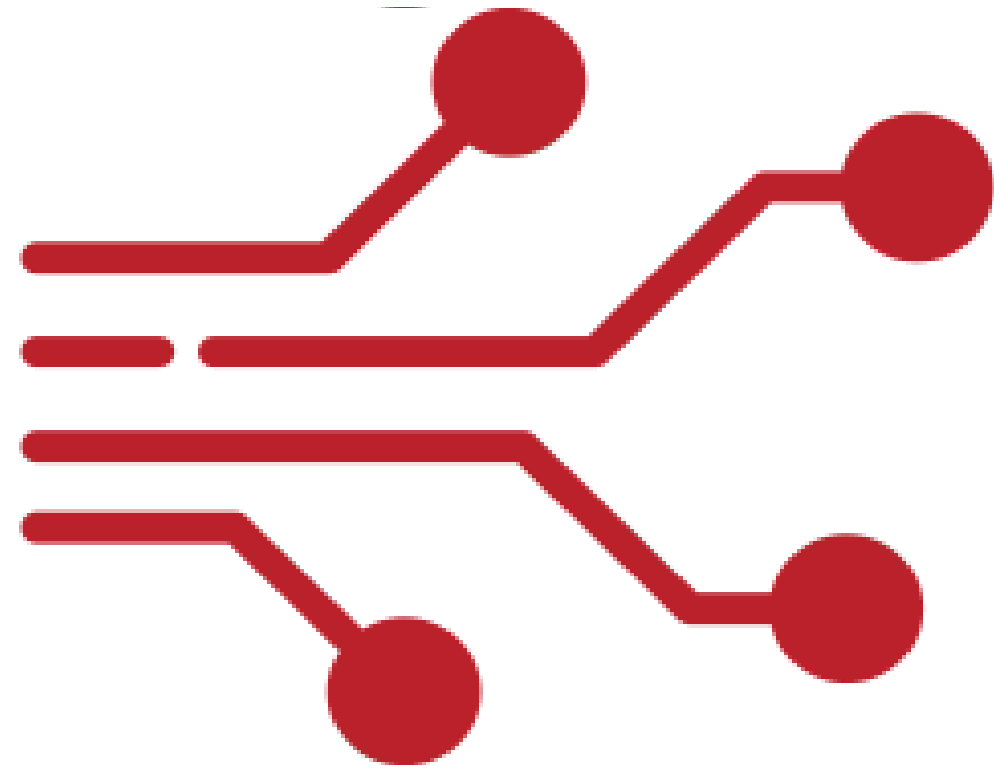
Spin to własny moment pędu cząstki elementarnej, który nie wynika z ruchu orbitalnego w przestrzeni, lecz jest wewnętrzną własnością kwantową.

Dla elektronu:

- Spin = $1/2$ (w jednostkach $\hbar$),
- Oznacza, że elektron jest fermionem),
- Spin jest wewnętrznym momentem pędu: nie odpowiada rzeczywistemu obracaniu się elektronu wokół własnej osi, tylko jest własnością kwantową.

388

Informacja kwantowa i komputery kwantowe



389

Informacja kwantowa

Informacja kwantowa to informacja przechowywana w układach kwantowych, takich jak elektrony, fotony, atomy czy jony. Podstawową jednostką takiej informacji jest kubit (qubit) — kwantowy odpowiednik klasycznego bitu.

Klasyczny bit przyjmuje wartość 0 lub 1.

Qubit:

- Może być w stanie 0, 1, albo w superpozycji obu:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$
$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

- Oznacza to, że qubit zawiera więcej informacji potencjalnej, ale nie można jej w pełni odczytać bez zniszczenia stanu (bo pomiar zmienia układ).

390

Informacja kwantowa

Kluczowe zjawiska w informacji kwantowej

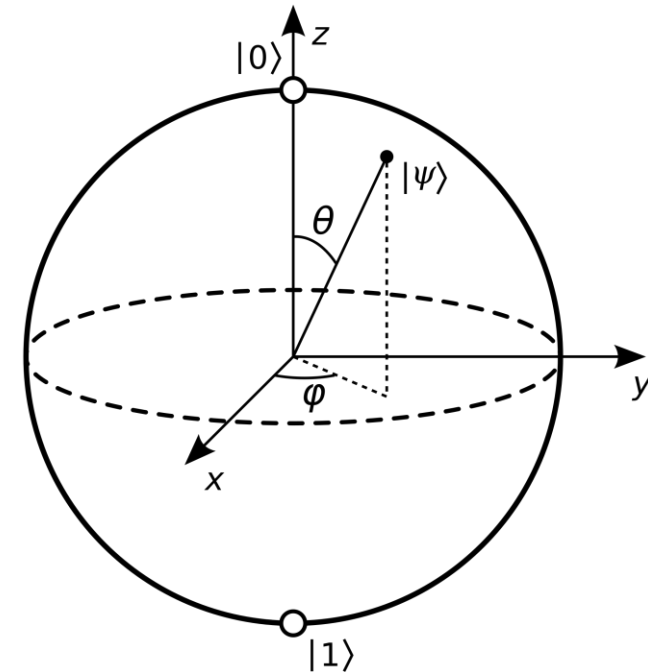
- Superpozycja — układ może być jednocześnie w wielu stanach.
- Splątanie (entanglement) — stany dwóch (lub więcej) cząstek mogą być nierozzerwalnie powiązane, niezależnie od odległości.
- Dekoherecja — utrata koherencji układu (czyli czystości kwantowej informacji) przez oddziaływanie ze środowiskiem.

391

Komputer kwantowa

Zasady działania komputera kwantowego

- **Inicjalizacja** – przygotowanie wszystkich qubitów w stanie początkowym (np. $|0\rangle$).
- **Przekształcenia kwantowe** – wykonywanie operacji na qubitach za pomocą **bramek kwantowych**, które są **macierzami unitarnymi** (zachowują normę stanu).
- **Splątanie qubitów** – tworzenie współzależności między stanami cząstek, dzięki czemu ich zachowanie nie da się opisać niezależnie.
- **Interferencja** – wzmacnianie prawdopodobieństwa poprawnych odpowiedzi i tłumienie błędnych.
- **Pomiar** – odczyt wyniku, który powoduje „kolaps” stanu kwantowego do 0 lub 1.



Źródło:

https://pl.wikipedia.org/wiki/Komputer_kwantowy

392

Komputer kwantowa

Przykładowe bramki kwantowe

Każda **bramka kwantowa** to **macierz unitarna**, która działa na wektor stanu $|\psi\rangle$.

Bramka Pauli-X (σ_x) — „kwantowy NOT”

Zamienia stany $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bramka Pauli-Y (σ_y)

Wprowadza dodatkową fazę i podczas zmiany stanu:

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Bramka Pauli-Z (σ_z)

Zmienia znak stanu $|1\rangle$:

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

393

Komputer kwantowa

Przykładowe bramki kwantowe

Bramka Hadamarda (H)

Tworzy superpozycję – przekształca $|0\rangle$ i $|1\rangle$ w kombinacje liniowe obu:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad H|0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad H|1\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

Bramka CNOT (Controlled-NOT) – dla dwóch qubitów

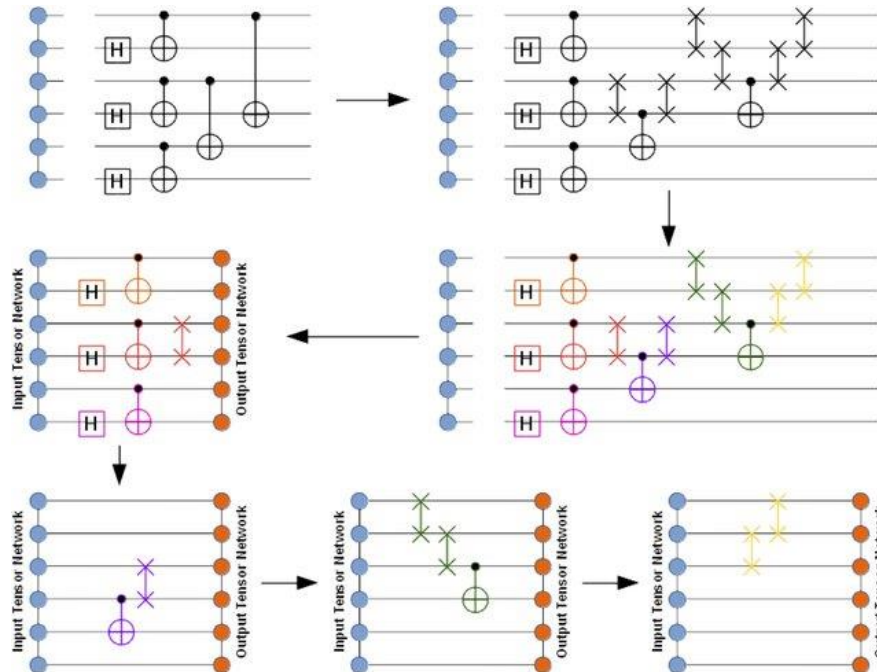
Jeśli pierwszy qubit (kontrolujący) jest w stanie $|1\rangle$, odwraca drugi qubit (docelowy).

$$\text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

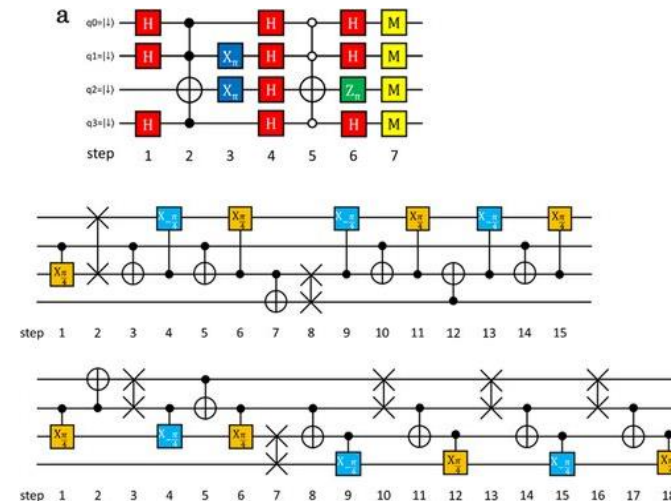
394

Komputer kwantowa

Graficzna reprezentacja algorytmu kwantowego



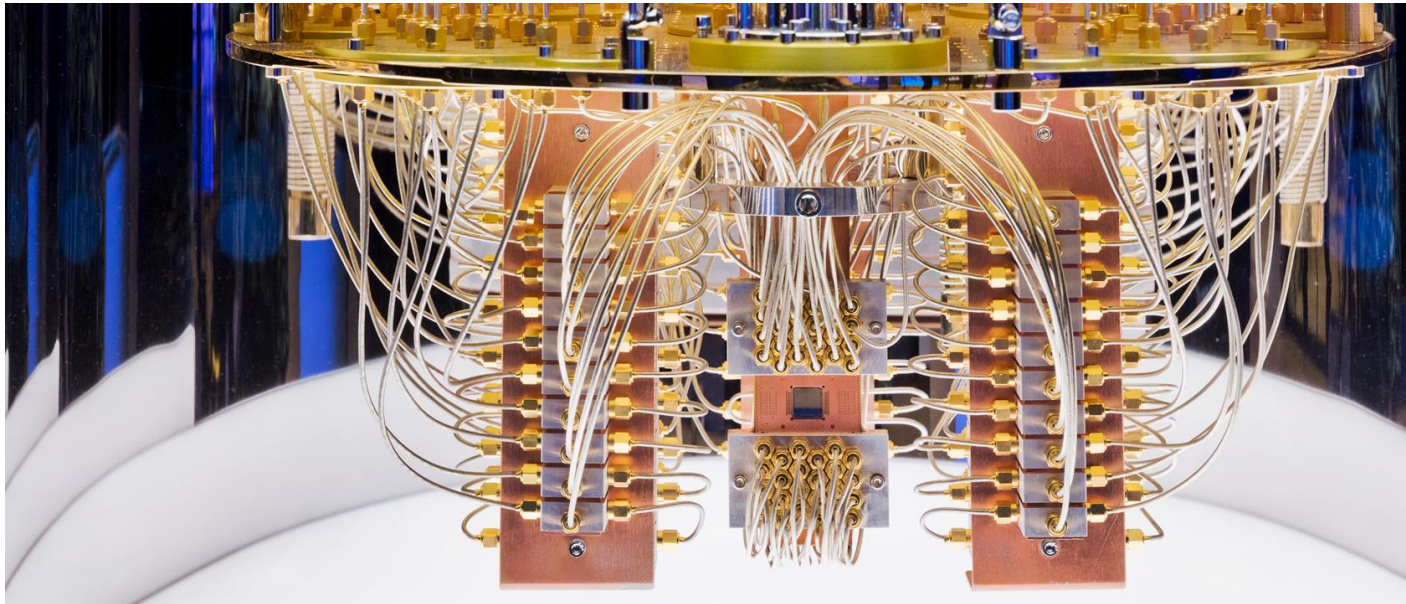
McCaskey, Alexander & Dumitrescu, Eugene & Chen, Mengsu & Lyakh, Dmitry & Humble, Travis. (2018). Validating quantum-classical programming models with tensor network simulations. PLOS ONE. 13. e0206704. 10.1371/journal.pone.0206704.



Tadokoro, Masahiro & Nakajima, Takashi & Kobayashi, Takashi & Takeda, Kenta & Noiri, Akito & Tomari, Kaito & Yoneda, Jun & Tarucha, Seigo & Kodera, Tetsuo. (2021). Designs for a two-dimensional Si quantum dot array with spin qubit addressability. Scientific Reports. 11. 19406. 10.1038/s41598-021-98212-4.

395

Komputer kwantowa



Źródło:

<https://arstechnica.com/science/2024/09/ibm-opens-its-quantum-computing-stack-to-third-parties/>



Źródło:

<https://arstechnica.com/science/2018/03/ars-visits-ibms-quantum-computing-lab-but-finds-no-cats-trapped-in-boxes/>

396

Kryptografia kwantowa

Protokół Ekerta (E91) to kwantowy protokół dystrybucji klucza (QKD — Quantum Key Distribution), który umożliwia dwóm osobom — Alicji i Bobowi — bezpieczne uzgodnienie wspólnego klucza szyfrującego.

Jego bezpieczeństwo nie opiera się na złożoności matematycznej, lecz na prawach fizyki kwantowej, a konkretnie na splątaniu kwantowym i nierównościach Bella.

W klasycznej kryptografii bezpieczeństwo zależy od trudności matematycznych (np. faktoryzacji dużych liczb).

W protokole Ekerta — bezpieczeństwo zapewnia sam charakter natury kwantowej:

- nie można zmierzyć stanu kwantowego bez jego zaburzenia,
- nie można skopiować nieznanego stanu (zakaz klonowania),
- a splątanie kwantowe daje korelacje niemożliwe do wyjaśnienia klasycznie.

Kryptografia kwantowa

Etapy działania protokołu E91

Wygenerowanie splątanych par

- Źródło (może być wspólne lub należące do trzeciej strony) tworzy **pary splątanych fotonów** w stanie Bella, np.:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle)$$

Każda para jest rozdzielana:

- jeden foton trafia do Alicji,
- drugi do Boba.

398

Kryptografia kwantowa

Etapy działania protokołu E91

Pomiar kwantowy

- Alicja i Bob mierzą polaryzację (lub spin) otrzymanych fotonów w losowo wybranych bazach pomiarowych (np. trzech różnych kierunkach dla każdego z nich).
- Ich wyniki są losowe, ale skorelowane dzięki splątaniu.

Weryfikacja bezpieczeństwa — test Bella

- Część pomiarów (np. połowa) Alicja i Bob ujawniają publicznie, aby sprawdzić, czy wyniki spełniają nierówność Bella (np. CHSH inequality).
- Jeśli nierówność Bella jest złamana → oznacza to, że splątanie było nienaruszone, więc nikt nie podsłuchiwał transmisji.
Jeśli nie → prawdopodobnie Ewa (podsłuchująca) ingerowała w stany kwantowe, co zmieniło korelacje.

399

Kryptografia kwantowa

Etapy działania protokołu E91

Utworzenie klucza

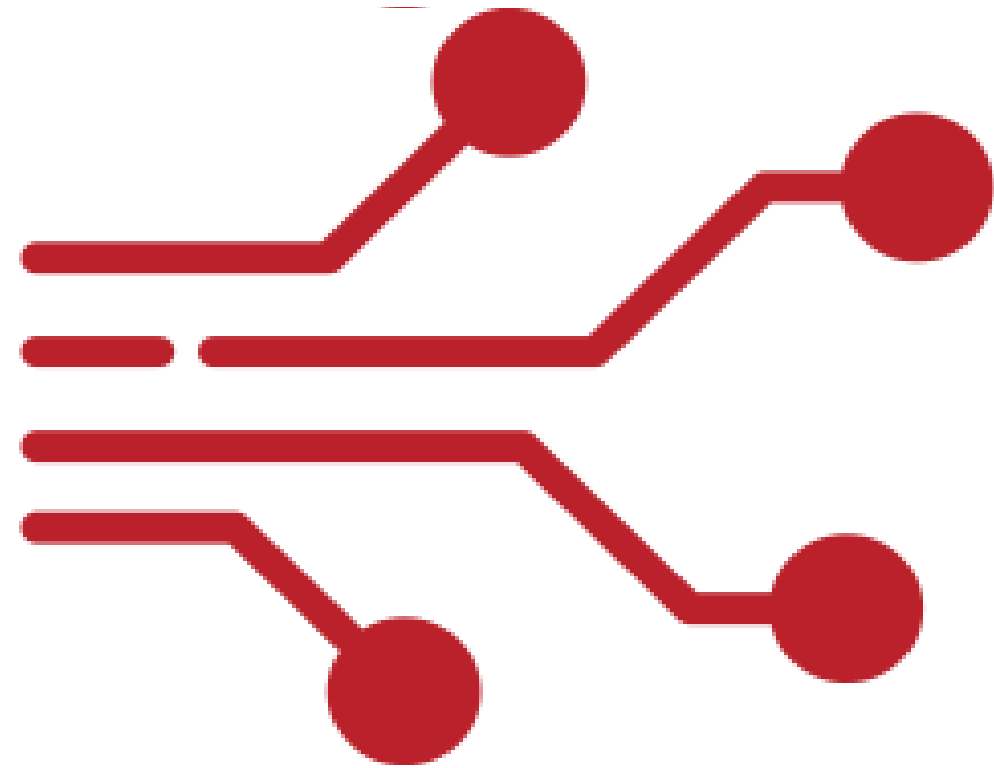
- Pomiarów, które nie zostały ujawnione, Alicja i Bob używają do stworzenia wspólnego klucza binarnego.
Następnie stosują klasyczne procedury korekcji błędów i przycinania informacji, aby usunąć ewentualne błędy i zabezpieczyć klucz.
- W efekcie mają identyczny i tajny klucz kwantowy, którego nikt inny nie zna.

Dlaczego protokół Ekerta jest bezpieczny

- Bezpieczeństwo opiera się na trzech zasadach mechaniki kwantowej:
- Splątanie kwantowe — gwarantuje nierozzerwalne korelacje między pomiarami Alicji i Boba.
- Nierówności Bella — pozwalają wykryć każdą próbę podsłuchu.
- Zakaz klonowania — uniemożliwia skopiowanie stanu kwantowego bez jego zaburzenia.
- Podsłuch (np. przez Ewę) niszczy splątanie, co zmienia korelacje i zostaje wykryte.

400

Rola symulacji komputerowych w fizyce



401

Symulacje komputerowe w fizyce

Symulacje komputerowe to numeryczne modelowanie zjawisk fizycznych przy użyciu komputerów. Pozwalają badać procesy, które są:

- zbyt skomplikowane do rozwiązania analitycznego,
- zbyt niebezpieczne lub kosztowne do przeprowadzenia eksperymentalnie,
- zachodzące w ekstremalnych warunkach (wysokie ciśnienie, temperatura, energia).

402

Symulacje komputerowe w fizyce

1. Badania zjawisk skomplikowanych lub chaotycznych

- Przykład: pogoda, turbulencje w płynach, dynamika plazmy.
- Symulacje pozwalają modelować złożone układy nieliniowe, np. ruch wielu cząstek w czasie.
- Dzięki nim możemy przewidzieć przebieg układu w czasie i analizować wpływ różnych parametrów.

2. Fizyka cząstek i jądra

- Symulacje w akceleratorach cząstek (np. LHC) pomagają przewidzieć trajektorie cząstek i produkty zderzeń.
- Przykład: modelowanie reakcji jądrowych, rozszczepienia, syntezy termojądrowej.
- Pozwala zoptymalizować eksperymenty i przewidzieć wykrywalne sygnały.

403

Symulacje komputerowe w fizyce

3. Fizyka materii skondensowanej i nanostruktur

- Symulacje materiałów stałych, nanostruktur, kryształów, grafenu.
- Pozwalają badać właściwości mechaniczne, elektryczne, magnetyczne i optyczne bez fizycznego wytwarzania próbki.
- Przykłady: Modelowanie przewodnictwa elektrycznego w nanorurkach węglowych. Badanie przejść fazowych w cieczach i ciałach stałych.

4. Fizyka środowiskowa i energetyczna

- Symulacje procesów w reaktorach jądrowych (rozszczerzenie, przepływ neutronów).
- Modelowanie klimatu i wpływu energii na środowisko.
- Optymalizacja układów solarnych, wiatrowych i magazynów energii.

404

Symulacje komputerowe w fizyce

3. Fizyka materii skondensowanej i nanostruktur

- Symulacje materiałów stałych, nanostruktur, kryształów, grafenu.
- Pozwalają badać właściwości mechaniczne, elektryczne, magnetyczne i optyczne bez fizycznego wytwarzania próbki.
- Przykłady: Modelowanie przewodnictwa elektrycznego w nanorurkach węglowych. Badanie przejść fazowych w cieczach i ciałach stałych.

4. Fizyka środowiskowa i energetyczna

- Symulacje procesów w reaktorach jądrowych (rozszczerzenie, przepływ neutronów).
- Modelowanie klimatu i wpływu energii na środowisko.
- Optymalizacja układów solarnych, wiatrowych i magazynów energii.

405

Symulacje komputerowe w fizyce

5. Chemia kwantowa

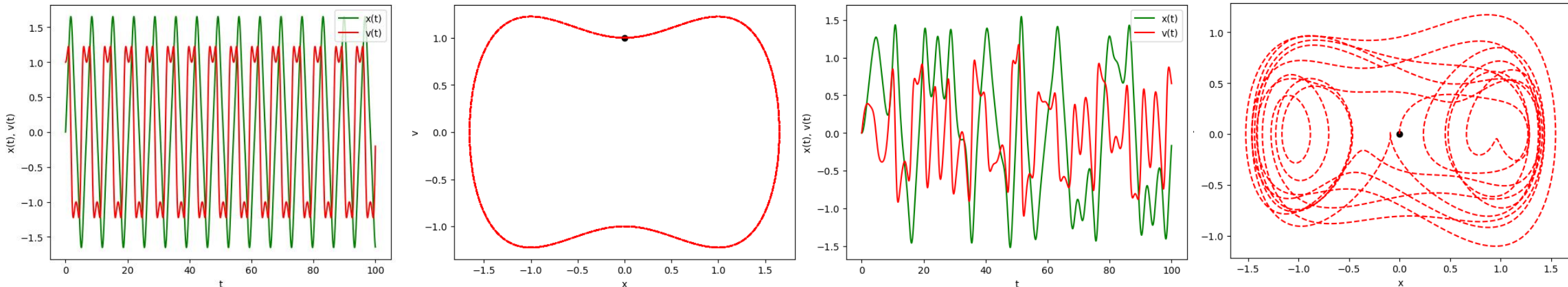
- badać struktury i konformacje cząsteczek,
- przewidywać właściwości fizykochemiczne (energia, polarność, dipol),
- testować reaktywność chemiczną i oddziaływania międzycząsteczkowe bez eksperymentu laboratoryjnego.
- projektowanie leków (drug design),
- badanie enzymów i białek,
- przewidywanie właściwości materiałów i polimerów.
- dynamika molekularna śledzić ruch cząsteczek w czasie,
- badać temperaturę, ciśnienie, gęstość w trakcie procesów fizycznych i reakcji
- obserwować procesy konformacyjne białek, lipidów, polimerów.

406

Symulacje komputerowe w fizyce

Przykład – zastosowanie symulacji do modelowania zachowania chaotycznego oscylatora z tłumieniem i siłą wymuszającą

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t)$$



Literatura

- Orear J., Fizyka, tomy 1–2, Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa 2015.
- Halliday D., Resnick R., Walker J., Podstawy fizyki, t. 1,2,3,4 i 5, PWN, Warszawa (wszystkie roczniki).
- Richard P. Feynman, Leighton Robert B., Matthew Sands, Feynmana wykłady z fizyki, t. 1.1, 1.2, 2.1, 2.2, 3, PWN, Warszawa (wszystkie roczniki).
- D.J. Griffiths, D.F. Schroeter. Wstęp do mechaniki kwantowej. 1. wyd. Wyd. Naukowe PWN, 2021.

408

Literatura

- Jędrzejewski J., Kruczek W., Kujawski A., Zbiór zadań z fizyki, tomy 1–2, Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa (wszystkie roczniki)
- Massalski J., Massalska M., Fizyka dla inżynierów 1, fizyka klasyczna, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1980
- Massalski J., Fizyka dla inżynierów 2, fizyka współczesna, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1971
- Jeżewski M., Fizyka, Wydawnictwo PWN 1970.
- Taylor J.R.: Wstęp do analizy błędu pomiarowego. Warszawa: PWN, 1999.

409

Dziękuję za uwagę