

Całka nieoznaczona

dr Paweł Wlaź

Katedra Matematyki Stosowanej

Plan wykładu

Wstęp

Określenie funkcji pierwotnej

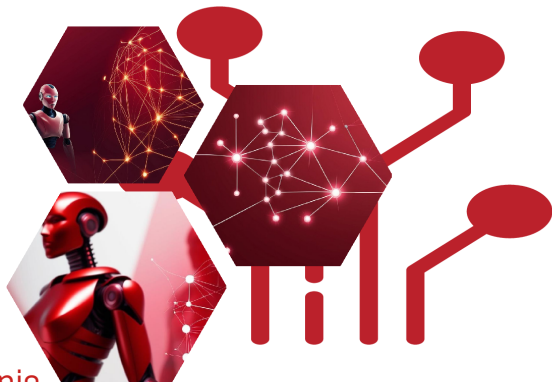
Własności funkcji pierwotnej

Definicja całki nieoznaczonej

Własności całki nieoznaczonej

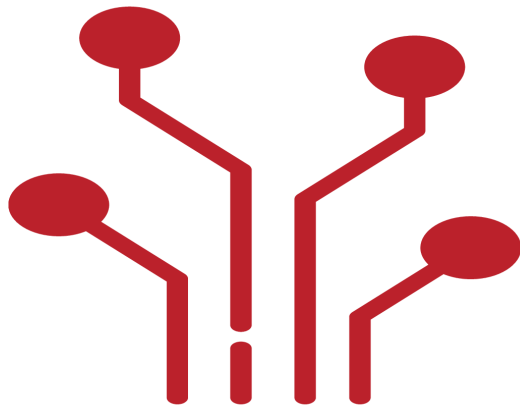
Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie

Twierdzenie o całkowaniu przez części



2 / 388

Wstęp



3 / 388

Wstępne ustalenia

- 30h wykładów, 30h ćwiczeń,
- zaliczenie ćwiczeń – dwa kolokwia,
- zaliczenie wykładu – końcowy sprawdzian.

Cele, tematy zajęć i inne szczegóły – sylabus (udostępniony na stronie WWW WMiT, także w zespole wykładowym Teams)

Materiały pomocnicze, w tym prezentacje o które oparty jest wykład – odpowiedni zespół na Teams.

4 / 388

Literatura podstawowa

- [1] Gewert, Marian, i in. Analiza matematyczna 1 : przykłady i zadania. Oficyna Wydawnicza GiS, 2018.
- [2] Jurlewicz, Teresa, i in. Algebra liniowa 1 : przykłady i zadania. Oficyna Wydawnicza GiS, 2005.
- [3] Kincaid, David, i in. Analiza numeryczna. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2006.
- [4] Krysicki, Włodzimierz, i in. Analiza matematyczna w zadaniach. Cz. 1. Wyd. Naukowe PWN, 2003.
- [5] Krysicki, Włodzimierz, i in. Analiza matematyczna w zadaniach. Cz. 2. Wyd. Naukowe PWN, 2004.

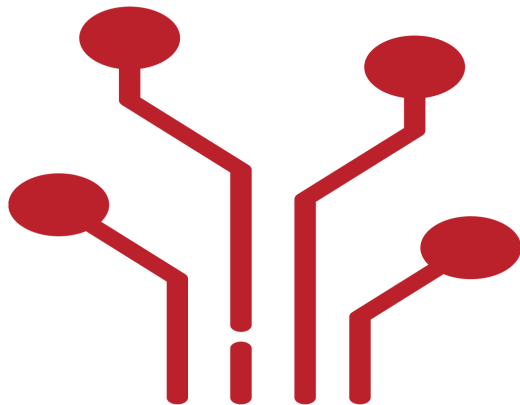
5 / 388

Literatura uzupełniająca

- [6] Gewert, Marian, i in. Analiza matematyczna 1 : definicje, twierdzenia, wzory. Oficyna Wydawnicza GIS, 2023.
- [7] Gewert, Marian, i in. Równania różniczkowe zwyczajne : teoria, przykłady, zadania. Oficyna Wydawnicza GiS, 2016.
- [8] Jurlewicz, Teresa, i in. Algebra liniowa 1 : definicje, twierdzenia, wzory. Oficyna Wydawnicza GiS, 2005.

6 / 388

Określenie funkcji pierwotnej



7 / 388

Funkcja pierwotna

Definicja

Funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I , jeżeli

$$F'(x) = f(x) \quad \text{dla każdego } x \in I.$$

8 / 388

Funkcja pierwotna

Przykład

W przedziale $(0, \infty)$ funkcją pierwotną dla $f(x) = \frac{1}{x}$ jest $F(x) = \ln x$. Dla tej samej funkcji f funkcją pierwotną jest także funkcja $G(x) = C + \ln x$, gdzie C jest dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą (stałą dla konkretnej funkcji G).

9 / 388

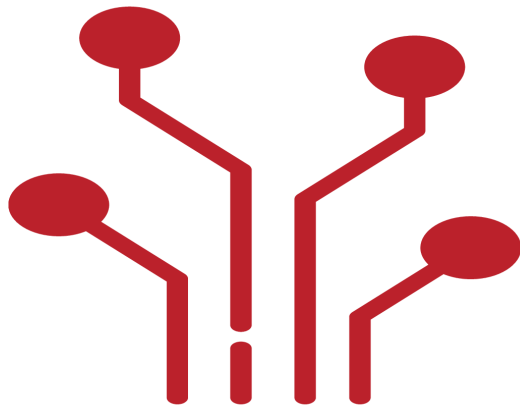
Funkcja pierwotna

Przykład

Skoro $(x^t)' = tx^{t-1}$ w przedziale I w którym obie strony są określone [oczywiście $t \neq 0$], to funkcją pierwotną dla funkcji x^{t-1} musi być $\frac{x^t}{t}$, inaczej mówiąc funkcją pierwotną dla x^p jest $\frac{x^{p+1}}{p+1}$, oczywiście $p \neq -1$ a przedział na którym ta własność ma miejsce zależy od p .

10 / 388

Własności funkcji pierwotnej



11 / 388

Podstawowe twierdzenie o funkcjach pierwotnych

Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I . Wtedy

- $G(x) = F(x) + C$, gdzie $C \in \mathbb{R}$, jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I ;
- każdą funkcję pierwotną funkcji f na I można przedstawić w postaci $F(x) + C$, gdzie $C \in \mathbb{R}$.

12 / 388

Warunek wystarczający istnienia funkcji pierwotnej

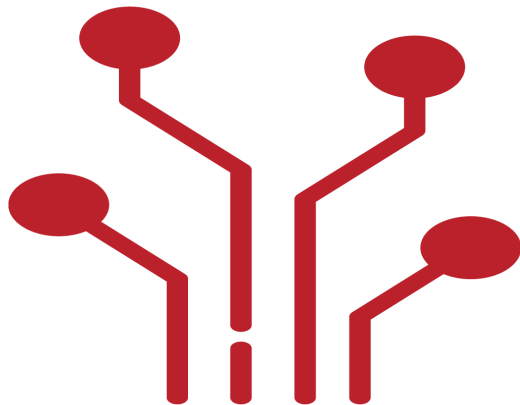
Fakt

Jeżeli funkcja jest ciągła na przedziale I , to ma w nim funkcję pierwotną.

Warunek powyższy jest warunkiem wystarczającym, ale nie jest warunkiem koniecznym. To oznacza, że istnieją funkcje nieciągłe mające funkcje pierwotne, są to jednak przypadki nieistotne na tym etapie rozważań.

13 / 388

Definicja całki nieoznaczonej



14 / 388

Definicja całki nieoznaczonej

Definicja

Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I . Całką nieoznaczoną funkcji f na przedziale I nazywamy zbiór funkcji

$$\{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}.$$

Całkę nieoznaczoną funkcji f oznaczamy symbolem $\int f(x) dx$.

15 / 388

Definicja całki nieoznaczonej

Formalnie więc całka nieoznaczona na przedziale jest zbiorem funkcji pierwotnych, praktyczny zapis wygląda na przykład

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

lub po prostu

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$$

16 / 388

Oznaczenie dx , dt , d [zmienna]

Znaczenie dwuznaku dx będzie jeszcze bardziej intuicyjne, gdy zapoznamy się z pojęciem całki oznaczonej, w tej chwili ważne jest by pamiętać, o kilku zasadach.

17 / 388

Oznaczenie $dx, dt, d[\text{zmienna}]$

- musi wystąpić przy każdej całce nieoznaczonej,
- po literce d występuje zmienna względem której liczymy pochodne, gdy określamy funkcję pierwotną,
- symbol występuje po prawej stronie wyrażenia, może wystąpić także w liczniku, wtedy po prawej stronie licznika,
- przy zapisie traktujemy ten dwuznak jako coś co mnoży funkcję podcałkową [choć znaku mnożenia *nie* stosujemy].

18 / 388

Oznaczenie $dx, dt, d[\text{zmienna}]$

Prawidłowe zapisy:

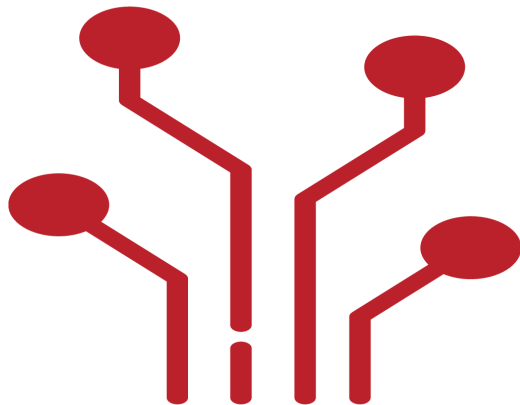
$$\int (x + 3t) dt, \quad \int \frac{(3 + x) dx}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad \int \frac{3 + x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

Zapisy *nie*prawidłowe:

$$\int x + 3t dt, \quad \int \frac{3 + x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

19 / 388

**Własności całki
nieoznaczonej**



20 / 388

Własności całki nieoznaczonej

Pochodna całki nieoznaczonej

Niech funkcja f ma funkcję pierwotną na przedziale I . Wtedy dla każdego $x \in I$

$$\left[\int f(x) dx \right]' = f(x).$$

21 / 388

Własności całki nieoznaczonej

Przykład

Niech $f(x) = x^5$ na dowolnie ustalonym przedziale. Wtedy

$$\int f(x) dx = \frac{x^6}{6} + C.$$

Zatem

$$\left[\int f(x) dx \right]' = \left[\frac{x^6}{6} + C \right]' = x^5 = f(x).$$

22 / 388

Własności całki nieoznaczonej

Całka nieoznaczona pochodnej Niech funkcja f' będzie określona na przedziale I . Wtedy dla każdego $x \in I$

$$\int f'(x) dx = f(x) + C, \text{ gdzie } C \in \mathbb{R}.$$

23 / 388

Własności całki nieoznaczonej

Przykład

Niech $f(x) = \sin x$. Wtedy $f'(x) = \cos x$. Zatem

$$\int f'(x) dx = \int \cos x dx = \sin x + C = f(x) + C.$$

24 / 388

Całki nieoznaczone ważniejszych funkcji elementarnych

- $\int 0 \, dx = C, \quad x \in \mathbb{R};$
- $\int x^p \, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},$ zakres zmienności x zależy od p ;
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$
- $\int e^x \, dx = e^x + C, \quad x \in \mathbb{R};$

25 / 388

Całki nieoznaczone ważniejszych funkcji elementarnych

- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \in \mathbb{R};$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad x \in \mathbb{R};$
- $\int \cos x dx = \sin x + C, \quad x \in \mathbb{R};$

26 / 388

Całki nieoznaczone ważniejszych funkcji elementarnych

- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z};$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C, \quad x \in \mathbb{R};$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x + C, \quad |x| < 1.$

27 / 388

Całki nieoznaczone ważniejszych funkcji elementarnych

Fakt

Łącząc wzór na $\int \frac{1}{x} dx$ ze wzorem na pochodną funkcji złożonej dostajemy, że

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C.$$

28 / 388

Całki nieoznaczone ważniejszych funkcji elementarnych

Przykład

$$\int \frac{x dx}{x^2 + 1} = \int \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C.$$

29 / 388

Całka funkcji $f(ax + b)$

Wprost ze wzoru na pochodną funkcji złożonej mamy następujący fakt

Fakt

Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f . Wtedy

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

30 / 388

Całka funkcji $f(ax + b)$

Przykład

$$\int \sin(4x + 5) dx = -\frac{1}{4} \cos(4x + 5) + C.$$

31 / 388

Twierdzenie o liniowości całki nieoznaczonej

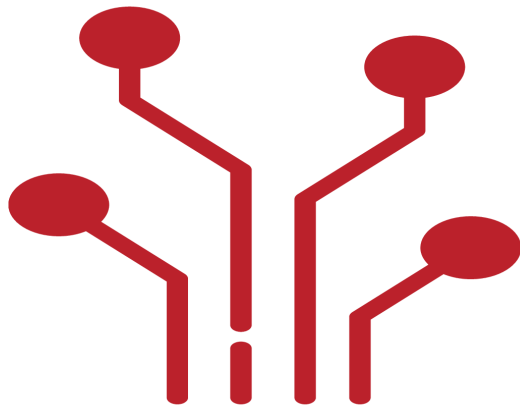
Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g mają funkcje pierwotne, to

- $\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx,$
- $\int (f(x) - g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx - \int g(x) \, dx,$
- $\int (cf(x)) \, dx = c \int f(x) \, dx, \, c \in \mathbb{R}.$

32 / 388

Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie



33 / 388

Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie

Twierdzenie

Jeżeli

- funkcja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale I ,
- funkcja $g: J \rightarrow I$ ma ciągłą pochodną na przedziale J ,

to
$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(t) dt = F(t) + C = F(g(x)) + C,$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f oraz $C \in \mathbb{R}$.

34 / 388

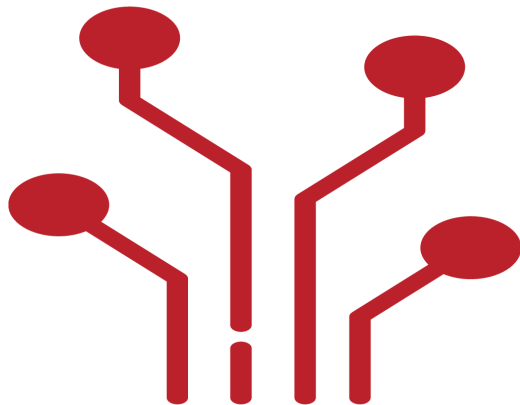
Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie

Twierdzenie to jest „odwróceniem” reguły różniczkowania funkcji złożonej.
Praktyczny zapis:

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{array} \right| = \int t^2 \, dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

35 / 388

Twierdzenie o całkowaniu przez części



36 / 388

Twierdzenie o całkowaniu przez części

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne, to

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

37 / 388

Twierdzenie o całkowaniu przez części

Praktyczny zapis:

$$\int e^x x dx = \left| \begin{array}{l} f(x) = x \\ g'(x) = e^x \end{array} \right| \begin{array}{l} f'(x) = 1 \\ g(x) = e^x \end{array} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

38 / 388

Twierdzenie o całkowaniu przez części

Czasem można to zastosować nawet wtedy, gdy formalnie nie widać iloczynu w funkcji podcałkowej:

$$\int \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} f(x) = \ln x \\ g'(x) = 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} f'(x) = \frac{1}{x} \\ g(x) = x \end{array} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

39 / 388

Dziękuję za uwagę

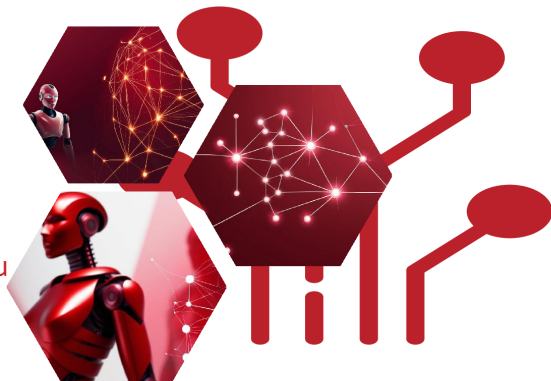
Całka nieoznaczona wybranych typów funkcji

dr Paweł Wlaź

Katedra Matematyki Stosowanej

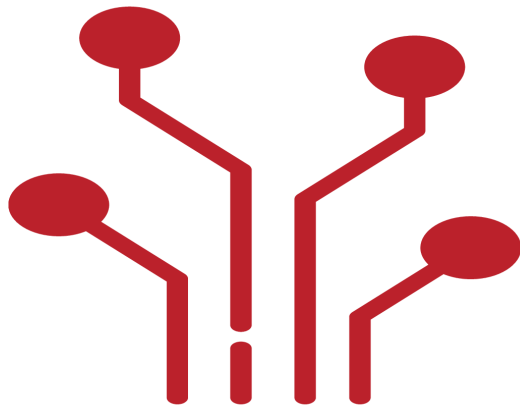
Plan wykładu

Przydatne własności funkcji wymiernych
Całkowanie ułamków prostych pierwszego rodzaju
Całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju.
Algorytm całkowania funkcji wymiernych
Całkowanie funkcji z niewymiernościami
Całkowanie wyrażeń z funkcjami trygonometrycznymi



42 / 388

Przydatne własności funkcji wymiernych



43 / 388

Rodzaje funkcji wymiernych

Funkcję wymierną $w(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ nazywamy **właściwą**, jeżeli stopnie wielomianów $p(x)$ oraz $q(x)$ spełniają warunek $st.p(x) < st.q(x)$.

Jeżeli $st.p(x) \geq st.q(x)$, to funkcję wymierną $w(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ nazywamy **niewłaściwą**.

Uwaga. Każdą funkcję wymierną niewłaściwą można przedstawić w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

44 / 388

Ułamki proste pierwszego i drugiego rodzaju

Funkcję wymierną właściwą postaci $\frac{A}{(x+a)^n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $a, A \in \mathbb{R}$, nazywamy **ułamkiem prostym pierwszego rodzaju**.

Funkcję wymierną właściwą postaci $\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $b, c, B, C \in \mathbb{R}$, przy czym $\Delta < 0$, gdzie Δ jest wyróżnikiem trójmianu $x^2 + bx + c$ nazywamy **ułamkiem prostym drugiego rodzaju**.

45 / 388

Ułamki proste pierwszego i drugiego rodzaju

Przykład

Funkcja $\frac{5}{x - 0.5}$ jest ułamkiem prostym pierwszego rodzaju.

Funkcja $\frac{5x - 3}{x^2 - 3x + 5}$ jest ułamkiem prostym drugiego rodzaju.

Funkcja $\frac{5x - 3}{x^2 - 3x - 4}$ **nie** jest ułamkiem prostym.

46 / 388

Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste

Twierdzenie (o rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste)

Każda funkcja wymierna właściwa rzeczywista daje się w sposób jednoznaczny przedstawić w postaci sumy ułamków prostych. Funkcja wymierna właściwa

$$\frac{p(x)}{a_n(x - x_1)^{k_1} \cdots (x - x_r)^{k_r} (x^2 + b_1x + c_1)^{l_1} \cdots (x^2 + b_sx + c_s)^{l_s}}$$

jest sumą $k_1 + k_2 + \cdots + k_r$ ułamków prostych pierwszego rodzaju oraz $l_1 + l_2 + \cdots + l_s$ ułamków prostych drugiego rodzaju, przy czym

47 / 388

(kontynuacja tw. o rozkładzie funkcji wymiernej...)

Twierdzenie (kontynuacja)

- czynnikowi $(x - x_i)^{k_i}$ odpowiada suma k_i ułamków prostych pierwszego rodzaju postaci:

$$\frac{A_{i1}}{x - x_i} + \frac{A_{i2}}{(x - x_i)^2} + \dots + \frac{A_{ik_i}}{(x - x_i)^{k_i}},$$

gdzie $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ik_i} \in \mathbb{R}$ dla $i \in \{1, 2, \dots, r\}$;

48 / 388

(kontynuacja tw. o rozkładzie funkcji wymiernej...)

Twierdzenie (kontynuacja)

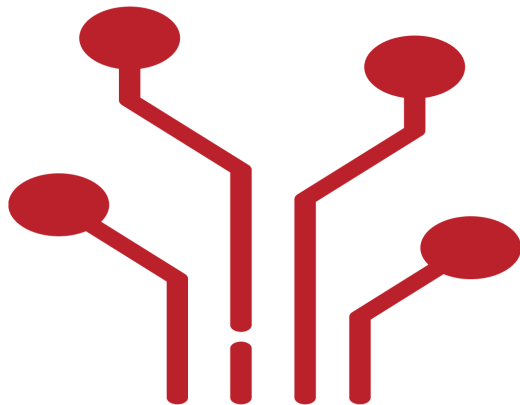
- czynnikowi $(x^2 + b_j x + c_j)^{l_j}$ odpowiada suma l_j ułamków prostych drugiego rodzaju postaci:

$$\frac{B_{j1}x + C_{j1}}{x^2 + b_j x + c_j} + \frac{B_{j2}x + C_{j2}}{(x^2 + b_j x + c_j)^2} + \dots + \frac{B_{jl_j}x + C_{jl_j}}{(x^2 + b_j x + c_j)^{l_j}},$$

gdzie $B_{j1}, B_{j2}, \dots, B_{jl_j}, C_{j1}, C_{j2}, \dots, C_{jl_j} \in \mathbb{R}$ dla $j \in \{1, 2, \dots, s\}$.

49 / 388

Całkowanie ułamków prostych pierwszego rodzaju



50 / 388

Całkowanie ułamków prostych pierwszego rodzaju

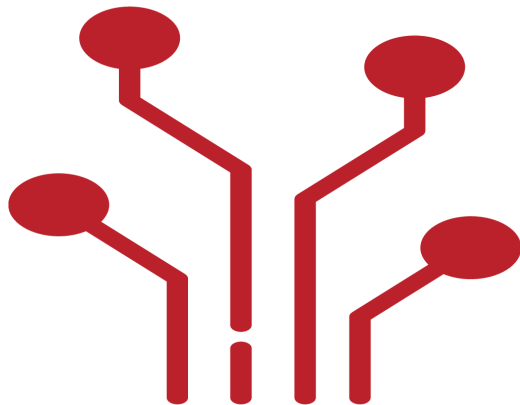
Do obliczania całek z ułamków prostych pierwszego rodzaju stosujemy wzory:

$$\int \frac{A}{x+a} dx = A \ln |x+a| + C,$$

$$\int \frac{A}{(x+a)^n} dx = \frac{-A}{(n-1)(x+a)^{n-1}} + C, \text{ gdzie } n \geq 2.$$

51 / 388

Całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju.



52 / 388

Całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju

Do obliczania całek z ułamków prostych drugiego rodzaju stosujemy wzór:

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^n} dx = \frac{B}{2} \int \frac{2x + b}{(x^2 + bx + c)^n} dx + \left(C - \frac{Bb}{2} \right) \int \frac{dx}{(x^2 + bx + c)^n}.$$

Pierwszą z całek po prawej stronie obliczamy za pomocą podstawienia

$$t = x^2 + bx + c.$$

53 / 388

Całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju

Drugą z całek, po sprowadzeniu trójmianu $x^2 + bx + c$ do postaci kanonicznej

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4},$$

obliczamy za pomocą podstawienia

$$x + \frac{b}{2} = t\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}.$$

54 / 388

Całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju

Jeżeli $n = 1$, to korzystamy ze wzoru

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctg x + C.$$

55 / 388

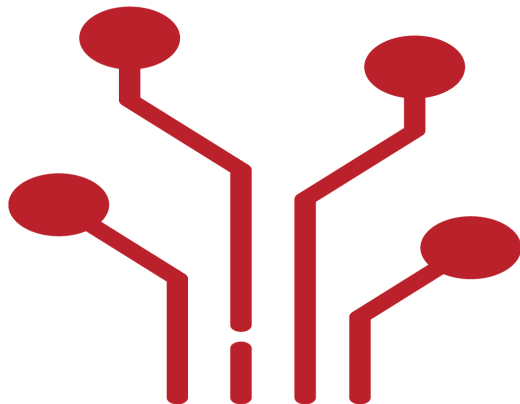
Całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju

Natomiast dla $n \geq 2$ stosujemy wzór rekurencyjny:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} = \frac{x}{(2n - 2)(x^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n - 3}{2n - 2} \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n-1}}.$$

56 / 388

Algorytm całkowania funkcji wymiernych



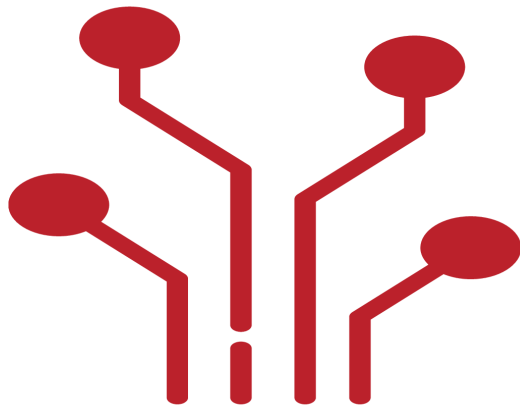
57 / 388

Algorytm całkowania funkcji wymiernych

1. Funkcję wymierną niewłaściwą zapisujemy w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.
2. Mianownik funkcji wymiernej właściwej rozkładamy na czynniki liniowe i nierozkładalne kwadratowe.
3. Zapisujemy teoretyczny rozkład funkcji wymiernej właściwej na ułamki proste pierwszego i drugiego rodzaju.
4. Znajdujemy nieznane współczynniki tego rozkładu.
5. Obliczamy całki poszczególnych składników rozkładu funkcji, tzn. wielomianu i ułamków prostych.

58 / 388

Całkowanie funkcji z niewymiernościami



59 / 388

Całkowanie funkcji z niewymiernościami

W przypadku, gdy funkcja jest postaci $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$, gdzie R jest wymierną funkcją dwu zmiennych, możemy stosować podstawienia Eulera:

- $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} + t$, gdy $a > 0$,
- $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$, gdy $c > 0$,
- $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - x_1)t$, gdzie x_1 to jeden z dwu różnych pierwiastków trójmianu.

60 / 388

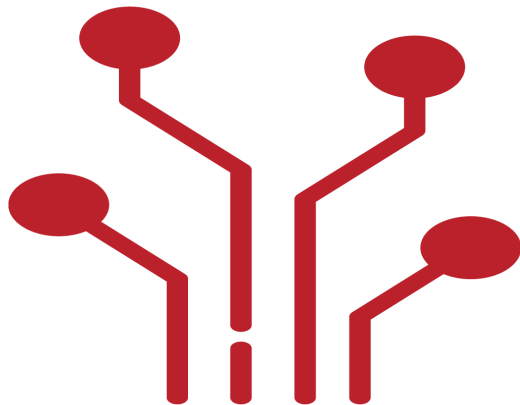
Całkowanie funkcji z niewymiernościami

Uwaga!

Dla pewnych specjalnych postaci funkcji R istnieją metody znacznie skuteczniejsze od podanych wyżej.

61 / 388

Całkowanie wyrażeń z funkcjami trygonometrycznymi



62 / 388

Całkowanie wyrażeń z funkcjami trygonometrycznymi

Dla wielu szczególnych postaci funkcji, w których występują funkcje trygonometryczne istnieją różnego rodzaju skuteczne podstawienia.

W ogólnej sytuacji całkę z funkcji $R(\sin x, \cos x)$, gdzie R jest funkcją wymierną dwu zmiennych, da się sprowadzić do całki z funkcji wymiernej podstawieniem

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

63 / 388

Całkowanie wyrażeń z funkcjami trygonometrycznymi

Dla tego podstawienia użytecznymi formułami są:

- $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$
- $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
- $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

64 / 388

Dziękuję za uwagę

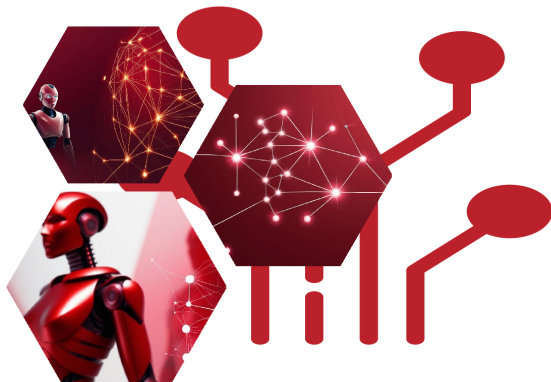
Całka oznaczona funkcji

dr Paweł Właż

Katedra Matematyki Stosowanej

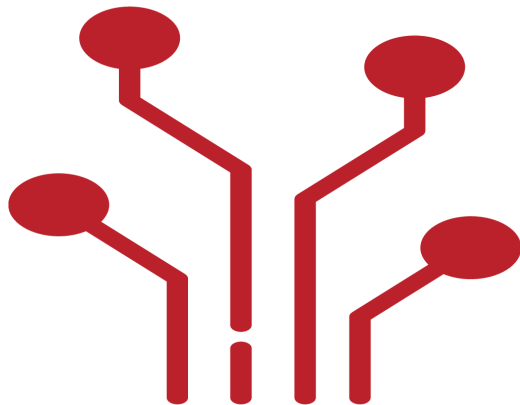
Plan wykładu

Całka Riemanna
Warunki całkowalności
Wzór Newtona-Leibniza
Całka oznaczona i jej własności



67 / 388

Całka Riemanna



68 / 388

Podział przedziału

Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Dzielimy przedział na n przedziałów dowolnie wybranymi punktami $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ w taki sposób, by

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Ten konkretny podział oznaczmy symbolem π .

Niech największa z różnic $x_{i+1} - x_i$ wynosi $d(\pi)$ – nazywamy ją średnicą podziału.

69 / 388

Podział przedziału

W każdym podprzedziale $[x_{i-1}, x_i]$ wybieramy jeden konkretny punkt, który oznaczamy literką ξ_i i tworzymy sumę iloczynów

$$f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

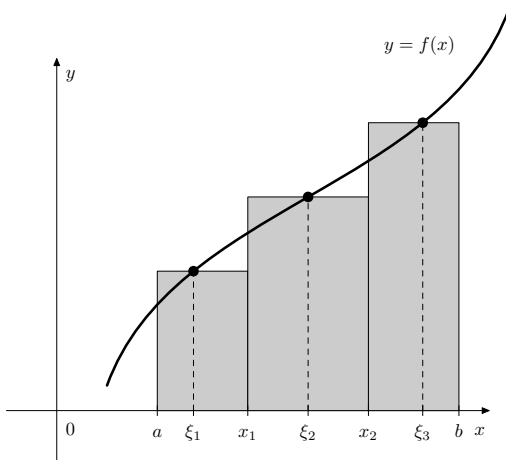
70 / 388

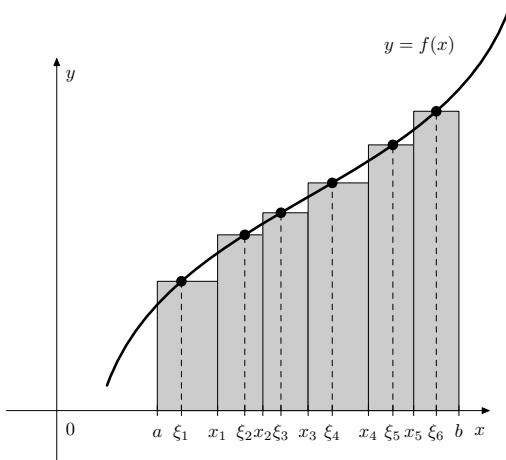
Suma całkowa Riemanna

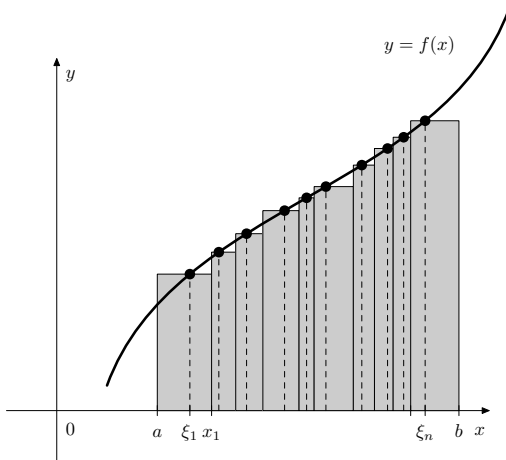
Przyjmując oznaczenie $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ sumę tę krótko zapisać możemy jako

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

71 / 388







Zbieżność ciągu sum Riemanna

Jeżeli dla każdego ciągu podziałów (π_k) takiego, że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(\pi_k) = 0$$

istnieje niezależna od wyboru punktów ξ_i skończona granica

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

to granicę tą nazywamy całką oznaczoną funkcji f na przedziale $[a, b]$

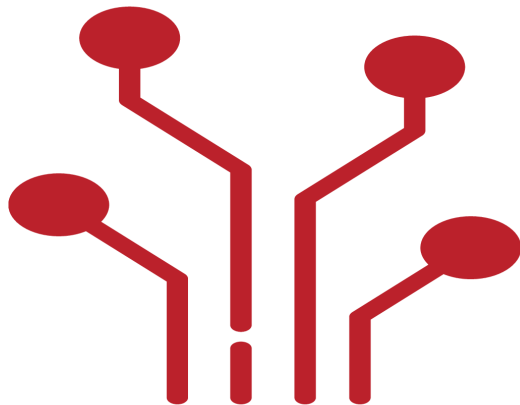
75 / 388

Całka oznaczona

Całkę oznaczoną zapisujemy symbolem $\int_a^b f(x)dx$.

Funkcję f dla której istnieje całka oznaczona nazywamy funkcją całkowaną.

Warunki całkowalności



77 / 388

Warunki całkowalności

Twierdzenie

Funkcja ciągła w przedziale $[a, b]$ jest w tym przedziale całkowalna.

Twierdzenie

Jeżeli zbiór punktów nieciągłości ograniczonej funkcji określonej w przedziale $[a, b]$ jest pusty, skończony, lub przeliczalny – to funkcja ta jest całkowalna w przedziale $[a, b]$.

78 / 388

Warunki całkowalności

Przykład

Niech $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$, założymy, że dzielimy przedział na $n > 1$ podprzedziałów, a punkt ξ_i to punkty środkowe przedziałów. Wtedy uzyskana suma Riemanna ma postać

$$S_n = \sum_{i=1}^n \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{n} \right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \left(i^2 - i + \frac{1}{4} \right).$$

79 / 388

Warunki całkowalności

Przykład (kontynuacja...)

Następnie, korzystając z formuły

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

łatwo wykazujemy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3}.$$

80 / 388

Warunki całkowania

Przykład (kontynuacja...)

Rozważana funkcja jest ciągła, a więc całkowna, wybór punktów ξ_i nie wpływa na finalny wynik, ostatecznie więc

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

81 / 388

Warunki całkowalności

Przykład

*Jedna z funkcji, która **nie** jest całkowalna w sensie Riemanna*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & \text{gdy } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

82 / 388

Warunki całkowalności

Twierdzenie

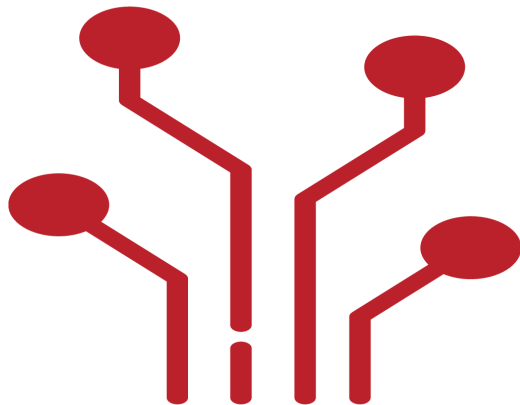
Jeżeli f jest całkowalna na $[a, b]$, to f jest także całkowalna na każdym z podprzedziałów domkniętych przedziału $[a, b]$.

Twierdzenie

Dodawanie funkcji całkowalnych oraz mnożenie funkcji całkowalnej przez liczbę daje w wyniku funkcję całkowalną.

83 / 388

Wzór Newtona-Leibniza



84 / 388

Wzór Newtona-Leibniza

Twierdzenie (Wzór Newtona-Leibniza)

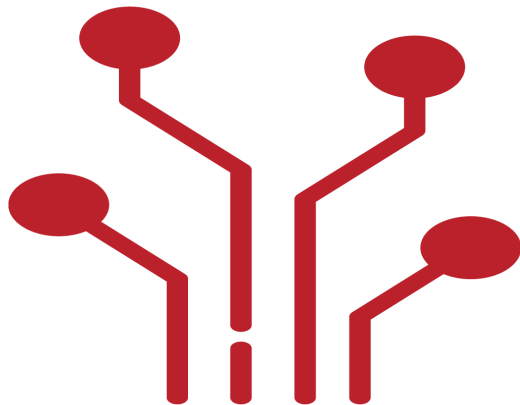
Niech f będzie funkcją ciągłą na $[a, b]$. Niech F będzie dowolną funkcją taką, że $F'(x) = f(x)$, dla $x \in (a, b)$. Wtedy

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Zamiast $F(b) - F(a)$ piszemy często $[F(x)]_a^b$ lub $F(x) \Big|_a^b$

85 / 388

**Całka oznaczona
i jej własności**



86 / 388

Całka oznaczona

Do tej pory przyjmowaliśmy, że we wzorze $\int_a^b f(x) dx$ jest $a < b$, gdyż definicja dotyczyła całki na przedziale.

Rozszerzamy znaczenie symbolu całkowania także na inne sytuacje przyjmując:

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$
$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

87 / 388

Własności całki oznaczonej

Twierdzenie (o liniowości całki oznaczonej)

Jeżeli funkcje f i g są całkowalne na przedziale $[a, b]$, to

- $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$
- $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx,$
- $\int_a^b (cf(x)) dx = c \int_a^b f(x) dx, c \in \mathbb{R}.$

88 / 388

Własności całki oznaczonej

Twierdzenie (o addytywności całki oznaczonej względem przedziałów całkowania)

Jeżeli funkcja f jest całkowna na przedziale $[a, b]$ oraz $c \in (a, b)$, to

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

89 / 388

Własności całki oznaczonej

Twierdzenie (o całkowaniu przez części)

Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne na przedziale $[a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

90 / 388

Własności całki oznaczonej

Przykład

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} x \sin x \, dx &= \left| \begin{array}{l} f = x \\ g' = \sin x \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} f' = 1 \\ g = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x \, dx = \\ &= -2\pi. \end{aligned}$$

91 / 388

Własności całki oznaczonej

Twierdzenie (o całkowaniu przez podstawienie)

Jeżeli

- funkcja $g: [a, b] \mapsto [\alpha, \beta]$ ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$,
- funkcja f jest ciągła na przedziale $[\alpha, \beta]$,

to

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

92 / 388

Własności całki oznaczonej

Przykład

$$\int_{-1}^2 x \sin(\pi x^2) dx = \left| \begin{array}{l} \pi x^2 = t \\ 2\pi x dx = dt \\ \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline -1 & \pi \\ 2 & 4\pi \\ \hline \end{array} \end{array} \right| = \int_{\pi}^{4\pi} \frac{1}{2\pi} \sin t dt = -\frac{1}{2\pi} \cos t \Big|_{\pi}^{4\pi} = -\frac{1}{\pi}.$$

93 / 388

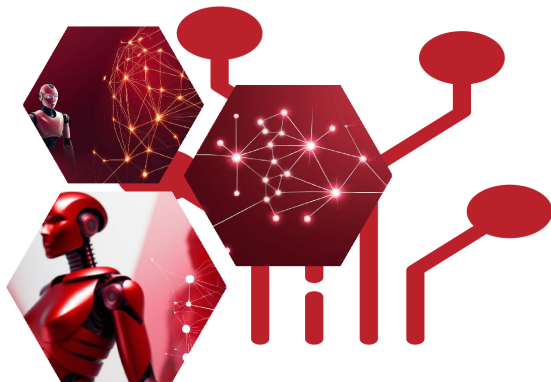
Całka niewłaściwa. Zastosowania całek

dr Paweł Właż

Katedra Matematyki Stosowanej

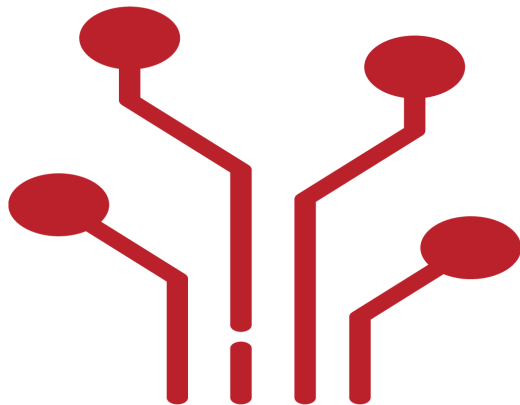
Plan wykładu

Całka niewłaściwa pierwszego rodzaju
Całki niewłaściwe drugiego rodzaju
Zastosowania geometryczne
Zastosowania w fizyce



95 / 388

Całka niewłaściwa pierwszego rodzaju



96 / 388

Całka niewłaściwa na półprostej

Definicja

Niech funkcja f będzie określona na przedziale $[a, +\infty)$. **Całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju** funkcji f na $[a, +\infty)$ definiujemy wzorem:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_a^T f(x) dx.$$

97 / 388

Przykład

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M \frac{dx}{x^2 + 1} = \lim_{M \rightarrow \infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \Big|_0^M = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} M = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

98 / 388

Całka niewłaściwa na półprostej

Definicja

Niech funkcja f będzie określona na przedziale $(-\infty, a]$. **Całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju** funkcji f na $(-\infty, a]$ definiujemy wzorem:

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{S \rightarrow -\infty} \int_S^a f(x) dx.$$

99 / 388

Przykład

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 1} &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^0 \frac{dx}{x^2 + 1} = \lim_{s \rightarrow -\infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \Big|_s^0 = \\ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} (-\operatorname{arc} \operatorname{tg} S) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

100 / 388

Całka niewłaściwa na półprostej

Jeżeli granica po prawej stronie znaku równości jest właściwa, to mówimy, że **całka niewłaściwa funkcji f jest zbieżna**. Jeżeli granica ta jest równa $+\infty$ lub $-\infty$, to mówimy, że **całka jest rozbieżna** odpowiednio do $+\infty$ lub $-\infty$. Jeżeli granica ta nie istnieje, to mówimy, że całka jest rozbieżna.

101 / 388

Całka niewłaściwa na prostej

Definicja

Niech funkcja f będzie określona na przedziale $(-\infty, +\infty)$.

Całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju funkcji f na $(-\infty, +\infty)$ definiujemy wzorem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx,$$

gdzie a oznacza dowolnie wybraną liczbę rzeczywistą.

102 / 388

Całka niewłaściwa na prostej

Zbieżność całki $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ustalamy w zależności od zbieżności całek $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ oraz $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Jeżeli całki $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ oraz $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ są zbieżne, to całka $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ jest również zbieżna. Jeżeli chociaż jedna z całek $\int_{-\infty}^a f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ jest rozbieżna, to całka $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ jest również rozbieżna.

103 / 388

Całka niewłaściwa na prostej

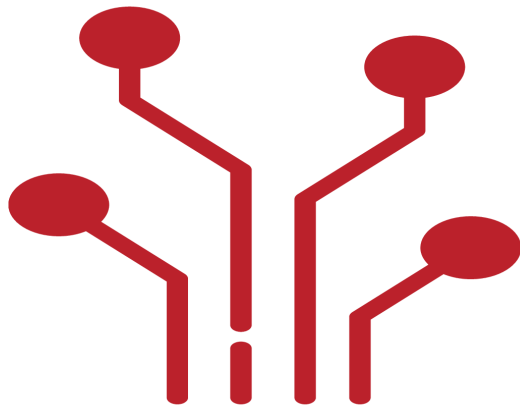
Przykład

Na podstawie poprzednio pokazanych przykładów możemy zapisać, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 1} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

104 / 388

Całki niewłaściwe drugiego rodzaju



105 / 388

Całki niewłaściwe drugiego rodzaju

Niech funkcja f określona na przedziale $(a, b]$ będzie nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu a . **Całkę niewłaściwą drugiego rodzaju** funkcji f na $(a, b]$ definiujemy wzorem:

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

106 / 388

Całki niewłaściwe drugiego rodzaju

Niech funkcja f określona na przedziale $[a, b)$ będzie nieograniczona tylko na lewostronnym sąsiedztwie punktu b . **Całkę niewłaściwą drugiego rodzaju** funkcji f na $[a, b)$ definiujemy wzorem:

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

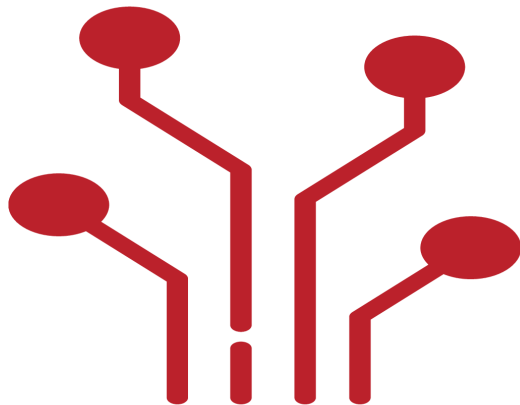
107 / 388

Całki niewłaściwe drugiego rodzaju

Zbieżność i rozbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju określamy analogicznie do zbieżności i rozbieżności całek niewłaściwych pierwszego rodzaju.

108 / 388

Zastosowania geometryczne



109 / 388

Pole trapezu krzywoliniowego

Pole trapezu krzywoliniowego.

Niech funkcje f oraz g będą ciągłe na przedziale $[a, b]$ oraz niech $f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$. Wtedy pole trapezu krzywoliniowego D ograniczonego wykresami funkcji f i g oraz prostymi $x = a$, $x = b$ wyraża się wzorem:

$$|D| = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx.$$

110 / 388

Pole trapezu krzywoliniowego

Przykład

Pole powierzchni zawartej między wykresami funkcji $y = 4 - x^2$ oraz $y = 3x$ dla $x \in [-4, 1]$ można obliczyć – ze względu na to, że w tym przedziale pierwsza z funkcji ma wartości większe lub równe od drugiej – jako

$$\int_{-4}^1 (4 - x^2 - 3x) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_{-4}^1 = \frac{125}{6}.$$

III / 388

Długość łuku krzywej

Niech funkcja f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$. Wtedy długość krzywej $\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$ wyraża się wzorem:

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

112 / 388

Długość łuku krzywej

Przykład

Rozważmy krzywą $y = x^{\frac{3}{2}}$ w przedziale $[0, 4]$. Długość tej krzywej wynosi

$$\begin{aligned}\int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx &= \left| \frac{1 + \frac{9}{4}x = t}{\frac{9}{4} dx = dt} \right| = \int_1^{10} \frac{4}{9} \sqrt{t} dt = \frac{4}{9} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^{10} = \\ &= \frac{8}{27} (\sqrt{1000} - 1) \approx 9.073415.\end{aligned}$$

113 / 388

Objętość bryły obrotowej

Niech funkcja nieujemna f będzie ciągła na przedziale $[a, b]$. Niech T oznacza trapez krzywoliniowy ograniczony wykresem funkcji f , osią Ox oraz prostymi $x = a, x = b$. Wtedy objętość bryły V powstałej z obrotu trapezu T wokół osi Ox wyraża się wzorem (sumowanie objętości walców o osi symetrii Ox):

$$|V| = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

114 / 388

Objętość bryły obrotowej

Przykład

Objętość stożka o wysokości h i promieniu podstawy r może być obliczona jako objętość figury, która powstanie przez obrót dokoła Ox trapezu krzywoliniowego ograniczonego liniami

$$y = \frac{r}{h}x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = h.$$

115 / 388

Objętość bryły obrotowej

Przykład (kontynuacja...)

Zatem objętość ta wynosi

$$\pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

co potwierdza znany ze szkolnej geometrii wzór.

116 / 388

Objętość bryły obrotowej

Przykład

Objętość bryły obrotowej, która powstanie przez obrót dookoła Ox trapezu krzywoliniowego ograniczonego liniami

$$y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 4$$

wynosi

$$\pi \int_0^4 x \, dx = 8\pi.$$

117 / 388

Objętość bryły obrotowej

Niech funkcja nieujemna f będzie ciągła na przedziale $[a, b]$. Niech T oznacza trapez krzywoliniowy ograniczony wykresem funkcji f , osią Ox oraz prostymi $x = a, x = b$. Wtedy objętość bryły V powstałej z obrotu trapezu T wokół osi Oy wyraża się wzorem (sumowanie objętości pierścieni walcowych):

$$|V| = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

118 / 388

Objętość bryły obrotowej

Przykład

Objętość stożka o wysokości h i promieniu podstawy r może być obliczona jako objętość figury, która powstanie przez obrót dokoła Oy trapezu krzywoliniowego ograniczonego liniami

$$y = h - \frac{h}{r}x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = r.$$

119 / 388

Objętość bryły obrotowej

Przykład (kontynuacja...)

Zatem objętość ta wynosi

$$2\pi \int_0^r x \left(h - \frac{h}{r}x \right) dx = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

co potwierdza znany ze szkolnej geometrii wzór.

120 / 388

Objętość bryły obrotowej

Przykład

Objętość bryły ze slajdu 117 może być także wyliczona poprzez obliczenie objętości figury która powstanie przez obrót dokoła Oy trapezu krzywoliniowego ograniczonego liniami

$$y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2$$

i odjęcie jej od objętości walca o wysokości 4 i promieniu podstawy 3.

121 / 388

Objętość bryły obrotowej

Przykład (kontynuacja...)

Objętość wyniesie więc

$$\pi 2^2 \cdot 4 - 2\pi \int_0^2 x \cdot x^2 dx = 16\pi - 2\pi \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 8\pi$$

co potwierdza poprzednio uzyskany wynik.

122 / 388

Pole powierzchni obrotowej.

Pole powierzchni obrotowej.

Niech funkcja nieujemna f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$. Wtedy pole powierzchni Σ powstałej z obrotu wykresu funkcji f wokół osi Ox wyraża się wzorem:

$$|\Sigma| = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

123 / 388

Pole powierzchni obrotowej.

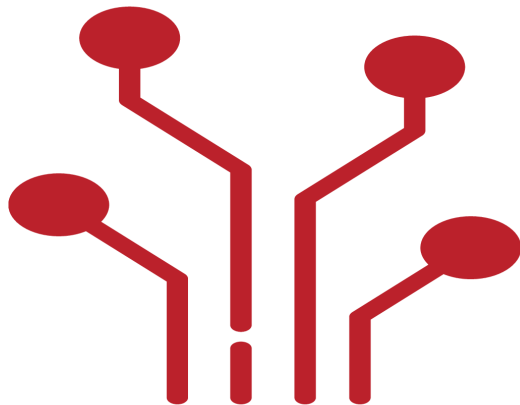
Pole powierzchni obrotowej.

Niech funkcja nieujemna f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$. Wtedy pole powierzchni Σ powstałej z obrotu wykresu funkcji f wokół osi Oy wyraża się wzorem:

$$|\Sigma| = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

124 / 388

Zastosowania w fizyce



125 / 388

Zastosowania w fizyce

Wśród podstawowych zastosowań całki oznaczonej w fizyce wymienimy obliczanie:

masy łuku materialnego, momentu statycznego łuku materialnego, środka ciężkości łuku materialnego, momentu bezwładności łuku materialnego, pracy siły wzdłuż odcinka, obliczanie przebytej drogi na podstawie prędkości.

W każdym z tych przypadków są to całki wynikające w naturalny sposób z odpowiednich sum dla „skończonych” odpowiedników.

126 / 388

Zastosowania w fizyce

Przykład

Wyznacz pracę jaką wykonuje siła o wartości równej sile grawitacji, lecz przeciwnie skierowana, przy przemieszczaniu ciała o masie m wzdłuż linii sił pola grawitacyjnego, z punktu odległego o r_1 do punktu odległego o r_2 . Odległości podane od środka masy planety. M to masa planety, G – stała grawitacyjna.

$$P = \int_{r_1}^{r_2} \frac{mMG}{r^2} dr = mMG \left. \frac{-1}{r} \right|_{r_1}^{r_2} = mMG \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

127 / 388

Dziękuję za uwagę

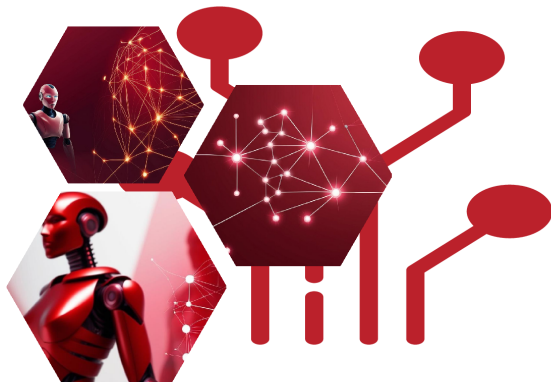
Metody numeryczne obliczania całek

dr Paweł Wlaż

Katedra Matematyki Stosowanej

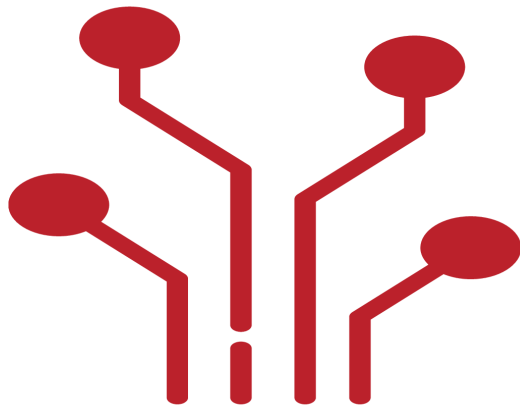
Plan wykładu

Obliczenia przybliżone w całkowaniu
Kwadratury oparte o węzły równoodległe
Inne kwadratury



130 / 388

Obliczenia przybliżone w całkowaniu



131 / 388

Potrzeba obliczeń przybliżonych przy całkach oznaczonych

Potrzeba całkowania przybliżonego pojawia się, gdy

- funkcja podcałkowa jest znana tylko w niektórych punktach, brak analitycznej, zwartej formuły obliczającej wartości funkcji,
- funkcja jest znana, jednak funkcja pierwotna jest trudna lub niemożliwa do przedstawienia w postaci zwartej.

132 / 388

Potrzeba obliczeń przybliżonych przy całkach oznaczonych

Przykład

Wiadomo, że funkcje takie jak $f(x) = e^{-x^2}$, $f(x) = \sin x^2$, $f(x) = e^{x^3}$ i wiele innych, pozornie prostych funkcji – mają funkcje pierwotne (są wszak ciągłe) ale ich funkcje pierwotne nie dadzą się zapisać za pomocą skończonej liczby działań na funkcjach elementarnych (wykładniczych, potęgowych, logarytmicznych, trygonometrycznych i odwrotnych do nich). Jednocześnie wiele z nich odgrywa bardzo ważną rolę w zastosowaniach inżynierskich i statystycznych.

133 / 388

Potrzeba obliczeń przybliżonych przy całkach oznaczonych

Przykład

Jako przykład „referencyjny” posłużymy nam tzw. funkcja błędu Gaussa

$$\operatorname{erf}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Funkcję tę potrafią obliczać metodami przybliżonymi pakiety dostępne w każdym języku programowania używanym w praktyce obliczeniowej.

134 / 388

Potrzeba obliczeń przybliżonych przy całkach oznaczonych

Przykład (kontynuacja...)

W dalszych przykładach będziemy różnymi metodami obliczali wartość $\operatorname{erf}(1)$, która zapisana na 25 cyfrach znaczących wynosi

0.842 700 792 949 714 869 341 220 6

135 / 388

Jak dokonać takiego przybliżonego obliczenia

Najprostszy pomysł, skonstruowanie sumy Riemanna dla podziału przedziału o bardzo małej średnicy (czyli o bardzo małej maksymalnej długości podprzedziału) przy jakkolwiek ustalonej regule wybierania punktów ξ_i . Trzeba tylko mieć nadzieję, że taka suma będzie bliska teoretycznej całce.

136 / 388

Jak dokonać takiego przybliżonego obliczenia

Pomysł bardziej wyrafinowany, to zastępowanie oryginalnej funkcji pewną przybliżoną, dającą się dokładnie całkować funkcją. W takich sytuacjach, przy pewnych założeniach daje się nawet oszacować popełniane błędy.

137 / 388

Jak dokonać takiego przybliżonego obliczenia

Obie te koncepcje można sprowadzić do ogólnego zapisu:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$$

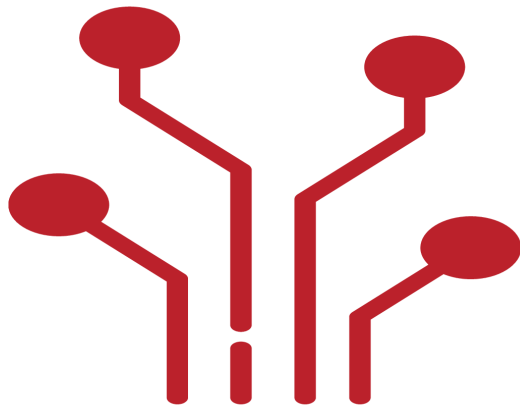
dla odpowiednio dobranego n oraz ciągów $x_1, x_2, \dots, x_n, A_1, A_2, \dots, A_n$.

Czasem wygodniejsze jest numerowanie od zera.

Formuły tego rodzaju nazywane są *kwadraturami*.

138 / 388

Kwadratury oparte o węzły równoodległe



139 / 388

Kwadratury oparte o węzły równoodległe

W kwadraturach tych przedział $[a, b]$ podzielony jest na n przedziałów długości

$$h = \frac{b - a}{n}$$

140 / 388

Złożony wzór prostokątów

We wzorze tym całkę przybliżamy sumą Riemanna, jako reprezentanta w podprzedziale przyjmując punkt postaci

$$a + i \cdot h + \alpha \cdot h,$$

gdzie α jest dowolnie ustaloną liczbą z przedziału $[0, 1]$.

Dla $\alpha = 0$ oznaczałoby to obliczanie wartości funkcji w lewym końcu podprzedziału, dla $\alpha = 1$ w prawym końcu.

Opcja „sprawiedliwa” to $\alpha = 0.5$.

141 / 388

Złożony wzór prostokątów

Mamy wtedy

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(a + (i + 0.5) \cdot h).$$

142 / 388

Złożony wzór prostokątów

Wiadomo, że dla funkcji f mającej ciągłą drugą pochodną w $[a, b]$ błąd metody nie może przekroczyć

$$\frac{(b-a)^3}{24n^2} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

143 / 388

Złożony wzór prostokątów

Przykład

Oszacujmy tą metodą – przyjmując $n = 6$ – wartość ze slajdu 135.

$$\operatorname{erf}(1) \approx \frac{1}{6} \sum_{i=0}^5 \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-((0.5+i)/6)^2} = 0.8436632$$

Wartość bezwzględna różnicy między obliczoną wartością a wartością ze slajdu 135 jest mniejsza niż 0.001.

144 / 388

Wzór trapezów

We wzorze tym bierze się pod uwagę jedynie skrajne wartości funkcji w przedziale – wartość w lewym końcu i wartość w prawym końcu – przybliżając całkę średnią z tych dwóch wartości pomnożoną przez długość przedziału, czyli

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{f(a) + f(b)}{2} (b - a).$$

145 / 388

Wzór trapezów

Oczywiście dokładność tak prostej metody nie może być duża, zwiększa się ją poprzez podzielenie przedziału na n podprzedziałów równej długości, w każdym z nich stosując metodę trapezów. Po przekształceniach otrzymuje się wtedy nowy wzór, zwany złożonym wzorem trapezów.

146 / 388

Złożony wzór trapezów

Niech $h = (b - a)/n$.

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih) \right)$$

147 / 388

Złożony wzór trapezów

Wtedy wartość bezwzględna błędu aproksymacji nie przekracza

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

148 / 388

Złożony wzór trapezów

Przykład

Oszacujmy tą metodą – przyjmując $n = 5$ – wartość ze slajdu 135.

$$\operatorname{erf}(1) \approx \frac{1}{5} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1 + e^{-1}}{2} + \sum_{i=1}^4 e^{-i/5^2} \right) = 0.8399297$$

Wartość bezwzględna różnicy między obliczoną wartością a wartością ze slajdu 135 jest mniejsza niż 0.003.

149 / 388

Wzór Simpsona

We wzorze tym bierze się pod uwagę jedynie skrajne wartości funkcji w przedziale oraz wartość w punkcie środkowym. Oznaczmy $h = \frac{b-a}{2}$.

Formuła jest wyprowadzona poprzez utworzenie paraboli interpolującej punkty $(a, f(a))$, $(a + h, f(a + h))$ oraz $(b, f(b))$ i obliczenie dokładnej całki tej właśnie paraboli w przedziale $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3}(f(a) + 4f(a + h) + f(b)).$$

150 / 388

Uzasadnienie wzoru Simpsona

Dowód

Oznaczmy $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$. Wtedy wielomian drugiego stopnia $w(x)$ interpolujący wskazane na poprzednim slajdzie punkty może być zapisany jako

151 / 388

Uzasadnienie wzoru Simpsona

Dowód (kontynuacja...)

$$w(x) = f(x_0) \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1) \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \\ + f(x_2) \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Następnie pokazuje się, że

152 / 388

Uzasadnienie wzoru Simpsona

Dowód (kontynuacja...)

$$\int_a^b \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} dx = \frac{1}{2h^2} \int_a^b (x - x_1)(x - x_2) dx = \frac{h}{3},$$
$$\int_a^b \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} dx = -\frac{1}{h^2} \int_a^b (x - x_0)(x - x_2) dx = \frac{4h}{3},$$
$$\int_a^b \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} dx = \frac{1}{2h^2} \int_a^b (x - x_0)(x - x_1) dx = \frac{h}{3},$$



153 / 388

Wzór Simpsona

Przykład

Rozważmy funkcję $f(x) = x^2 - 5x + 1$ w przedziale $[1, 3]$. Całka oznaczona wynosi $\frac{-28}{3}$ co łatwo obliczamy analitycznie. Wzór Simpsona daje nam

$$\frac{1}{3}(f(1) + 4f(2) + f(3)) = \frac{-3 + 4 \cdot (-5) - 5}{3} = \frac{-28}{3}$$

a więc daje nam dokładny wynik, co zgadza się z ideą tego wzoru.

154 / 388

Wzór Simpsona

Oczywiście dokładność tak prostej metody, bazującej na obliczeniu funkcji zaledwie w trzech punktach nie może być duża. Dokładność zwiększa się poprzez podzielenie przedziału na n podprzedziałów równej długości, w każdym z nich stosując metodę Simpsona. Po przekształceniach otrzymuje się wtedy nowy wzór, zwany złożonym wzorem Simpsona.

155 / 388

Złożony wzór Simpsona

Niech $h = (b - a)/n$, zakładamy parzystość n i niech $x_i = a + h \cdot i, i = 0, 1, \dots, n$.
W każdym z przedziałów postaci $[x_{2i}, 2x_{2i+2}]$ stosowany jest wzór Simpsona (dla $i = 0, 1, \dots, n/2 - 1$) przez co uzyskuje się

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(f(a) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + f(b) \right)$$

156 / 388

Błąd złożonej metody Simpsona

Wiadomo, że dla funkcji f mającej ciągłą czwartą pochodną w $[a, b]$ błąd metody nie może przekroczyć

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

157 / 388

Błąd złożonej metody Simpsona

Przykład

Oszacujmy tą metodą – przyjmując $n = 4$ – wartość ze slajdu 135. Biorąc $n = 4$ w tej metodzie oblicza się wartości w pięciu punktach $a = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 = b$, odległość między sąsiednimi punktami to $h = 0.25$. Mamy więc o jeden punkt mniej niż w poprzednich rozwiązaniach (metodą punktu środkowego oraz złożoną metodą trapezów). Oznaczając przez $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ mamy

158 / 388

Błąd złożonej metody Simpsona

Przykład (kontynuacja...)

$$\text{erf}(1) \approx \frac{0.25}{3} (f(0) + 4f(0.25) + 2f(0.5) + 4f(0.75) + f(1)) = 0.842\,736\,1.$$

Wartość bezwzględna różnicy między obliczoną wartością a wartością ze slajdu 135 jest mniejsza niż 0.000 04, a więc polepszyła się kilkudziesięciokrotnie w stosunku do obliczeń poprzednio rozważonymi metodami.

159 / 388

Przedział z nieskończoną granicą

Są metody całkowania numerycznego dotyczące przedziałów jednostronnie bądź obustronnie nieskończonych, jednak często prostszym podejściem jest podstawienie sprowadzające przedział nieskończony do przedziału skończonego.

160 / 388

Jak postępować w przypadku przedziału z nieskończoną granicą

Przykład

Obliczymy przybliżoną wartość

$$\int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx$$

161 / 388

Przedział z nieskończoną granicą

Przykład (kontynuacja...)

Aby zastosować jedną z wcześniej poznanych metod przekształcimy całkę:

$$\int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} e^{-x} = t \\ x = -\ln t \\ dx = -\frac{dt}{t} \end{array} \right| = \int_1^0 -\frac{2}{\sqrt{\pi}t} e^{-\ln^2 t} dt = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{\pi}t} e^{-\ln^2 t} dt$$

162 / 388

Przedział z nieskończoną granicą

Przykład (kontynuacja...)

Całkę w tej postaci możemy już przybliżyć na przykład złożoną metodą prostokątów z punktem środkowym. Przyjmijmy $n = 5$, i niech

$$h(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi t}} e^{-\ln^2(t)}.$$

Wtedy szukana całka to w przybliżeniu

$$0.2 \cdot (h(0.1) + h(0.3) + h(0.5) + h(0.7) + h(0.9)) = 0.998\,805\,8$$

163 / 388

Przedział z nieskończoną granicą

Przykład (kontynuacja...)

Metoda ta została wybrana nieprzypadkowo, bo jako jedyna z omówionych metod jest *kwadraturą otwartą* (nie używa końców przedziału, w odróżnieniu od *kwadratur zamkniętych*).

Rzeczywiście funkcji $h(t)$ nie da się obliczyć w zerze. Z drugiej strony funkcja ta jest ciągła w przedziale $(0, 1]$ oraz ma granicę $\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = 0$ zatem możemy po prostu uzupełnić definicję funkcji h tak by miała wartość 0 w punkcie 0. Wtedy możemy swobodnie użyć także na przykład złożonej metody Simpsona.

164 / 388

Przedział z nieskończoną granicą

Przykład (kontynuacja...)

Przyjmijmy dla tej metody $n = 4$.

Wtedy

$$\int_0^1 h(t) dt \approx \frac{1}{12} (h(0) + 4h(0.25) + 2h(0.5) + 4h(0.75) + h(1)) = 1.008\,507.$$

165 / 388

Przedział z nieskończoną granicą

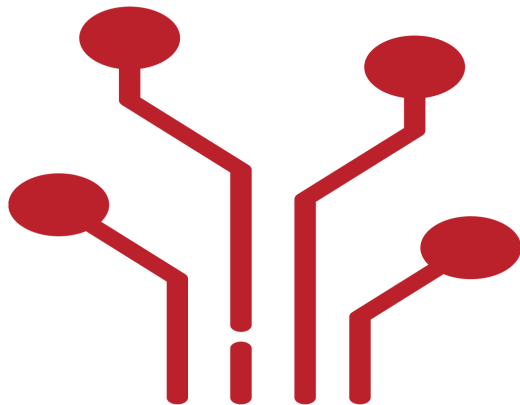
Przykład (kontynuacja...)

Na zakończenie przykładu dodam, że na zupełnie innej – analitycznej – drodze wykazuje się iż

$$\int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = 1.$$

166 / 388

Inne kwadratury



167 / 388

Sąsiednie punkty węzłowe niekoniecznie muszą być w jednakowej odległości

Istnieje cała grupa kwadratur – tzw. kwadratury Gaussa – które są dokładne dla pewnej klasy funkcji i w których optymalny układ węzłów nie jest tak regularny jak w poprzednio omówionych kwadraturach. Materiał ten wykracza poza zaplanowane ćwiczenia, omówiony zostanie jeden przykład takiej kwadratury.

168 / 388

Kwadratura Gaussa-Czebyszewa

Jest to kwadratura w której, dla ustalonego $n \geq 1$

$$\int_{-1}^1 f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

gdzie $x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$, dla $k = 1, 2, \dots, n$.

169 / 388

Kwadratura Gaussa-Czebyszewa

Okazuje się, że tak obliczona suma daje dokładną wartość całki gdy f jest wielomianem stopnia co najwyżej $2n - 1$.

170 / 388

Kwadratura Gaussa-Czebyszewa

Każdy przedział domknięty można prostym, na przykład liniowym podstawieniem sprowadzić do przedziału $[-1, 1]$, więc fakt, że w takiej właśnie formie podany jest ten przedział nie ogranicza stosowalności metody.

W praktyce nie używa się bardzo wysokich stopni tej kwadratury; raczej dzieli się oryginalny przedział na wiele podprzedziałów, w każdym z nich stosując powyższą kwadraturę. Jest to idea podobna do złożonych wzorów, rozpatrywanych wcześniej.

171 / 388

Kwadratura Gaussa-Czebyszewa

Przykład

Rozważmy $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{7+\sin x}$. Tu akurat podstawienie liniowe nie byłoby mądre, ze względu na postać funkcji wybierzemy raczej $t = \sin x$ wtedy $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, czyli ostatecznie chcemy obliczyć

172 / 388

Kwadratura Gaussa-Czebyszewa

Przykład (kontynuacja...)

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{7+t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Jeżeli przyjmiemy $n = 3$ i $f(t) = \frac{1}{7+t}$ to zgodnie z omówioną metodą przybliżamy całkę przez

$$\frac{\pi}{3} (f(-\sqrt{3}/2) + f(0) + f(\sqrt{3}/2)) = 0.453\,449\,7.$$

173 / 388

Kwadratura Gaussa-Czebyszewa

Przykład (kontynuacja...)

Na zakończenie przykładu warto dodać, że rachunki dokładne dają

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{7 + \sin x} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}},$$

co zaokrąglone do 7 cyfr znaczących wynosi 0.453 449 8.

174 / 388

Dziękuję za uwagę

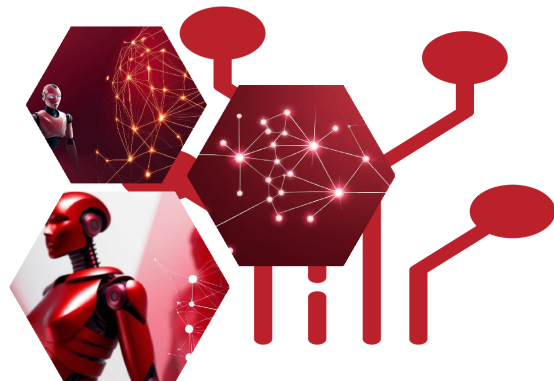
Równania różniczkowe zwyczajne

dr Paweł Właż

Katedra Matematyki Stosowanej

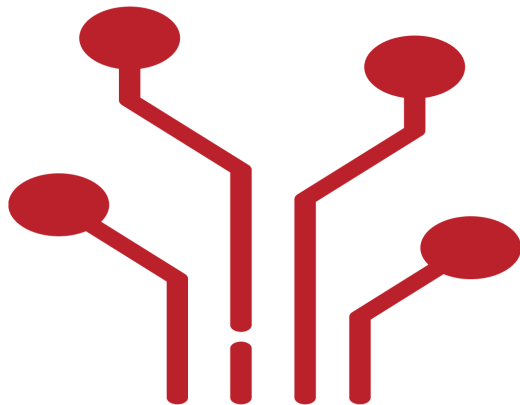
Plan wykładu

Przykłady równań różniczkowych
Równanie różniczkowe zwyczajne,
rozwiązanie r.r.z.
Najprostsze równanie różniczkowe
Równanie autonomiczne
Równanie o rozdzielających się zmiennych



177 / 388

Przykłady równań różniczkowych



178 / 388

Wykładniczy wzrost populacji

Bakterie w środowisku o stałych parametrach – rozmnażanie przez podział. Po czasie T następuje podział, przybywa frakcja k dotychczasowego stanu, czyli liczebność poprzednio obserwowane zostaje przemnożona przez $(1 + k)$. Jeśli przez $N(t)$ oznaczmy wielkość populacji w chwili t , to

$$N(t_0 + i \cdot T) = (1 + k)N(t_0 + (i - 1) \cdot T)$$

lub inaczej

$$N(t_0 + i \cdot T) = (1 + k)^i N(t_0) \quad (1)$$

dla $i = 1, 2, \dots$, gdzie t_0 oznacza moment początku obserwacji.

Wykładniczy wzrost populacji

Traktując masę bakterii $N(t)$ jako rzeczywistą funkcję rzeczywistego parametru t (czasu)

$$N(t + \Delta t) - N(t) = \mu \frac{\Delta t}{T} N(t)$$

lub inaczej

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{\mu}{T} N(t)$$

dla $i = 1, 2, 3, \dots$, gdzie μ jest pewnym współczynnikiem zależnym od k .

180 / 388

Wykładniczy wzrost populacji

Po przejściu granicznym:

$$[N(t)]' = \frac{\mu}{T} N(t). \quad [2]$$

Rozwiązaniem jest funkcja $N(t) = N(t_0)e^{\frac{\mu}{T}(t-t_0)}$.

181 / 388

Wykładniczy wzrost populacji

Widać więc, porównując z formułą (1), że należy przyjąć takie μ , by

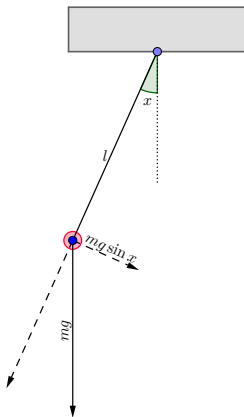
$$(1 + k)^i = e^{\mu \cdot i},$$

zatem $\mu = \ln(1 + k)$.

Tego rodzaju wykładniczy wzrost jest – przy spełnieniu odpowiednich założeń środowiska – potwierdzony eksperymentalnie!

182 / 388

Wahadło matematyczne



183 / 388

Wahadło matematyczne

Rozważenie sił działających na ciało prowadzi do równania

$$m(lx)'' = -mg \sin x$$

gdzie l oznacza długość nierozciągliwej nici, m to masa skupionego w jednym punkcie ciała, g – przyspieszenie ziemskie. Brak oporów ruchu. Pochodne liczone są po czasie, natomiast x oznacza zależny od czasu kąt wychylenia, dodatni dla odchylen w prawo, ujemny – w lewo.

184 / 388

Wahadło matematyczne

Przy założeniu, że kąty są małe $x \approx \sin x$, a więc

$$(x)'' = -\frac{g}{l}kx$$

185 / 388

Wahadło matematyczne

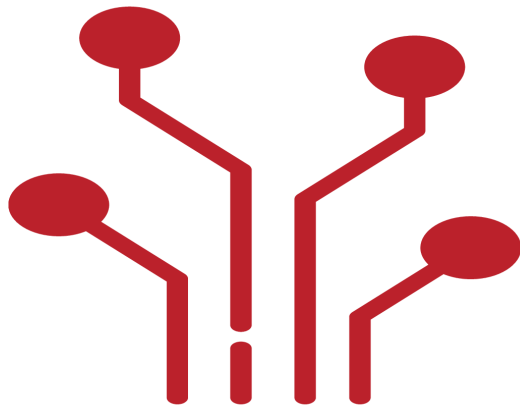
Ostatnie z równań ma łatwe do sprawdzenia rozwiązanie

$$x(t) = A \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t + \varphi \right)$$

gdzie A jest amplitudą drgań zaś φ – fazą początkową drgań.

186 / 388

Równanie różniczkowe zwyczajne, rozwiązanie r.r.z.



187 / 388

Definicja

Niech w pewnym zbiorze $K \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ będzie określona funkcja F ; równanie postaci

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

nazywa się *równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n*

Postać normalna r.r.z.

Definicja

Równanie różniczkowe postaci

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

nazywamy *równaniem o postaci normalnej*

189 / 388

Rozwiązanie równania różniczkowego

Definicja

Rozwiązaniem równania różniczkowego

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

nazywamy dowolną funkcję f n -krotnie różniczkowalną, określoną w przedziale I , że dla dowolnego $x \in I$ punkt

$$(x, f(x), f'(x) \dots, f^{(n)}(x))$$

190 / 388

Rozwiązanie równania różniczkowego

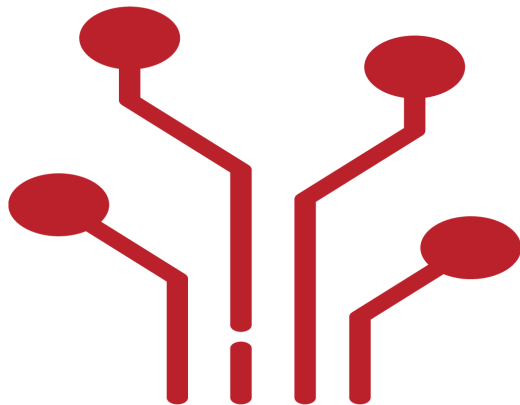
Definicja (kontynuacja...)

należy do dziedziny funkcji F oraz dla dowolnego $x \in I$ zachodzi

$$F(x, f(x), f'(x) \dots, f^{(n)}(x)) = 0$$

191 / 388

Najprostsze równanie różniczkowe



192 / 388

Najprostsze równanie różniczkowe

Jest to równanie postaci

$$y' = f(x), \quad f \text{ ciągła}$$

Jego rozwiązaniem jest rodzina funkcji

$$y = \int f(x) dx, \quad x \in I.$$

193 / 388

Najprostsze równanie różniczkowe

Podobnie jak pozostałe równania rzędu pierwszego, często skojarzone z *warunkiem początkowym* postaci

$$y(x_0) = y_0,$$

dla ustalonych stałych x_0, y_0 .

194 / 388

Najprostsze równanie różniczkowe

Przykład

Rozważmy równanie

$$y' = \frac{1}{x^2}, \quad x \in [1, \infty), \quad y(1) = 5.$$

Gdyby pominąć warunek początkowy, to rozwiązaniem byłaby rodzina funkcji

$$y = -\frac{1}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

195 / 388

Najprostsze równanie różniczkowe

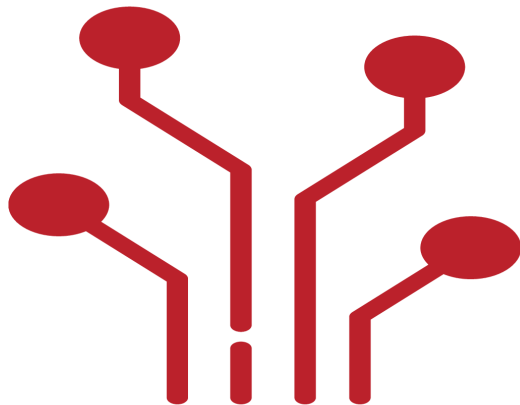
Przykład (kontynuacja...)

natomiast uwzględnienie warunku początkowego daje nam jednoznaczne rozwiązanie

$$y = 6 - \frac{1}{x}.$$

196 / 388

Równanie autonomiczne



197 / 388

Równanie autonomiczne

Jest to równanie postaci

$$y' = f(y), \quad f \text{ ciągła.}$$

Jeśli istnieje y_0 , dla którego $f(y_0) = 0$, to dobrym rozwiązaniem jest funkcja stała

$$y = y_0.$$

198 / 388

Równanie autonomiczne

Pozostałe rozwiązania uzyskamy rozważając (przy założeniu $f(y) \neq 0$)

$$\int \frac{dy}{f(y)} = x. \quad [3]$$

199 / 388

Równanie autonomiczne

Przykład

Dla równania

$$y' = \alpha y \quad [4]$$

ogólnym rozwiązaniem jest $y = Ce^{\alpha x}$, $C \in \mathbb{R}$. Rzeczywiście,

$$y = 0 \quad [5]$$

jest rozwiązaniem, przez bezpośrednie sprawdzenie.

200 / 388

Równanie autonomiczne

Przykład (kontynuacja...)

Jeśli założymy, że $y \neq 0$, to formuła [3] prowadzi nas do

$$\int \frac{dy}{y} = \alpha x$$

czyli $\ln |y| + C_1 = \alpha x, C_1 \in \mathbb{R}$. Zatem

201 / 388

Równanie autonomiczne

Przykład (kontynuacja...)

$$|y| = e^{\alpha x - C_1} = C_2 e^{\alpha x}, \quad C_2 > 0$$

Ostatecznie, usuwając znak wartości bezwzględnej oraz biorąc pod uwagę [5] dostajemy

$$y = C e^{\alpha x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

202 / 388

Równanie autonomiczne

Przykład

Równanie ze (2) jest szczególnym przypadkiem równania (4) dla $\alpha = \frac{\mu}{T}$.
Zatem jego ogólne rozwiązanie to

$$N(t) = Ce^{\frac{\mu}{T}t}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad [6]$$

203 / 388

Równanie autonomiczne

Przykład (kontynuacja...)

Jeśli dodatkowo przyjmujemy, że w chwili t_0 wielkość populacji to $N(t_0)$, to wstawienie do powyższej równości tego warunku da nam

$$C = N(t_0)e^{-\frac{\mu}{T}t_0}. \quad [7]$$

204 / 388

Równanie autonomiczne

Przykład (kontynuacja...)

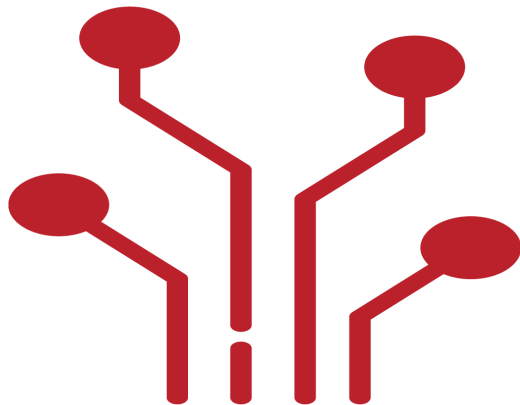
Łącząc formuły (6) i (7) mamy finalnie

$$N(t) = N(t_0)e^{\frac{\mu}{T}(t-t_0)}$$

czyli końcową formułę (2).

205 / 388

Równanie o rozdzielających się zmiennych



206 / 388

Równanie o rozdzielających się zmiennych

Jest to równanie postaci

$$y' = P(x)Q(y) \quad P, Q - \text{funkcje ciągłe}$$

Jeśli istnieje y_0 , dla którego $Q(y_0) = 0$, to dobrym rozwiązaniem jest funkcja stała

$$y = y_0$$

207 / 388

Równanie o rozdzielających się zmiennych

Pozostałe rozwiązania uzyskamy rozważając (przy założeniu $Q(y) \neq 0$)

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x) dx$$

208 / 388

Równanie o rozdzielających się zmiennych

Przykład

Rozważmy równanie

$$y \cdot y' + x = 0$$

jest to równanie o rozdzielających się zmiennych, gdyż może być przedstawione jako

$$y' = -x \cdot \frac{1}{y}$$

209 / 388

Równanie o rozdzielających się zmiennych

Przykład (kontynuacja...)

Oczywiście $\frac{1}{y}$ nigdy nie jest równe 0, zatem jedyne rozwiązania uzyskamy rozwiązując

$$\int y \, dy = - \int x \, dx$$
$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1 \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C_1, \quad C > 0,$$

Rozwiązanie ogólne jest więc rodziną okręgów o środku w $(0, 0)$.

210 / 388

Dziękuję za uwagę

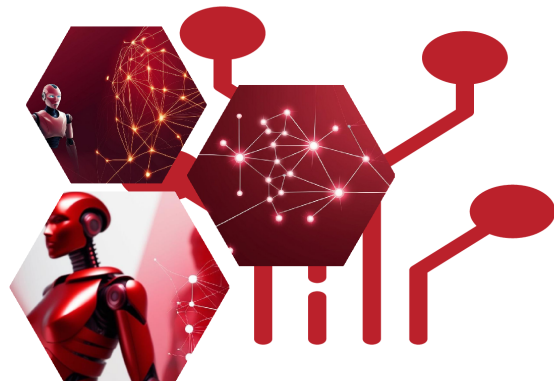
Równania różniczkowe zwyczajne (2)

dr Paweł Wlaź

Katedra Matematyki Stosowanej

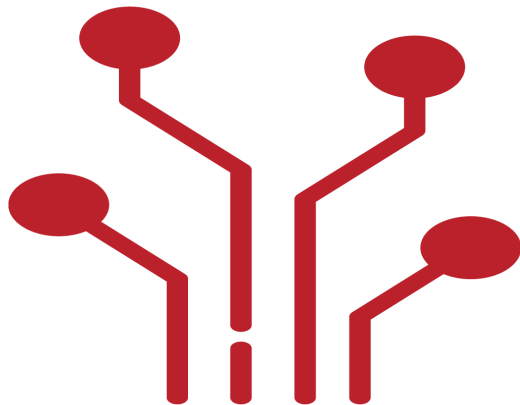
Plan wykładu

Równanie jednorodne
Równanie liniowe rzędu pierwszego



213 / 388

Równanie jednorodne



214 / 388

Równanie jednorodne

Jest to równanie postaci

$$y' = P \left(\frac{y}{x} \right), \quad P - \text{funkcja ciągła}$$

Wygodnie jest je rozwiązywać szukając najpierw funkcji $z(x)$, takiej, że

$$y(x) = z(x) \cdot x$$

215 / 388

Równanie jednorodne

Wtedy

$$y' = z' \cdot x + z$$

$$z' \cdot x + z = P(z)$$

uzyskane równanie ma rozdzielające się zmienne.

216 / 388

Równanie jednorodne

Przykład

Rozważmy równanie

$$y' = \frac{y}{t} + \frac{t}{y}$$

Po lewej stronie jest tylko pochodna, natomiast prawa zależy tylko od stosunku zmiennej zależnej do zmiennej niezależnej, zatem jest to równanie jednorodne.

217 / 388

Równanie jednorodne

Przykład (kontynuacja...)

Podstawiając

$$y = z \cdot t, \quad y' = z' \cdot t + z$$

otrzymujemy – po uproszczeniach – nowe równanie

$$z \cdot z' = \frac{1}{t}.$$

218 / 388

Równanie jednorodne

Przykład (kontynuacja...)

Ostatnie równanie jest równaniem o rozdzielających się zmiennych, które rozwiązujemy poprzednio opisanym sposobem otrzymując

$$z^2 = 2(\ln |t| + C)$$

zatem

$$z = \sqrt{2(\ln |t| + C)} \quad \text{lub} \quad z = -\sqrt{2(\ln |t| + C)}.$$

219 / 388

Równanie jednorodne

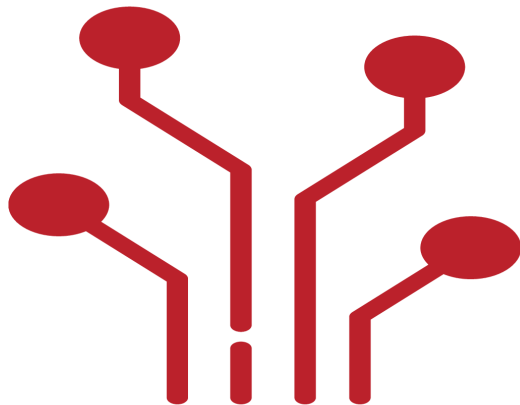
Przykład (kontynuacja...)

Ostatecznie więc

$$y = t\sqrt{2(\ln |t| + C)} \quad \text{lub} \quad y = -t\sqrt{2(\ln |t| + C)}, \quad \text{dla } C \in \mathbb{R}.$$

220 / 388

Równanie liniowe rzędu pierwszego



221 / 388

Równanie liniowe rzędu pierwszego

Jest to równanie postaci

$$y' = p(x)y + q(x), \quad p, q - \text{funkcje ciągłe.}$$

222 / 388

Równanie liniowe rzędu pierwszego

Jedną z metod rozwiązywania jest znalezienie ogólnego rozwiązania *równania liniowego jednorodnego* postaci

$$y' = p(x)y$$

To równanie ma rozdzielające się zmienne i w wyniku jego rozwiązania dostaniemy funkcję postaci

$$C \cdot y_1(x)$$

223 / 388

Równanie liniowe rzędu pierwszego

Następnie poszukujemy rozwiązania oryginalnego równania w postaci

$$y(x) = z(x) \cdot y_1(x)$$

Nowe równanie (ze zmienną niezależną x i szukaną funkcją z) jest równaniem o rozdzielających się zmiennych.

224 / 388

Równanie liniowe rzędu pierwszego

Przykład

Rozważmy równanie

$$y' = \frac{3y}{x} + x. \quad [8]$$

Jest to równanie liniowe.

225 / 388

Równanie liniowe rzędu pierwszego

Przykład (kontynuacja...)

1. Rozwiązanie równania liniowego jednorodnego

Równanie liniowe jednorodne

$$y' = \frac{3y}{x}$$

jest równaniem o rozdzielających się zmiennych, które rozwiązujemy omówioną poprzednio metodą, uzyskując $y = C \cdot x^3$.

226 / 388

Równanie liniowe rzędu pierwszego

Przykład (kontynuacja...)

2. *Uzmiennienie stałej* Rozwiązania oryginalnego równania [8] poszukujemy w postaci

$$y = z \cdot x^3, \quad [9]$$

gdzie z jest nieznaną funkcją.

227 / 388

Równanie liniowe rzędu pierwszego

Przykład (kontynuacja...)

Wstawiając (9) do (8) dostaniemy – po uproszczeniach – równanie

$$z' = \frac{1}{x^2}$$

zatem $z = -\frac{1}{x} + C$ i ostatecznie rozwiązaniem (8) jest $y = x^3 \cdot (C - \frac{1}{x})$,
 $C \in \mathbb{R}$.

228 / 388

Dziękuję za uwagę

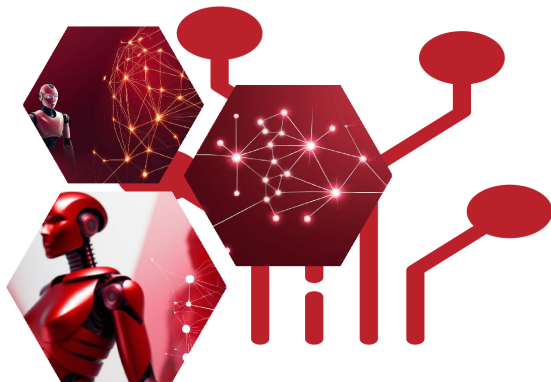
Równania różniczkowe zwyczajne (3)

dr Paweł Wlaź

Katedra Matematyki Stosowanej

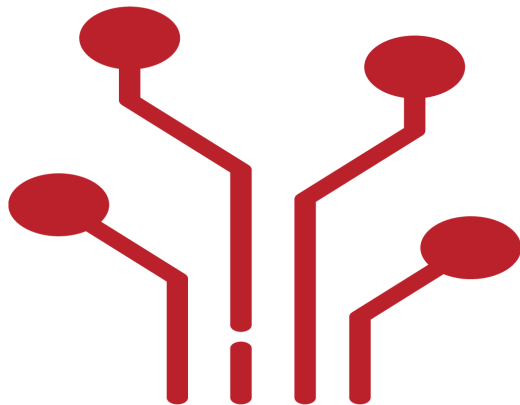
Plan wykładu

Równanie Bernoulliego
Zagadnienie jednoznaczności rozwiązania
Rodziny krzywych i równania różniczkowe
Równania różniczkowe wyższych rzędów
Równanie różniczkowe liniowe rzędu n



231 / 388

Równanie Bernoulliego



232 / 388

Równanie Bernoulliego

Jest to równanie postaci

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha, \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha \neq 1, \quad p, q - \text{funkcje ciągłe}$$

Przyjęcie $z(x) = y(x)^{1-\alpha}$ sprowadzi równanie do równania liniowego

233 / 388

Równanie Bernoulliego

Przykład

Rozważmy zagadnienie początkowe

$$y' - y \cos t = y^2 \cos t, \quad y(0) = 1.$$

Jest to równanie Bernoulliego. Zauważmy, że ze względu na warunek początkowy możemy odrzucić rozwiązanie $y = 0$, zatem podstawiając $z = y^{-1}$ i porządkując otrzymujemy równanie liniowe

234 / 388

Równanie Bernoulliego

Przykład (kontynuacja...)

$$z' + z \cos t = -\cos t. \quad [10]$$

To równanie rozwiązujemy klasyczną dla równań różniczkowych liniowych metodą.

Najpierw rozwiążemy jego wersję jednorodną

$$z' + z \cos t = 0$$

235 / 388

Równanie Bernoulliego

Przykład (kontynuacja...)

uzyskując rozwiązanie ogólne $z = Ce^{-\sin t}$, następnie rozwiązania równania (10) szukamy w postaci

$$z = u \cdot e^{-\sin t}$$

co po wstawieniu do (10) daje

$$u' = -\cos t e^{\sin t}.$$

236 / 388

Równanie Bernoulliego

Przykład (kontynuacja...)

Z ostatniej równości dostajemy $u = -e^{\sin t} + C$, co daje nam rozwiązanie ogólne (10) jako

$$z = Ce^{-\sin t} - 1, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Zatem ogólne rozwiązanie oryginalnego równania (pomijając $y = 0$) to

$$y = \frac{1}{Ce^{-\sin t} - 1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

237 / 388

Równanie Bernoulliego

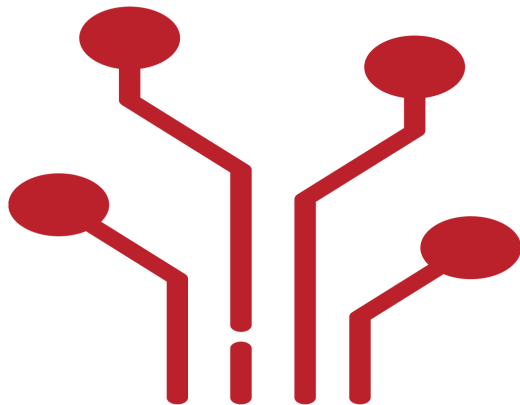
Przykład (kontynuacja...)

Uwzględniając $y(0) = 1$ wyliczamy $C = 2$, zatem rozwiązaniem zagadnienia początkowego jest

$$y = \frac{1}{2e^{-\sin t} - 1}.$$

238 / 388

Zagadnienie jednoznaczności rozwiązania



239 / 388

Zagadnienie jednoznaczności równania różniczkowego

Przykład

Rozważmy *zagadnienie początkowe*

$$y' = 2\sqrt{|y|}, \quad y(4) = 1. \quad (11)$$

Ma ono nieskończenie wiele rozwiązań.

240 / 388

Zagadnienie jednoznaczności równania różniczkowego

Przykład (kontynuacja...)

Rzeczywiście, łatwo sprawdzić, że jeśli pominiemy warunek początkowy, to każda z funkcji

$$y = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$y = (x - C)^2, \quad x > C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad \text{oraz}$$

$$y = -(x - C)^2, \quad x < C, \quad C \in \mathbb{R}$$

spełnia – dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ – równanie $y' = 2\sqrt{|y|}$.

241 / 388

Zagadnienie jednoznaczności równania różniczkowego

Przykład (kontynuacja...)

Jeśli dołączymy warunek początkowy, to rzecz jasna funkcja

$$y = (x - 3)^2, x > 3$$

jest poprawnym rozwiązaniem. Ale nie ona jedna, zwłaszcza, gdy nie postawi się ograniczeń co do dziedziny funkcji.

242 / 388

Zagadnienie jednoznaczności równania różniczkowego

Przykład (kontynuacja...)

Każda z funkcji

$$y = \begin{cases} -(x - a)^2, & \text{dla } x \in (-\infty, a), \\ 0, & \text{dla } x \in [a, 3), \\ (x - 3)^2, & \text{dla } x \in [3, \infty). \end{cases}$$

przy dowolnie ustalonej wartości $a < 3$ jest funkcją ciągłą i różniczkowalną spełniającą postawione zagadnienie początkowe.

243 / 388

Zagadnienie jednoznaczności równania różniczkowego

Twierdzenie

Zagadnienie początkowe

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

w którym funkcja f oraz jej pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial y}$ są określone i ciągłe na obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$, ma dokładnie jedno rozwiązanie dla dowolnego $(x_0, y_0) \in D$.

244 / 388

Zagadnienie jednoznaczności równania różniczkowego

Przykład

W przypadku przykładu z równaniem

$$y' = 2\sqrt{|y|}$$

pochodna o której mowa w twierdzeniu wynosi

$$\frac{1}{\sqrt{|y|}}.$$

245 / 388

Zagadnienie jednoznaczności równania różniczkowego

Przykład (kontynuacja...)

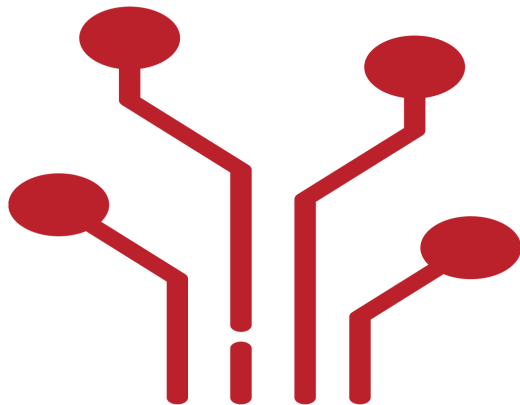
Zatem jednoznaczność uzyskamy ograniczając się do tych obszarów w których $y \neq 0$. Na przykład w przedziale $x \in (3, \infty)$ funkcja

$$y = (x - 3)^2$$

jest jednoznacznym rozwiązaniem zagadnienia [11].

246 / 388

Rodziny krzywych i równania różniczkowe



247 / 388

Rodzina krzywych

Definicja

Jeżeli równanie

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

dla dowolnej wartości C z pewnego przedziału określa krzywą, to równanie to nazywane jest *równaniem rodziny krzywych*.

248 / 388

Rodzina krzywych

Przykład

$$yx - C = 0, \quad C > 0,$$

jest rodziną hiperbol $y = \frac{C}{x}$ położonych $[C > 0]$ w I i III ćwiartce układu współrzędnych.

249 / 388

Rodzina krzywych

Przykład

$$\frac{x^2}{b^2} + y^2 - 1 = 0, \quad b > 0,$$

jest rodziną elips o środku w $(0, 0)$, osiach równoległych do osi układu współrzędnych oraz o długości półosi pionowej 1.

250 / 388

Rodzina krzywych

Przykład

$$x + y - C = 0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

jest rodziną wszystkich prostych równoległych do prostej $y = -x$.

251 / 388

Rodzina krzywych

Naturalną postacią rodziny krzywych jest często równanie różniczkowe.

Po zróżniczkowaniu równania rodziny, otrzymujemy dwa związki w których występują x, y, y', C . Wyliczając z jednego z nich C i wstawiając do drugiego otrzymamy jeden związek w którym występować będą x, y, y' – a więc równanie różniczkowe. W szczególnym przypadku (jak na poprzednim slajdzie) C może nawet zniknąć po wykonaniu różniczkowania.

252 / 388

Równanie różniczkowe rodziny krzywych

Przykład

Po zróżniczkowaniu równania

$$x + y = C$$

otrzymujemy równanie

$$y' = -1$$

które oczywiście określa wszystkie proste równoległe do prostej $y = -x$.

253 / 388

Rodzina krzywych ortogonalnych

Definicja

Rodziny krzywych

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

oraz

$$\Psi(x, y, D) = 0$$

są *ortogonalne*, jeżeli w każdym punkcie przecięcia dwu krzywych z różnych rodzin, krzywe te tworzą między sobą kąt prosty.

254 / 388

Rodzina krzywych ortogonalnych

Uwaga

Kąt przecięcia się krzywych rozumiany jest jako kąt pomiędzy prostymi st stycznymi do poszczególnych krzywych w punkcie przecięcia.

255 / 388

Rodzina krzywych ortogonalnych

Twierdzenie

Jeżeli

$$F(x, y, y') = 0$$

jest równaniem różniczkowym rodziny krzywych, to równanie różniczkowe rodziny krzywych ortogonalnych ma postać

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right)$$

256 / 388

Rodzina krzywych ortogonalnych

Uwaga

Zależność ta wynika ze znanej ze szkoły średniej własności prostych prostopadłych: iloczyn ich współczynników kierunkowych wynosi -1 .

257 / 388

Rodzina krzywych ortogonalnych – przykład

Przykład

Rozważmy rodzinę okręgów o środku w $(0, 0)$:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad r > 0$$

jej równanie różniczkowe to

$$x + y \cdot y' = 0.$$

258 / 388

Rodzina krzywych ortogonalnych – przykład

Przykład (kontynuacja...)

Wynika z tego, że rodzina ortogonalna powinna spełniać równanie

$$x - \frac{y}{y'} = 0.$$

Rozwiązaniem ogólnym tego równania jest

$$y = C \cdot x, \quad C \in \mathbb{R}$$

259 / 388

Rodzina krzywych ortogonalnych – przykład

Przykład (kontynuacja...)

Zatem rodziną krzywych ortogonalnych jest w tym wypadku zbiór wszystkich prostych przechodzących przez początek układu współrzędnych (prostej $x = 0$ nie da się oczywiście przedstawić jako funkcji zmiennej niezależnej x).

260 / 388

Rodzina krzywych ortogonalnych – przykład

Przykład

Rozważmy rodzinę elips o środku w $(0, 0)$, osiach symetrii pokrywających się z osiami układu współrzędnych i o stosunku długości półosi pionowej do poziomej wynoszącym $\frac{3}{4}$. Można tę rodzinę przedstawić jako

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = C, \quad C > 0.$$

261 / 388

Rodzina krzywych ortogonalnych – przykład

Przykład (kontynuacja...)

Rodzina ta spełnia więc równanie różniczkowe

$$\frac{x}{8} + \frac{2yy'}{9} = 0,$$

zatem rodzina ortogonalna spełnia równanie

$$\frac{x}{8} - \frac{2y}{9y'} = 0.$$

262 / 388

Rodzina krzywych ortogonalnych – przykład

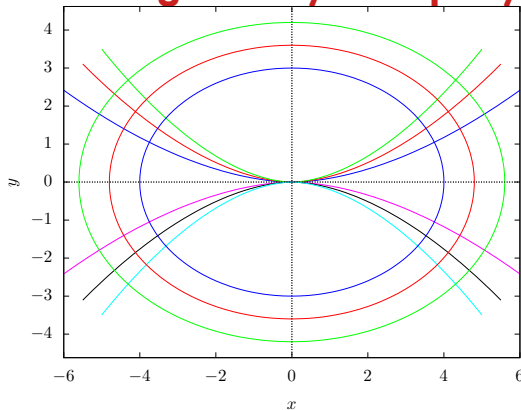
Przykład (kontynuacja...)

Rozwiązaniem tego ostatniego równania jest

$$y = C \cdot |x|^{\frac{16}{9}}, \quad C \in R$$

263 / 388

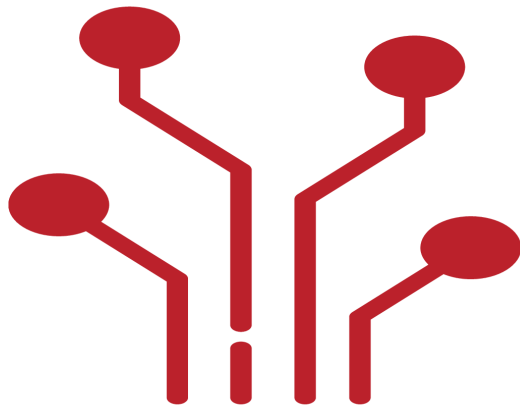
Rodzina krzywych ortogonalnych – przykład



264 / 388

Ilustracja kilku krzywych z obu rodzin przeanalizowanego przykładu

Równania różniczkowe wyższych rzędów



265 / 388

Równania różniczkowe wyższych rzędów

W wielu zagadnieniach występuje potrzeba rozważenia równań różniczkowych wyższego rzędu, tzn równań

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

bądź układów takich równań. W niektórych przypadkach –jak równania liniowe o stałych współczynnikach – istnieją jasne algorytmy rozwiązywania. W niektórych przypadkach można obniżyć rząd równania. Na ogół są one trudne do analitycznego rozwiązania – pozostają metody numeryczne.

266 / 388

Równanie $y^{(n)} = f(x)$

Rozwiązanie polega na całkowaniu [które obniża rząd równania o 1]. Po n -krotnym całkowaniu otrzymujemy równanie w którym nie występuje pochodna, ale występuje n stałych dowolnych. Dokładniej będzie ono postaci

$$y(x) = \psi(x) + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots C_n$$

267 / 388

Równanie $y^{(n)} = f(x)$

Przykład

Rozważmy równanie $y''' = \sin 2x$.

Po jednokrotnym całkowaniu: $y'' = -\frac{1}{2} \cos 2x + C_1$.

Następne całkowanie: $y' = -\frac{1}{4} \sin 2x + C_1 x + C_2$.

Następne całkowanie: $y = -\frac{1}{8} \cos 2x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$.

268 / 388

Równanie $y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n-1)})$

W równaniu tym podstawienie $z = y^{(k)}$ sprowadza zagadnienie do równania rzędu $(n - k)$. Po jego rozwiązaniu otrzymamy równanie poprzednio rozważanego typu [dla rzędu k]

269 / 388

Równanie $y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n-1)})$

Przykład

W równaniu $y''' + y'' - x^5 = 0$ obniżamy jego rząd poprzez podstawienie

$$z = y''.$$

Wtedy mamy

$$z' + z - x^5 = 0.$$

270 / 388

Równanie $y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n-1)})$

Przykład (kontynuacja...)

To ostatnie równanie możemy rozwiązać znanymi metodami dla równań rzędu pierwszego (równanie liniowe). W wyniku otrzymamy

$$z = x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120 + Ce^{-x}.$$

271 / 388

Równanie $y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n-1)})$

Przykład (kontynuacja...)

Następnie rozwiązujemy równanie

$$y'' = x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120 + C_1 e^{-x}.$$

czyli równanie takiego typu jak na slajdzie 267.

272 / 388

Równanie $y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n-1)})$

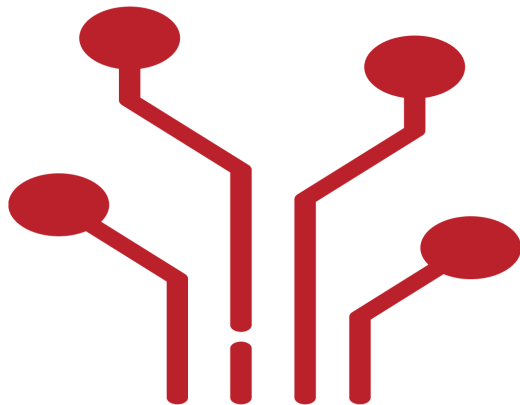
Przykład (kontynuacja...)

Ostatecznym wynikiem jest

$$y = \frac{1}{42}x^7 - \frac{1}{6}x^6 + x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + C_1e^{-x} + C_2x + C_3$$
$$C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

273 / 388

Równanie różniczkowe liniowe rzędu n



274 / 388

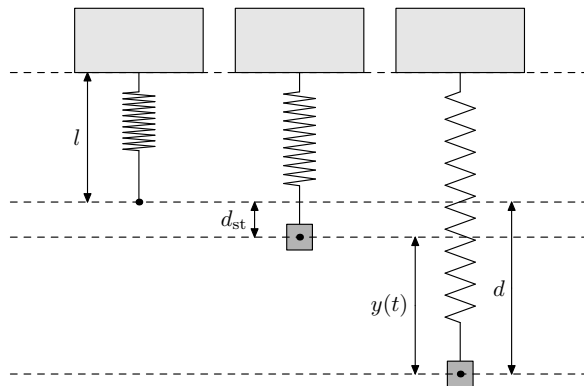
Równanie różniczkowe liniowe rzędu n

Przykład

Rozważmy odważnik o masie m zawieszony na sprężynie. Długość sprężyny bez obciążenia wynosi l . Pomijając masę sprężyny i opór powietrza wyznacz położenie odważnika jako funkcję czasu po wychyleniu go od położenia równowagi.

275 / 388

Równanie różniczkowe liniowe rzędu n



276 / 388

Ilustracja założeń równania zmiany stanu układu ze sprężyną i odważnikiem

Równanie różniczkowe liniowe rzędu n

Przykład powyższy prowadzi do równania postaci

$$y'' + k^2 y = 0$$

Jego rozwiązaniem jest funkcja

$$y(t) = A \sin(kt + \varphi)$$

A – amplituda

φ – faza początkowa

Równanie to jest przykładem równania liniowego rzędu drugiego (o stałych współczynnikach, jednorodnego)

277 / 388

Równanie różniczkowe liniowe rzędu n

Definicja

Równaniem różniczkowym liniowym rzędu n nazywamy równanie postaci

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = h(x)$$

278 / 388

Równanie różniczkowe liniowe rzędu n

Twierdzenie

Jeżeli wszystkie znane funkcje występujące w powyższej definicji są ciągłe w przedziale (a, b) to dla każdego układu wartości

$$(x_0, f_0, f_1, \dots, f_{n-1}) \in (a, b) \times \mathbb{R}^n$$

zagadnienie początkowe

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = h(x)$$

$$y(x_0) = f_0, y'(x_0) = f_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = f_{n-1}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie, określone w przedziale (a, b) .

279 / 388

Równanie różniczkowe liniowe rzędu n

Przykład

Dla równania położenia odważnika $y'' + k^2 y = 0$ [slajd 277] przez wstawienie sprawdzamy, że

$$y = A \sin(kt + \varphi) \quad [12]$$

jest rozwiązaniem.

Narzucenie warunków początkowych na wartość $y(t_0)$ oraz $y'(t_0)$ narzuci warunki prowadzące do wyliczenia stałych A, φ , więc ze względu na twierdzenie z poprzedniego slajdu – innych rozwiązań niż [12] nie ma.

280 / 388

Dziękuję za uwagę

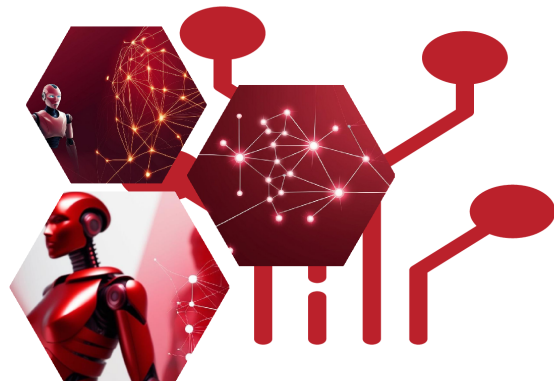
Numeryczne metody rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych

dr Paweł Wlaź

Katedra Matematyki Stosowanej

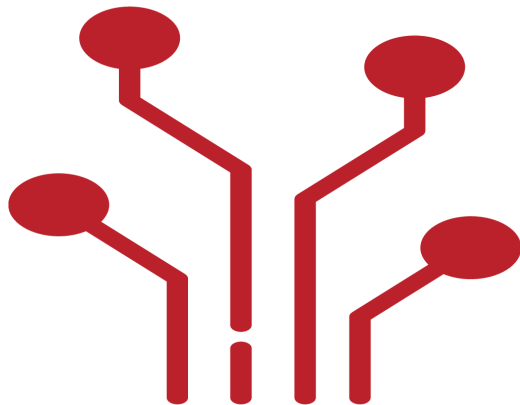
Plan wykładu

Potrzeba obliczeń numerycznych przy
rozwiązaniu równań różniczkowych
Metoda Eulera
Metoda Heuna



283 / 388

**Potrzeba obliczeń
numerycznych przy
rozwiązywaniu równań
różniczkowych**



284 / 388

Potrzeba obliczeń numerycznych przy rozwiązywaniu równań różniczkowych

Potrzeba przybliżonego rozwiązywania równań może wynikać z

- zawiętego związku pomiędzy pochodnymi, funkcją i zmienną niezależną
- zbyt trudnych całek, które pojawiłyby się w przypadku pokonania innych trudności.

Problemy pojawiające się przy rozwiązywaniu równań różniczkowych daleko wykraczają poza problemy w samym tylko obliczaniu całek oznaczonych, dlatego zagadnieniom tym poświęca się specyficzne metod numeryczne.

285 / 388

Potrzeba obliczeń numerycznych przy rozwiązywaniu równań różniczkowych

Przykład

Rozważmy równanie

$$y' = \frac{y \sin(y + x)}{(\sqrt{|y|} + 1)^2}.$$

Nie jesteśmy w stanie rozwikłać tego związku, tym niemniej, dla każdego konkretnego x i y możemy obliczyć pochodną y' .

286 / 388

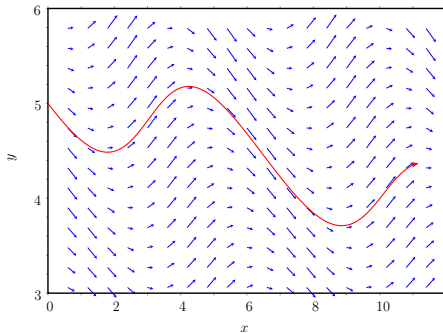
Potrzeba obliczeń numerycznych przy rozwiązywaniu równań różniczkowych

Przykład (kontynuacja...)

To daje możliwość przybliżonego obliczenia wartości y dla nieco powiększonego $x + h$, przy bardzo małym h . W ten sposób można „rozbudować” rozwiązanie. Rozwiązaniem przybliżonym będzie po prostu układ przybliżeń wartości y dla $x = x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots$. Jeśli użyjemy rozsądnej metody do wyliczania przybliżonych wartości oraz rozsądnie małych wartości h , to uzyskane obliczenia mogą być wartościowe.

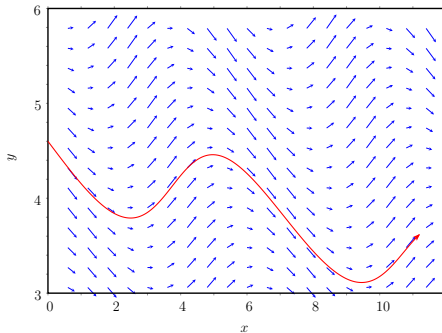
287 / 388

Potrzeba obliczeń numerycznych przy rozwiązywaniu równań różniczkowych



Pole wartości pochodnych dla równania z przykładu, $y(0) = 5$

Potrzeba obliczeń numerycznych przy rozwiązywaniu równań różniczkowych



Pole wartości pochodnych dla równania z przykładu, $y(0) = 4.6$

Założenia

W wykładzie tym przyjmiemy, że równanie dane jest poprzez

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Ponadto będziemy zakładali, że w rozpatrywanym obszarze spełnione są – omówione wcześniej – warunki jednoznaczności rozwiązania, oraz, że interesuje nas przybliżenie wartości szukanej funkcji y w punktach $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + nh$, dla pewnego $h > 0$.

290 / 388

Nazwy zmiennych

Często zmienną niezależną równania różniczkowego jest czas, dlatego w wielu opracowaniach można się spotkać z oznaczeniem t dla zmiennej niezależnej. Wtedy zmienna zależna zwykle oznaczona jest poprzez x . Zatem ustalenia z poprzedniego slajdu przyjęły by postać

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

szukamy wartości funkcji x w punktach $t_0, t_0 + h, t_0 + 2h, \dots, t_0 + nh$, dla pewnego $h > 0$.

291 / 388

Błąd lokalny i błąd globalny

W metodach tego rodzaju wyróżnia się kilka rodzajów błędów. Skoncentrujemy się na dwóch z nich.

Definicja

Błąd lokalny metody przybliżonej rozwiązywania równania różniczkowego zwyczajnego to różnica między obliczonym w danym kroku metody przybliżeniem $x(t + h)$ a dokładnym rozwiązaniem równania różniczkowego, które przechodziłoby przez punkt $(t, x(t))$.

292 / 388

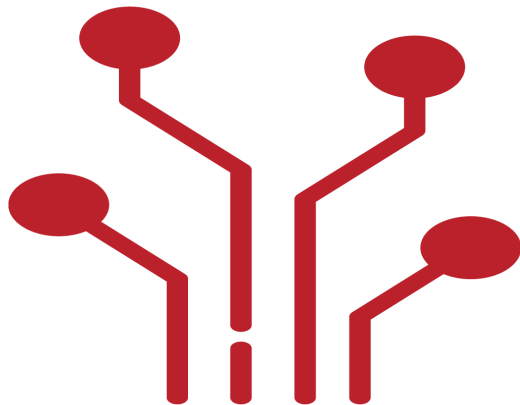
Błąd lokalny i błąd globalny

Definicja

Błąd globalny metody przybliżonej rozwiązywania równania różniczkowego zwyczajnego w punkcie $t_0 + i \cdot h$ to różnica między obliczonym przybliżeniem wartości $x(t_0 + ih)$ a dokładnym rozwiązaniem równania różniczkowego w punkcie $t = t_0 + ih$, które przechodziłoby przez punkt początkowy (t_0, x_0) .

293 / 388

Metoda Eulera



294 / 388

Metoda Eulera

Metoda ta bazuje na odrzuceniu we wzorze Taylora wyrazów z pochodnymi rzędu wyższego niż jeden, czyli na przybliżeniu:

$$x(t + h) \approx x(t) + h \cdot x'$$

gdzie $x' = f(t, x)$.

295 / 388

Metoda Eulera

Zatem algorytm wyznaczający wartości dla $t_0 + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$ można opisać następująco

dla $i = 1, 2, \dots, n$:

$$t = t_0 + (i - 1)h$$

$$x(t + h) = x(t) + f(t, x(t)) \cdot h$$

296 / 388

Metoda Eulera – przykład

Przykład

Rozważmy równanie

$$x' = x - t, \quad x(0) = 3$$

Przyjmijmy $n = 8$, $h = 0.25$. Zatem rezultatem obliczeń będzie ciąg wartości

$$x(0.0), x(0.25), x(0.5), x(0.75), x(1.0), x(1.25), x(1.5), x(1.75), x(2.0).$$

297 / 388

Metoda Eulera – przykład

Przykład (kontynuacja...)

Rzecz jasna możemy łatwo znaleźć rozwiązanie analityczne zadania (bo to równanie liniowe); to po to, by na tym przykładzie zaobserwować jakość rozwiązania.

Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego to

$$x(t) = Ce^t + t + 1, \quad C \in \mathbb{R}$$

a po uwzględnieniu warunku $x(0) = 3$ mamy $x(t) = 2e^t + t + 1$.

298 / 388

Metoda Eulera – przykład

Przykład (kontynuacja...)

Poniższa tabela prezentuje wynik działania metody Eulera, porównanie jej z dokładnym rozwiązaniem oraz wyliczenie błędów lokalnych i globalnych.

299 / 388

Metoda Eulera – przykład

Przykład (kontynuacja...)

t	met. Eulera	błąd lok.	rozw. dokł.	błąd glob.
0.25	3.75	-0.068 051	3.818 051	-0.068 051
0.5	4.625	-0.085 064	4.797 443	-0.172 443
0.75	5.656 25	-0.106 329	5.984	-0.327 75
1.0	6.882 812	-0.132 912	7.436 564	-0.553 751
1.25	8.353 516	-0.166 14	9.230 686	-0.877 17
1.5	10.129 395	-0.207 675	11.463 378	-1.333 984
1.75	12.286 743	-0.259 593	14.259 205	-1.972 462
2.0	14.920 929	-0.324 492	17.778 112	-2.857 183

300 / 388

Metoda Eulera – przykład

Przykład (kontynuacja...)

Jak widać błędy globalne kumulują się i są względnie duże. Wynika to przede wszystkim z bardzo dużego przyjętego kroku $h = 0.25$ – tak duża wartość spowodowana jest względami praktycznymi (obliczenia na tablicy przy użyciu kalkulatora). Programując w dowolnym języku programowania ogólnego zastosowania nie mamy takich ograniczeń, poniżej przytaczam analogiczną tabelę przy przyjęciu $n = 80$ (kilka wybranych wierszy)

301 / 388

Metoda Eulera – przykład

Przykład (kontynuacja...)

t	met. Eulera	błąd lok.	rozw. dokł.	błąd glob.
0.025	3.075	-0.000 63	3.075 63	-0.000 63
0.05	3.151 25	-0.000 646	3.152 542	-0.001 292
0.075	3.228 781	-0.000 662	3.230 768	-0.001 987
...	...	...	...	...
1.95	16.674 341	-0.004 219	17.007 375	-0.333 034
1.975	17.042 449	-0.004 325	17.388 239	-0.345 79
2.0	17.419 136	-0.004 433	17.778 112	-0.358 977

302 / 388

Metoda Eulera – oszacowanie błędów

Twierdzenie

Błąd lokalny metody Eulera wynosi $O(h^2)$ natomiast **błąd globalny** to $O(h)$.

303 / 388

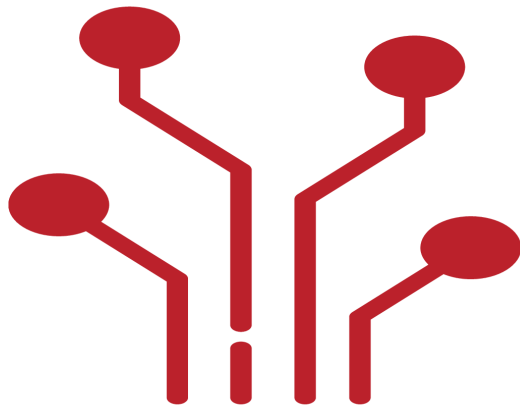
Metoda Eulera – oszacowanie błędów

Uwaga

W rozważanym kontekście symbol $O(h^k)$ oznacza funkcję, która jest co do wartości bezwzględnej ograniczona przez $C \cdot h^k$ dla pewnej stałej $C > 0$ oraz dostatecznie małych wartości h . Jeśli więc na przykład błąd lokalny jest $O(h^2)$ to spodziewamy się, że dwukrotne zmniejszenie h spowoduje co najmniej czterokrotne zmniejszenie błędu lokalnego.

304 / 388

Metoda Heuna



305 / 388

Metoda Heuna

Metoda Heuna wyprowadzana jest na podstawie odrzucenia we wzorze Taylora wyrazów z pochodnymi rzędu wyższego niż dwa. Tak naprawdę otrzymuje się w ten sposób wiele tzw. metod Rungego–Kutty rzędu drugiego, metoda Heuna jest jedną z nich.

Obliczenie $x(h + t)$ opiera się na formule:

$$F_1 = hf(t, x)$$

$$F_2 = hf(t + h, x + F_1)$$

$$x(t + h) \approx x(t) + \frac{1}{2} \cdot (F_1 + F_2)$$

306 / 388

Metoda Heuna

Zatem algorytm wyznaczający wartości dla $t_0 + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$ można opisać następująco

dla $i = 1, 2, \dots, n$:

$$t = t_0 + (i - 1)h$$

$$F_1 = hf(t, x)$$

$$F_2 = hf(t + h, x + F_1)$$

$$x(t + h) = x(t) + 0.5 \cdot (F_1 + F_2).$$

307 / 388

Metoda Heuna – przykład

Przykład

Rozważmy ten sam przykład co przy okazji metody Eulera, czyli przykład ze slajdu 297. Dla przedziału $[0, 2]$, $n = 8$ oraz $h = 0.25$ obliczenia wskazują na znacznie lepszą dokładność niż w przypadku metody Eulera i zaprezentowane są w poniższej tabeli.

308 / 388

Metoda Heuna – przykład

Przykład (kontynuacja...)

t	met. Heuna	błąd lok.	rozw. dokł.	błąd glob.
0.25	3.8125	−0.005 551	3.818 051	−0.005 551
0.5	4.783 203	−0.007 112	4.797 443	−0.014 239
0.75	5.956 604	−0.009 112	5.984	−0.027 396
1.0	7.389 711	−0.011 675	7.436 564	−0.046 852
1.25	9.155 568	−0.014 959	9.230 686	−0.075 118
1.5	11.347 759	−0.019 166	11.463 378	−0.115 62
1.75	14.086 191	−0.024 556	14.259 205	−0.173 015
2.0	17.524 494	−0.031 463	17.778 112	−0.253 618

309 / 388

Metoda Eulera – przykład

Przykład (kontynuacja...)

Jeszcze bardziej imponujący wynik uzyska się przyjmując mniejsze $h = 0.025$, czyli $n = 80$. Fragment tabeli na następnym slajdzie. Wszystkie obliczenia są wykonywane możliwie dokładnie (na 64 bitowych liczbach rzeczywistych) a końcowe wyniki zaprezentowane jako zaokrąglone do 6 cyfr po kropce.

310 / 388

Metoda Heuna – przykład

Przykład (kontynuacja...)

t	met. Heuna	błąd lok.	rozw. dokł.	błąd glob.
0.025	3.075 625	$-5 \cdot 10^{-6}$	3.075 63	$-5 \cdot 10^{-6}$
0.05	3.152 531	$-5 \cdot 10^{-6}$	3.152 542	$-1.1 \cdot 10^{-5}$
0.075	3.230 752	$-6 \cdot 10^{-6}$	3.230 768	$-1.7 \cdot 10^{-5}$
...	...	...	...	...
1.95	17.004 573	$-3.6 \cdot 10^{-5}$	17.007 375	-0.002 802
1.975	17.385 329	$-3.7 \cdot 10^{-5}$	17.388 239	-0.002 91
2.0	17.775 091	$-3.8 \cdot 10^{-5}$	17.778 112	-0.003 021

311 / 388

Metoda Heuna – oszacowanie błędów

Twierdzenie

Błąd lokalny metody Heuna wynosi $O(h^3)$ natomiast **błąd globalny** to $O(h^2)$.

312 / 388

Dziękuję za uwagę

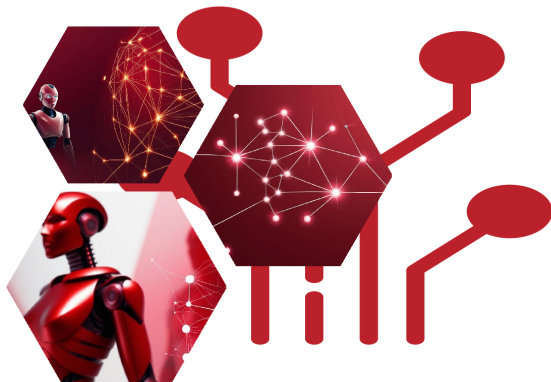
Macierze i działania na macierzach

dr Paweł Wlaź

Katedra Matematyki Stosowanej

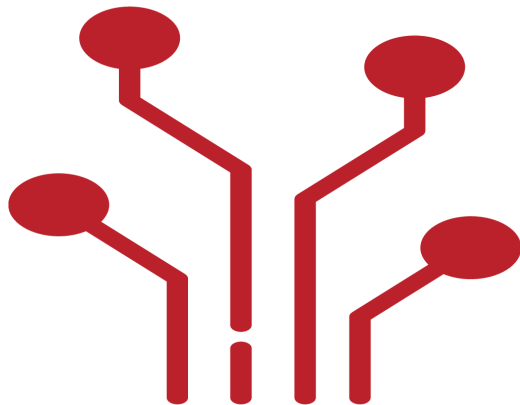
Plan wykładu

Pojęcie macierzy
Rodzaje macierzy
Działania na macierzach



315 / 388

Pojęcie macierzy



316 / 388

Definicja macierzy

Definicja

Macierzq wymiaru $m \times n$, gdzie $m \in \mathbb{N}$ oraz $n \in \mathbb{N}$, nazywamy prostokątną tablicę złożoną z $m \cdot n$ liczb rzeczywistych ustawionych w m wierszach i n kolumnach.

317 / 388

Definicja macierzy

- Element macierzy A stojący w i -tym wierszu oraz w j -tej kolumnie oznaczamy symbolem a_{ij} .
- Macierze A i B są równe, gdy mają takie same wymiary $m \times n$ oraz $a_{ij} = b_{ij}$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ oraz $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

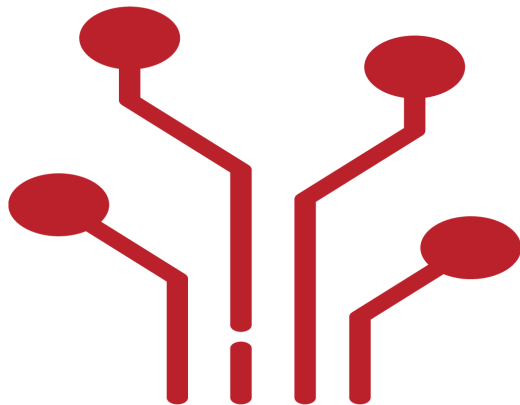
318 / 388

Graficzny zapis macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

319 / 388

Rodzaje macierzy



320 / 388

Rodzaje macierzy

- **Macierz zerowa** wymiaru $m \times n$ jest to macierz, której wszystkie elementy są równe 0; oznaczamy ją symbolem $0_{m \times n}$ lub 0, gdy znamy jej wymiar.
- **Macierz kwadratowa** stopnia n jest to macierz wymiaru $n \times n$; *elementy $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ macierzy kwadratowej tworzą jej główną przekątną*

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \boxed{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

321 / 388

Rodzaje macierzy

- **Macierz trójkątna dolna** jest to macierz kwadratowa stopnia $n \geq 2$, której wszystkie elementy stojące nad główną przekątną są równe 0.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

322 / 388

Rodzaje macierzy

- **Macierz trójkątna górna** jest to macierz kwadratowa stopnia $n \geq 2$, której wszystkie elementy stojące pod główną przekątną są równe 0.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

323 / 388

Rodzaje macierzy

- **Macierz diagonalna** jest to macierz kwadratowa stopnia n , której wszystkie elementy nie stojące na głównej przekątnej są równe 0.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

324 / 388

Rodzaje macierzy

- **Macierz jednostkowa** jest to macierz diagonalna stopnia n , której wszystkie elementy stojące na głównej przekątnej są równe 1; macierz jednostkową stopnia n oznaczamy symbolem I_n .

$$I_n \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

325 / 388

Macierz transponowana

Definicja

Macierz transponowaną do macierzy $A = [a_{ij}]$ wymiaru $m \times n$ nazywamy macierz $B = [b_{ij}]$ wymiaru $n \times m$, której elementy określone są wzorem

$$b_{ij} = a_{ji}$$

dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ oraz $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

326 / 388

Macierz transponowaną do macierzy A oznaczamy symbolem A^T .

Macierz transponowana

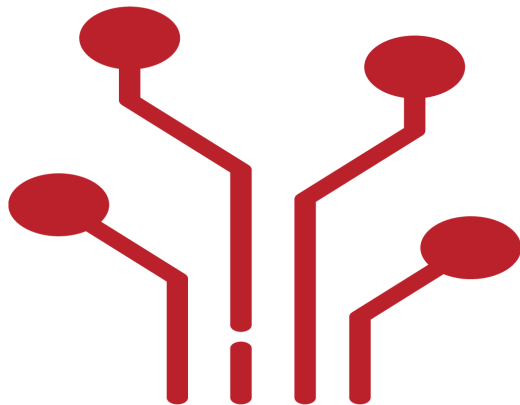
Przykład

Transponowanie jest w istocie zamianą wierszy z kolumnami (na przykład drugi wiersz po transponowaniu staje się drugą kolumną), zatem

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5.5 \\ 1.2 & 8 & -3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 1.2 \\ 2 & 8 \\ 5.5 & -3 \end{bmatrix}.$$

327 / 388

Działania na macierzach



328 / 388

Dodawanie macierzy

Definicja

Niech $A = [a_{ij}]$ oraz $B = [b_{ij}]$ będą macierzami wymiaru $m \times n$. **Sumą macierzy** A i B nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$ wymiaru $m \times n$, której elementy określone są wzorem

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Piszemy $C = A + B$.

Dodawanie macierzy

Przykład

Korzystając z powyższego określenia możemy zapisać na przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 7 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3.5 & 3 & 1 & 3 \\ -7 & -4.2 & 6 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6.5 & -4 & 3 & 5 \\ -5 & -8.2 & 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

330 / 388

Odejmowanie macierzy

Definicja

Niech $A = [a_{ij}]$ oraz $B = [b_{ij}]$ będą macierzami wymiaru $m \times n$. **Różnicą macierzy** A i B nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$ wymiaru $m \times n$, której elementy określone są wzorem

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}.$$

Piszemy $C = A - B$.

Odejmowanie macierzy

Przykład

Korzystając z powyższego określenia możemy zapisać na przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 7 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3.5 & 3 & 1 & 3 \\ -7 & -4.2 & 6 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 & -10 & 1 & -1 \\ 9 & 0.2 & -5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

332 / 388

Mnożenie macierzy przez liczbę

Definicja

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą wymiaru $m \times n$ i niech α będzie liczbą rzeczywistą. **Iloczynem macierzy A przez liczbę α** nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$ wymiaru $m \times n$, której elementy określone są wzorem

$$c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$$

dla $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ oraz $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Piszemy $C = \alpha \cdot A$ lub $C = \alpha A$.

Mnożenie macierzy przez liczbę

Przykład

Korzystając z powyższego określenia możemy zapisać na przykład

$$5 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 10 & -20 \end{bmatrix}.$$

334 / 388

Iloczyn macierzy

Definicja

Niech macierz $A = [a_{ij}]$ ma wymiar $m \times n$, a macierz $B = [b_{ij}]$ ma wymiar $n \times k$. **Iloczynem macierzy** A i B nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$ wymiaru $m \times k$, której elementy określone są wzorem

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

dla $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ oraz $j \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Piszemy $C = AB$.

Iloczyn macierzy

Przykład

Korzystając z powyższego określenia możemy zapisać na przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -5 & 10 \\ -4 & 30 & 10 \end{bmatrix}.$$

336 / 388

Iloczyn macierzy

Uwaga

Mnożenie macierzy nie jest przemienne, co oznacza, że sytuacja w której $AB = BA$ jest możliwa, ale należy to traktować jako coś co wymaga szczególnego układu liczb; na ogół jeśli da się obliczyć AB to BA nie jest możliwe do obliczenia (wymiarzy się nie zgadzają) lub BA istnieje, ale $BA \neq AB$. Oczywiście równość może się zdarzyć, choćby w sytuacji gdy jedna z tych macierzy jest zerowa.

337 / 388

Działania macierzowe

Dodawanie oczywiście jest przemienne. Wiele własności operatorów „+” oraz „-” oraz „·” znanych z liczb rzeczywistych pasuje także do działań macierzowych. Dochodzą także „nowe”, typowe dla macierzy, na przykład związane z transponowaniem.

338 / 388

Działania macierzowe

Zatem dla dowolnych macierzy A, B, C oraz dowolnych liczb rzeczywistych α, β :

- $A + B = B + A$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A, \quad \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B,$
- $(A + B)C = AC + BC,$
- $C(A + B) = CA + CB,$
- $(A + B)^T = A^T + B^T, \quad (\alpha A)^T = \alpha A^T$
- $(AB)^T = B^T A^T,$

w tym sensie, że jeśli istnieje lewa strona to także istnieje prawa oraz są sobie równe.

339 / 388

Dziękuję za uwagę

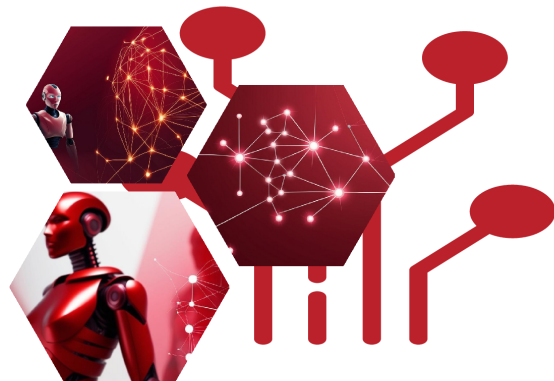
Odwracanie macierzy, wyznaczniki, układy równań

dr Paweł Wlaź

Katedra Matematyki Stosowanej

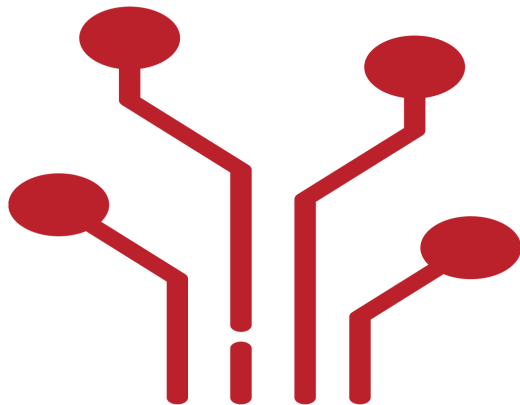
Plan wykładu

Wyznacznik macierzy
Macierz odwrotna
Układy równań liniowych
Wzory Cramera
Eliminacja Gaussa–Jordana
Eliminacja Gaussa–Jordana w odwracaniu
macierzy



342 / 388

Wyznacznik macierzy



343 / 388

Określenie wyznacznika

Definicja

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]$ stopnia n nazywamy liczbę rzeczywistą $\det A$, która określona jest wzorem rekurencyjnym:

$$\det A = \begin{cases} a_{11} & \text{gdy } n = 1, \\ a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} & \text{gdy } n > 1 \end{cases}$$

gdzie A_{ij} oznacza pomnożony przez $(-1)^{i+j}$ wyznacznik macierzy otrzymanej z macierzy A przez usunięcie i -tego wiersza oraz j -tej kolumny.

344 / 388

Określenie wyznacznika

Uwaga

W przypadku gdy wyrazy macierzy podawane są jawnie, wyznacznik z takiej macierzy oznaczany jest poprzez użycie nawiasów prostych (jak dla wartości bezwzględnej), czyli zamiast pisać $\det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}$ piszemy raczej $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & -12 \end{vmatrix}$

345 / 388

Definicja wyznacznika

Przykład

Wprost z określonej na slajdzie 344 definicji możemy obliczyć

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & -12 \end{vmatrix} = 3(-1)^{1+1}(-12) + 5(-1)^{1+2}8 = -76.$$

Do obliczania wyznaczników stopnia 2 oraz 3 są wyprowadzone i podane konkretne formuły, uwalniające nas od odwoływania się za każdym razem do definicji wyznacznika.

346 / 388

Dopełnienie algebraiczne

Aby wygodnie opisywać własności wyznaczników, konstrukcję macierzy odwrotnej i podobnych zagadnień, wygodnie jest używać pojęcia **dopełnienia algebraicznego**, które (oznaczane jako A_{ij}) tak naprawdę użyte zostało w definicji wyznacznika.

Dopełnienie algebraiczne jest wyznacznikiem z specjalnie utworzonej macierzy, dodatkowo ewentualnie ze zmienionym znakiem. Nie jest to więc istotnie różne pojęcie od pojęcia wyznacznika, a jedynie udogodnienie notacyjne, które precyzujemy w następnym slajdzie.

347 / 388

Dopełnienie algebraiczne

Definicja

Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy A kwadratowej stopnia $n > 1$ nazywamy liczbę

$$A_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{i+j} M_{ij},$$

gdzie M_{ij} oznacza wyznacznik macierzy otrzymanej poprzez usunięcie i -tego wiersza oraz j -tej kolumny macierzy A .

348 / 388

Obliczanie wyznaczników stopnia drugiego i trzeciego

Obliczanie wyznacznika stopnia drugiego:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Obliczanie wyznacznika stopnia trzeciego (reguła Sarrusa):

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

349 / 388

Rozwinięcie Laplace'a wyznacznika

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geq 2$ oraz niech i, j będą ustalonymi liczbami naturalnymi takimi, że $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Wtedy wyznacznik macierzy A można obliczyć na podstawie następujących wzorów:

1. $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$; wzór ten nazywamy rozwinięciem Laplace'a wyznacznika względem i -tego wiersza;
2. $\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$; wzór ten nazywamy rozwinięciem Laplace'a wyznacznika względem j -tej kolumny.

350 / 388

Rozwinięcie Laplace'a wyznacznika

Przykładowy wniosek z rozwinięcia Laplace'a:

Fakt

Jeżeli $A = [a_{ij}]$ jest macierzą diagonalną lub macierzą trójkątną dolną lub macierzą trójkątną górną stopnia n , to jej wyznacznik jest równy iloczynowi elementów głównej przekątnej tej macierzy, tzn. $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$.

351 / 388

Własności wyznaczników.

- Wyznacznik macierzy kwadratowej zawierającej kolumnę złożoną z samych zer lub wiersz złożony z samych zer jest równy 0, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oraz} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

352 / 388

Własności wyznaczników.

- Wyznacznik macierzy kwadratowej zawierającej dwie jednakowe kolumny lub dwa jednakowe wiersze jest równy 0, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & c_1 & \cdots & c_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & c_2 & \cdots & c_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & c_n & \cdots & c_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

oraz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

353 / 388

Własności wyznaczników.

- Wyznacznik macierzy kwadratowej zmieni znak, jeżeli przestawimy w niej między sobą albo dwie kolumny albo dwa wiersze, tzn. (tu pokazany przypadek dla zamiany wierszy):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

354 / 388

Własności wyznaczników.

- Jeżeli wszystkie elementy pewnej kolumny lub pewnego wiersza macierzy kwadratowej zostaną pomnożone przez liczbę c , to także wyznacznik zostanie przemnożony przez c , czyli tej macierzy, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ca_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ca_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ca_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

a także

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

355 / 388

Własności wyznaczników.

- Wyznacznik macierzy kwadratowej nie zmienia się, jeżeli do dowolnej kolumny tej macierzy dodamy kombinację liniową pozostałych kolumn lub do dowolnego jej wiersza dodamy kombinację liniową pozostałych wierszy. [Kombinacją liniową wektorów $v_1, v_2, \dots, v_n$ nazywamy wektor $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$, gdzie $a_1, a_2, \dots, a_n$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.]
- $\det A = \det A^T$ dla dowolnej macierzy kwadratowej A .

356 / 388

Własności wyznaczników

Twierdzenie (Cauchy'ego)

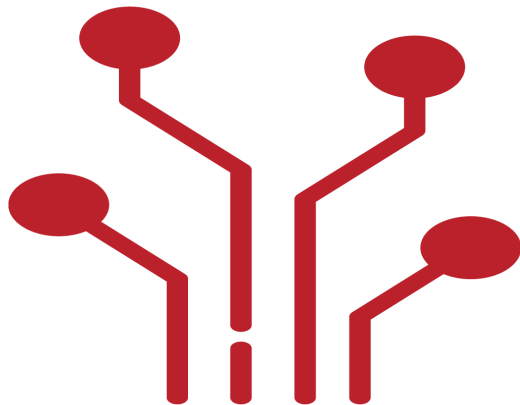
Jeżeli A i B są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia, to
 $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Z powyższego twierdzenia łatwo wynika, że dla dowolnej macierzy kwadratowej A oraz dowolnego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest równość

$$\det(A^n) = (\det A)^n$$

357 / 388

Macierz odwrotna



358 / 388

Macierz odwrotna

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n .

Definicja

Macierzą odwrotną do macierzy A nazywamy macierz A^{-1} spełniającą warunek $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, gdzie I_n jest macierzą jednostkową stopnia n .

359 / 388

Macierz odwrotna

Jeżeli macierz A posiada macierz odwrotną A^{-1} , to macierz A nazywamy **odwracalną**. Macierz odwrotna jest wyznaczona jednoznacznie.

Macierz kwadratową A nazywamy **macierzą nieosobliwą**, jeżeli $\det A \neq 0$. W przeciwnym przypadku mówimy, że macierz A jest **osobliwa**.

360 / 388

Twierdzenia o macierzy odwrotnej.

Twierdzenie

Macierz kwadratowa jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa.

361 / 388

Twierdzenia o macierzy odwrotnej.

Twierdzenie

Jeżeli macierz kwadratowa $A = [a_{ij}]$ jest nieosobliwa, to

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} [A_{ij}]^T,$$

przy czym $[A_{ij}]$ oznacza macierz dopełnień algebraicznych elementów a_{ij} macierzy A .

362 / 388

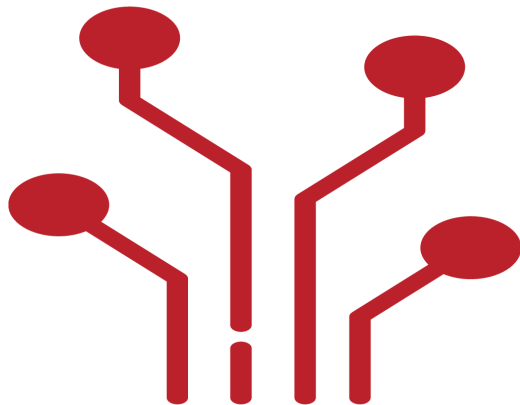
Własności macierzy odwrotnych.

Jeżeli macierze A i B są tego samego stopnia i są odwracalne oraz $\alpha \neq 0, n \in \mathbb{N}$, to macierze $A^{-1}, A^T, AB, \alpha A, A^n$ są również odwracalne i zachodzą następujące równości:

1. $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1},$
2. $(A^{-1})^{-1} = A,$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T,$
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$
5. $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1},$
6. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n.$

363 / 388

Układy równań liniowych



364 / 388

Układ równań liniowych

- **Układem m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, x_2, \dots, x_n$, gdzie $m \in \mathbb{N}$ oraz $n \in \mathbb{N}$, nazywamy układ równań postaci:**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{R}$ oraz $b_i \in \mathbb{R}$ dla $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ oraz $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

365 / 388

Układ równań liniowych

- **Rozwiązaniem układu** równań liniowych nazywamy ciąg $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ liczb rzeczywistych spełniających ten układ. Układ równań, który nie posiada rozwiązania, nazywamy **układem sprzecznym**.
- Układ równań liniowych można zapisać w postaci macierzowej:

$$AX = B,$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

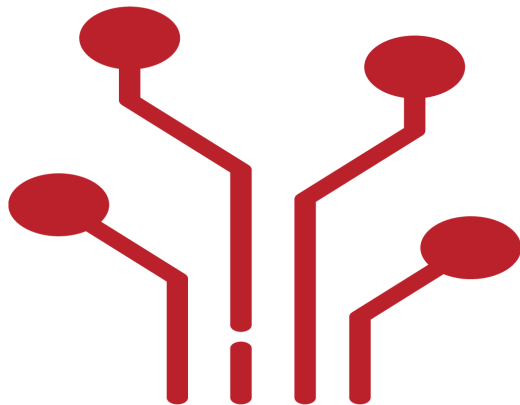
366 / 388

Układ równań liniowych

- Macierz A nazywamy macierzą główną układu równań liniowych, macierz X macierzą (kolumną) niewiadomych, zaś macierz B macierzą (kolumną) wyrazów wolnych.

367 / 388

Wzory Cramera



368 / 388

Wzory Cramera

Rozważmy układ n równań liniowych z n niewiadomymi zapisany w postaci macierzowej jako $AX = B$. Niech $A^{(i)}$ oznacza macierz, która powstanie przez zastąpienie i -tej kolumny w macierzy A przez kolumnę B . Wtedy

- Jeżeli $\det A \neq 0$ to układ ma jedno rozwiązanie

$$x_1 = \det A^{(1)} / \det A, \quad \dots \quad x_n = \det A^{(n)} / \det A$$

- Jeżeli $\det A = \det A^{(1)} = \det A^{(2)} = \dots = \det A^{(n)} = 0$ to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań lub jest sprzeczny.
- Jeżeli $\det A = 0$ i którykolwiek z wyznaczników $A^{(i)}$ jest różny od zera – układ na pewno jest sprzeczny.

369 / 388

Wzory Cramera – przykład

Przykład

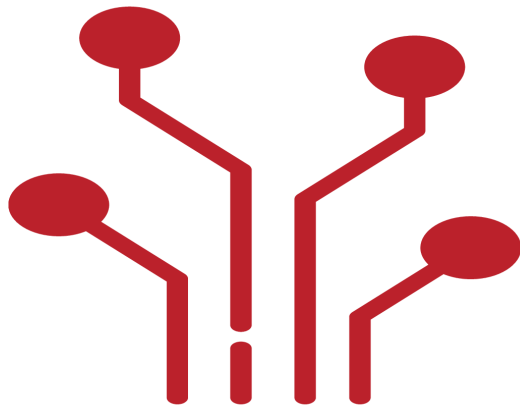
Rozważmy układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x - z = 3. \end{cases}$$

Wtedy $\det A = 2$, $\det A^{(1)} = 2$, $\det A^{(2)} = 2$, $\det A^{(3)} = -2$, stąd mamy rozwiązanie $x = 1$, $y = 1$, $z = -1$.

370 / 388

Eliminacja Gaussa–Jordana



371 / 388

Eliminacja Gaussa–Jordana

Do rozwiązywania układów równań liniowych w ogólnym przypadku, można zastosować **metodę eliminacji Gaussa–Jordana**. Polega ona na przekształceniu macierzy rozszerzonej układu postaci:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

do macierzy $[A'|B']$, opisującej równoważny układ równań, gdzie „lewy kwadrat” macierzy A' jest macierzą jednostkową. Układ ten jest równoważny, co oznacza, że jego zbiór rozwiązań jest identyczny ze zbiorem rozwiązań układu oryginalnego.

372 / 388

Eliminacja Gaussa–Jordana

Poniższe operacje na **wierszach** macierzy rozszerzonej $[A|B]$ układu równań liniowych $AX = B$ przekształcają go w układ równoważny:

- zamiana wierszy między sobą; operację zamiany wiersza i -tego z j -tym będziemy oznaczać symbolem $w_i \leftrightarrow w_j$;
- mnożenie wiersza przez liczbę różną od zera; operację mnożenia i -tego wiersza przez liczbę $c \neq 0$ będziemy oznaczać symbolem $w_i \cdot c$;

373 / 388

Eliminacja Gaussa–Jordana

- dodanie do wszystkich wyrazów ustalonego wiersza odpowiadających im wyrazów innego wiersza pomnożonych przez stałą c ; operację dodania j -tego wiersza pomnożonego przez stałą c do i -tego wiersza będziemy oznaczać symbolem $w_i + c \cdot w_j$;
- usunięcie wiersza złożonego z samych zer; operację usunięcia i -tego wiersza będziemy oznaczać symbolem $us.w_i$;
- usunięcie jednego z wierszy równych lub proporcjonalnych.

374 / 388

Eliminacja Gaussa–Jordana

- Układ równoważny otrzymujemy również wtedy, gdy w macierzy A zamienimy miejscami dwie kolumny **przy jednoczesnej zamianie niewiadomych**. Operację zamiany kolumny i -tej z j -tą oznaczать będziemy symbolem $k_i \leftrightarrow k_j$ [co do zasady tej operacji unikamy, bo komplikuje odczytanie rozwiązania].

375 / 388

Eliminacja Gaussa–Jordana

Typowe postępowanie przy eliminacji Gaussa–Jordana jest takie, że w i -tym kroku metody:

- Zapewniamy liczbę 1 w i -tym wierszu i i -tej kolumnie (poprzez podzielenie i -tego wiersza przez element, który jest aktualnie w i -tym wierszu i i -tej kolumnie; krok ten może być ewentualnie poprzedzony zamianą i -tego wiersza z j -tym wierszem, dla $j > i$; gdy nie ma innego wyjścia można dokonać zamiany i -tej komuny z j -tą kolumną, dla $j > i$, z opisanym wyżej zastrzeżeniem dotyczącym zamiany niewiadomych)
- Dla $j \neq i$ od j -tego wiersza odejmujemy wiersz i -ty pomnożony przez element z j -tego wiersza i i -tej kolumny 376 / 388

Eliminacja Gaussa–Jordana

Z uzyskanej macierzy już bezpośrednio odczytujemy rozwiązania.

Przykład

Rozważmy układ równań

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 15t = 17 \\ 5x + 2y + 5z - 19t + 2u = 24 \\ 4x + y + 3z - 12t + 3u = 17 \end{cases}$$

377 / 388

Eliminacja Gaussa–Jordana

Przykład (kontynuacja...)

Macierzowa reprezentacja tego układu to

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 4 & -15 & 0 & 17 \\ 5 & 2 & 5 & -19 & 2 & 24 \\ 4 & 1 & 3 & -12 & 3 & 17 \end{array} \right]$$

378 / 388

Eliminacja Gaussa–Jordana

Przykład (kontynuacja...)

Następnie macierz tę doprowadzamy (metodą eliminacji) do postaci

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

379 / 388

Eliminacja Gaussa–Jordana

Przykład (kontynuacja...)

skąd odczytujemy rozwiązanie

$$\begin{cases} x = t - 2u + 3 \\ y = 2t - u + 2 \\ z = 2t + 2u + 1 \\ t, u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

380 / 388

Twierdzenie Kroneckera–Capellego

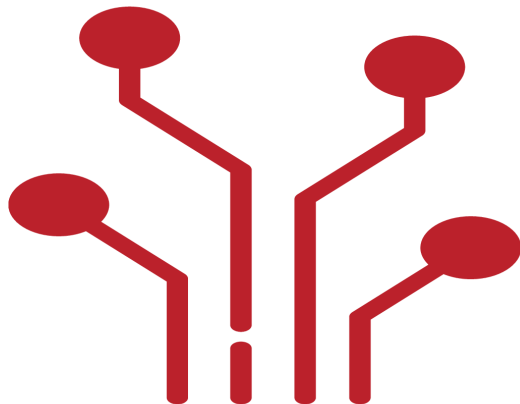
Rząd macierzy – największy stopień nieosobliwej podmacierzy wybranej z danej macierzy.

Twierdzenie (Kroneckera–Capellego)

Niech dany będzie układ równań liniowych (w postaci macierzowej) $AX = B$. Układ ten ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy A równy jest rzędowi macierzy $[A|B]$. Liczba parametrów występujących w rozwiązaniu równa jest różnicy pomiędzy liczbą niewiadomych a rzędem macierzy A .

381 / 388

Eliminacja Gaussa–Jordana w odwracaniu macierzy



382 / 388

Kolejny wariant eliminacji Gaussa–Jordana

- Niech A - macierz stopnia n
- Rozważamy macierz $[A|I_n]$
- Dokonujemy na tej macierzy przekształceń gaussowskich (wyłącznie na wierszach) doprowadzając ją do postaci $[I_n|B]$
- uzyskana macierz B jest macierzą odwrotną do A
- warunkiem powodzenia tego postępowania jest odwracalność A – w przeciwnym wypadku w trakcie eliminacji Gaussa–Jordana otrzymamy kolumnę samych zer.

383 / 388

Przykład obliczenia macierzy odwrotnej stopnia 2

Przykład

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Zatem

$$\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right]$$

384 / 388

Przykład obliczenia macierzy odwrotnej stopnia 3

Przykład

Teraz trochę ambitniejszy przykład. Chodzi o odwrócenie macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Przebieg działań jest następujący $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ w_1 \leftrightarrow w_2 \\ \sim \end{matrix}$

385 / 388

Przykład obliczenia macierzy odwrotnej stopnia 3

Przykład (kontynuacja...)

$$\begin{aligned}
 &w_1 \leftrightarrow w_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \cdot (-1/2)} \\
 &w_2 \cdot (-1/2) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 + 4w_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - \frac{1}{2} \cdot w_3}
 \end{aligned}$$

386 / 388

Przykład obliczenia macierzy odwrotnej stopnia 3

Przykład (kontynuacja...)

$$\begin{matrix} w_1 - \frac{1}{2} \cdot w_3 \\ w_2 - \frac{3}{2} \cdot w_3 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\text{Zatem } A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

387 / 388

Dziękuję za uwagę