

**Materiały do przedmiotu:**

**MATEMATYKA**

**Ćwiczenia nr 1**

Autor:

dr inż. Anna Futa

mgr inż. Michał Błaszczukowski

mgr inż. Magdalena Piłat-Rożek



Fundusze Europejskie  
dla Rozwoju Społecznego



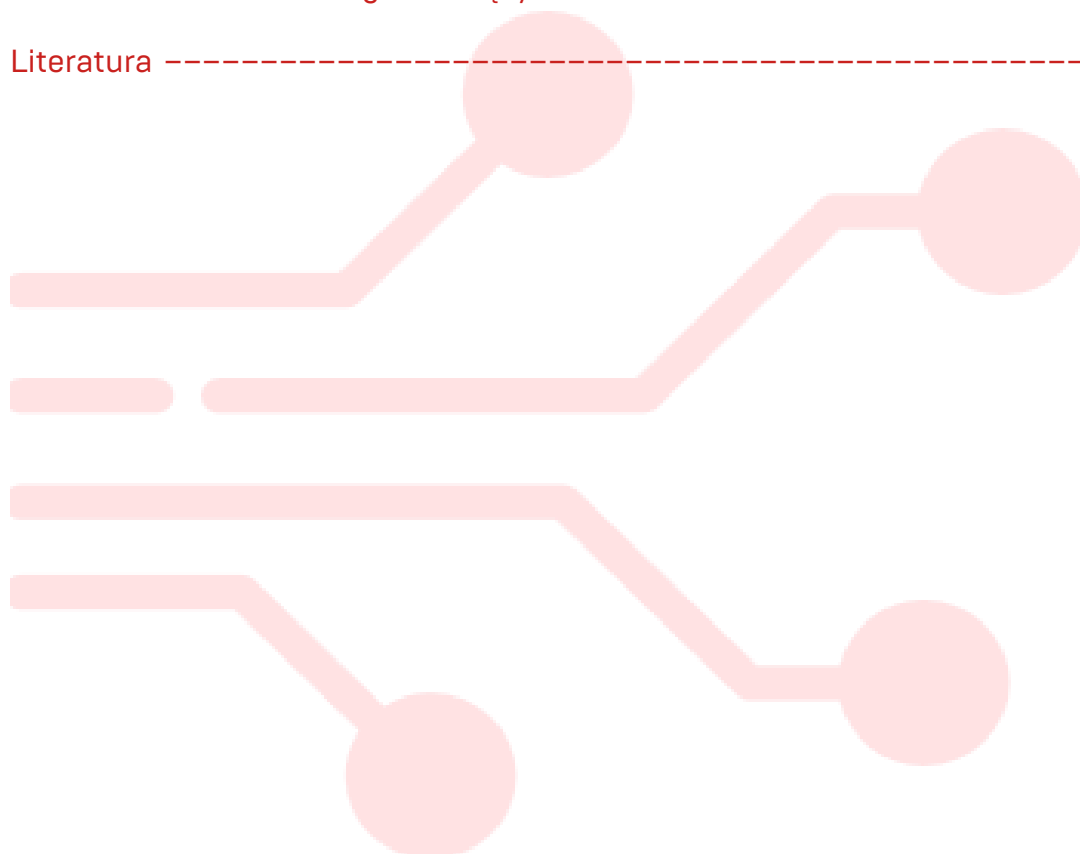
Rzeczpospolita  
Polska

Dofinansowane przez  
Unię Europejską



## Spis treści

|                                        |    |
|----------------------------------------|----|
| Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń         | 3  |
| Przykłady zadań z rozwiązaniami        | 5  |
| Zadania do samodzielnego rozwiązywania | 12 |
| Literatura                             | 14 |



## Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń

Przykłady oraz zadania do samodzielnego rozwiązania dotyczą obliczania granic ciągów liczbowych.

W celu obliczania takich granic niezbędna jest znajomość wzorów skróconego mnożenia – różnicy kwadratów oraz sześcianów dla dowolnych  $a, b \in \mathbb{R}$ :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Dodatkowo przydatne będzie wzór na sumę  $n$  początkowych w wyrazów w ciągu arytmetycznym o wzorze ogólnym  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$  dla  $n \in \mathbb{N}_+$ , gdzie  $a_1 \in \mathbb{R}$  jest pierwszym wyrazem tego ciągu zaś  $r \in \mathbb{R}$  jego różnicą. Wówczas  $n$ -ta suma częściowa wyraża się wzorem

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \cdot n.$$

Natomiast w ciągu geometrycznym o wzorze ogólnym  $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$  dla  $n \in \mathbb{N}_+$ , gdzie  $b_1 \in \mathbb{R}$  jest pierwszym jego wyrazem, a  $q \in \mathbb{R}$  jego ilorazem, suma jego  $n$  początkowych wyrazów jest dana za pomocą formuły

$$S_n = \begin{cases} b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, & \text{dla } q \neq 1, \\ n \cdot b_1, & \text{dla } q = 1. \end{cases}$$

Przypomnijmy również pewne wzory działań na potęgach, które będą przydatne w rozwiązywaniu niektórych przykładów

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m},$
- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n,$
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$  dla  $b \neq 0,$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}.$

W zadaniach do samodzielnego rozwiązania znajdują się również przykłady, w których niezbędna będzie znajomość wzoru na różnicę sinusów oraz cosinusów dla dowolnych  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Do rozwiązania przykładów zaprezentowanych na tych ćwiczeniach przypomnimy kilka niezbędnych twierdzeń oraz definicji.

**Twierdzenie o działaniach arytmetycznych na granicach ciągów:** Niech  $(a_n), (b_n)$  będą dowolnymi ciągami rzeczywistym o skończonych granicach oraz  $c \in \mathbb{R}$  będzie dowolną stałą. Wówczas:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, & \text{(d)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \\ \text{(b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \\ \text{(c)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) &= c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, & \text{jeżeli } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &\neq 0 \text{ oraz } b_n \neq 0., \end{aligned}$$

**Twierdzenie o trzech ciągach:** Niech  $(a_n), (b_n), (c_n)$  będą ciągami liczbowymi spełniającymi równocześnie warunki:

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g,$
- (2) dla wszystkich  $n \geq n_0$ , gdzie  $n_0 \in \mathbb{N}_+$  jest pewnym indeksem zachodzi
$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Wówczas ciąg  $(b_n)$  jest zbieżny oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g.$

**Twierdzenie:** Każdy podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy.

Z tego twierdzenia wynika, że jeśli znajdziemy dwa różne podciągi tego samego ciągu o różnych granicach, wówczas ten ciąg będzie rozbieżny.

**Definicja:** Stałą Eulera (liczbą  $e$ ) nazywamy granicę ciągu liczbowego o wyrazie ogólnym  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

**Twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym:** Ciąg liczbowy  $(a_n)$  jest zbieżny jeśli spełnia jeden z warunków:

- (a) jest niemalejący oraz ograniczony od góry,
- (b) jest nierosnący oraz ograniczony od dołu.

Dodatkowo przypomnijmy granice pewnych ciągów liczbowych, które przydadzą się w rozwiązywaniu zadań:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^k &= \begin{cases} +\infty, & \text{dla } k > 0, \\ 1, & \text{dla } k = 0, \\ 0, & \text{dla } k < 0, \end{cases} & \bullet \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} &= 1, \text{ dla } a > 1, \\ \bullet \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n &= e^a, \text{ dla } a \in \mathbb{R}, & \bullet \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} &= 1, \\ & & \bullet \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} &= 1. \end{aligned}$$

W podręcznikach [1, 2, 3] można odnaleźć dodatkowe zadania z zakresu obliczania granic ciągów o różnym poziomie trudności.

## Przykłady zadań z rozwiązaniami

**Zadanie 1.** Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

[a]  $a_n = \frac{7n^2 + 8n - 12}{2n^2 + 3n + 1},$

[c]  $c_n = \sqrt{9n^2 + n} - 3n,$

[d]  $d_n = n - \sqrt[3]{8n^3 + 5n + 1},$

[b]  $b_n = \frac{(n+4)^4}{(2n-1)(3n+4)^3},$

[e]  $e_n = \left( \frac{3n^2 - 2n + 1}{n^2 + 1} \right)^4.$

### Rozwiązania:

[a] Granice licznika oraz mianownika rozważanego wyrażenia są równe  $+\infty$ . Ponieważ  $\frac{\infty}{\infty}$  jest wyrażeniem nieoznaczonym, konieczne jest dokonanie przekształceń, w tym wypadku wyłączymy z licznika oraz mianownika  $n$  w najwyższej możliwej potędze.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + 8n - 12}{2n^2 + 3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left( 7 + \frac{8}{n} - \frac{12}{n^2} \right)}{n^2 \left( 2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 + \frac{8}{n} - \frac{12}{n^2}}{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} = (\star)$$

Skorzystamy teraz dwukrotnie z twierdzenia o działaniach arytmetycznych na granicach ciągów.

$$\begin{aligned} (\star) &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 7 + \frac{8}{n} - \frac{12}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 7 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{7 + 8 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - 12 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{2 + 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{7 + 8 \cdot 0 - 12 \cdot 0}{2 + 3 \cdot 0 + 0} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

[b] Obliczając granicę tego ciągu można byłoby podnieść do odpowiednich potęg wyrażenia znajdujące się w liczniku i mianowniku, a także mnożyć wyrażenia w mianowniku, ale jest to niepotrzebne i zajmuje dużo czasu. Stąd wykonamy to zadanie korzystając z twierdzenia o wprowadzaniu granicy pod znak funkcji ciągłej [które zostanie przedstawione przy okazji tematu ciągłości funkcji] oraz własności potęg.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)^4}{(2n-1)(3n+4)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[ n \left( 1 + \frac{4}{n} \right) \right]^4}{n \left( 2 - \frac{1}{n} \right) \left[ n \left( 3 + \frac{4}{n} \right) \right]^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \left( 1 + \frac{4}{n} \right)^4}{n \left( 2 - \frac{1}{n} \right) n^3 \left( 3 + \frac{4}{n} \right)^3}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^4}{\left(2 - \frac{1}{n}\right) \left(3 + \frac{4}{n}\right)^3} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^4}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{4}{n}\right)^3} \\
 &= \frac{\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)\right]^4}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{4}{n}\right)\right]^3} = \frac{1^4}{2 \cdot 3^3} = \frac{1}{54}
 \end{aligned}$$

(c) Aby obliczyć tę granicę rozpoczniemy od obliczenia granic składników różnicy.

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} (3n) &= 3 \cdot (+\infty) = +\infty \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{9n^2 + n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 \left(9 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sqrt{9 + \frac{1}{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(9 + \frac{1}{n}\right)} = +\infty \cdot \sqrt{9} = +\infty
 \end{aligned}$$

Zatem różnica tych dwóch granic daje wynik  $+\infty - (+\infty)$ , który jest symbolem nieoznaczonym. Zatem w celu obliczenia granicy przemnożymy wyrażenie przez wyrażenie, które pozwoli nam na skorzystanie ze wzoru skróconego mnożenia (różnicy kwadratów), a jednocześnie nie zmieni granicy.

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{9n^2 + n} - 3n\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{9n^2 + n} - 3n\right) \cdot \frac{\sqrt{9n^2 + n} + 3n}{\sqrt{9n^2 + n} + 3n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{9n^2 + n} - 3n\right) \left(\sqrt{9n^2 + n} + 3n\right)}{\sqrt{9n^2 + n} + 3n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{9n^2 + n}\right)^2 - (3n)^2}{\sqrt{9n^2 + n} + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2 + n - 9n^2}{\sqrt{9n^2 + n} + 3n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n\sqrt{9 + \frac{1}{n}} + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\left(\sqrt{9 + \frac{1}{n}} + 3\right)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{9 + \frac{1}{n}} + 3} = \frac{1}{\sqrt{9 + 0} + 3} = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

(d) Ponownie granica obu wyrażeń we wzorze ogólnym jest równa  $+\infty$ , stąd wykorzystamy podobne podejście, co w przykładzie (c), stosując wzór na różnicę sześcianów.

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} d_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n - \sqrt[3]{8n^3 + 5n + 1} \right) \cdot \frac{n^2 + n\sqrt[3]{8n^3 + 5n + 1} + \left(\sqrt[3]{8n^3 + 5n + 1}\right)^2}{n^2 + n\sqrt[3]{8n^3 + 5n + 1} + \left(\sqrt[3]{8n^3 + 5n + 1}\right)^2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - \left(\sqrt[3]{8n^3 + 5n + 1}\right)^3}{n^2 + n\sqrt[3]{8n^3 + 5n + 1} + \left(\sqrt[3]{8n^3 + 5n + 1}\right)^2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - (8n^3 + 5n + 1)}{n^2 + n\sqrt[3]{8n^3 + 5n + 1} + \left(\sqrt[3]{8n^3 + 5n + 1}\right)^2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 8n^3 - 5n - 1}{n^2 + n\sqrt[3]{8n^3 + 5n + 1} + \left(\sqrt[3]{8n^3 + 5n + 1}\right)^2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7n^3 - 5n - 1}{n^2 + n\sqrt[3]{8n^3 + 5n + 1} + \left(\sqrt[3]{8n^3 + 5n + 1}\right)^2} = (\star)
 \end{aligned}$$

W liczniku  $n$  występuje co najwyżej w trzeciej potęgzie zaś w mianowniku, po wyłączeniu spod pierwiastka maksymalną potęgą będzie druga. Stąd wyłączymy  $n^2$  w liczniku i mianowniku.

$$\begin{aligned}
 (\star) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(-7n - \frac{5}{n} - \frac{1}{n}\right)}{n^2 + n^2 \sqrt[3]{8 + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}} + \left(n \sqrt[3]{8 + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}}\right)^2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(-7n - \frac{5}{n} - \frac{1}{n}\right)}{n^2 \left[1 + \sqrt[3]{8 + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}} + \left(\sqrt[3]{8 + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}}\right)^2\right]} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7n - \frac{5}{n} - \frac{1}{n}}{1 + \sqrt[3]{8 + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}} + \left(\sqrt[3]{8 + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}}\right)^2} = \frac{-7 \cdot (+\infty) - 0 - 0}{1 + \sqrt[3]{8} + (\sqrt[3]{8})^2} = -\infty
 \end{aligned}$$

(e) Ponownie skorzystamy z twierdzenia o wprowadzaniu granicy pod znak funkcji ciągłej.

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} e_n &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n + 1}{n^2 + 1} \right)^4 = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} \right)^4 \\
 &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \right)^4 = \left( \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} \right)^4 = \left(\frac{3}{1}\right)^4 = 3^4 = 81
 \end{aligned}$$

**Zadanie 2.** Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

$$(a) \ a_n = \frac{2^{n+2} \cdot 5 - 7}{7 \cdot 2^n + 6^{n-1}},$$

$$(c) \ c_n = \frac{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}}}{1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{n+2}}},$$

$$(b) \ b_n = \frac{5 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 4^{n-1}}{3 \cdot 3^{2n} + 4^{n+2}},$$

$$(d) \ d_n = \frac{\sqrt{n^2 + \ln(n)} - n}{\operatorname{tg} \frac{1}{n}}$$

**Rozwiązania:**

(a) Ze względu na fakt, że w liczniku i mianowniku występuje funkcja wykładnicza z podstawą równą 2, wyłączymy  $2^n$  z obu wyrażeń.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} \cdot 5 - 7}{7 \cdot 2^n + 6^{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot 2^2 \cdot 5 - 7}{7 \cdot 2^n - 6^n \cdot 6^{-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20 \cdot 2^n - 7}{7 \cdot 2^n - \frac{1}{6} \cdot 6^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n (20 - \frac{7}{2^n})}{2^n (7 - \frac{1}{6} \cdot \frac{6^n}{2^n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20 - \frac{7}{2^n}}{7 - \frac{1}{6} \cdot 3^n} = \frac{20 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{2^n}}{7 - \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n} \\ &= \left[ \frac{20 - 0}{7 - \frac{1}{6} \cdot (+\infty)} \right] = \left[ \frac{20}{-\infty} \right] = 0 \end{aligned}$$

(b) Tym razem w liczniku i mianowniku występują jednocześnie funkcje wykładnicze z podstawami równymi  $3^2$  oraz 4. Stąd po przekształceniach wyłączać będziemy  $9^n$ .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 4^{n-1}}{3 \cdot 3^{2n} + 4^{n+2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 3^{2n} \cdot 3 + 2 \cdot 4^n \cdot 4^{-1}}{3 \cdot 3^{2n} + 4^n \cdot 4^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15 \cdot 9^n + \frac{1}{2} \cdot 4^n}{3 \cdot 9^n + 16 \cdot 4^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n (15 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4^n}{9^n})}{9^n (3 + 16 \cdot \frac{4^n}{9^n})} = \frac{15 + \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{4}{9})^n}{3 + 16 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{4}{9})^n} = \frac{15}{3} \end{aligned}$$

(c) W tym przypadku skorzystamy ze wzoru na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} c_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 - (\frac{1}{4})^n}{1 - \frac{1}{4}}}{\frac{1 - (\frac{1}{5})^{n+3}}{1 - \frac{1}{5}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 - \frac{1}{4^n}}{\frac{3}{4}}}{\frac{1 - \frac{1}{5^{n+3}}}{\frac{4}{5}}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{5^{n+3}}} = \frac{16}{5} \cdot \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^n}}{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5^{n+3}}} \\ &= \left[ \frac{16}{5} \cdot \frac{1 - \frac{1}{+\infty}}{1 - \frac{1}{+\infty}} \right] = \frac{16}{5} \cdot \frac{1 - 0}{1 - 0} = \frac{16}{5} \end{aligned}$$



(d) Ze względu na fakt, że w mianowniku znajduje się funkcja  $\operatorname{tg} \frac{1}{n}$  skorzystamy z tożsamości trygonometrycznej oraz granicy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$ .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} d_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + \ln(n) - n^2}{\sqrt{n^2 + \ln(n)} + n} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(n)}{\sqrt{n^2 + \ln(n)} + n} \cdot \frac{1}{\frac{\sin \frac{1}{n}}{\cos \frac{1}{n}}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(n)}{n \left( \sqrt{1 + \frac{\ln(n)}{n^2}} + 1 \right)} \cdot \frac{\cos \frac{1}{n}}{\sin \frac{1}{n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n \cdot \ln(n)}{n \left( \sqrt{1 + \frac{\ln(n)}{n^2}} + 1 \right)} \cdot \cos \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(n)}{\sqrt{1 + \frac{\ln(n)}{n^2}} + 1} \right) \\ &\quad \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(n)}{\sqrt{1 + \frac{\ln(n)}{n^2}} + 1} \right) \cdot \cos \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) \cdot 1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(n)}{\sqrt{1 + \frac{\ln(n)}{n^2}} + 1} \right) \cdot \cos 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(n)}{\sqrt{1 + \frac{\ln(n)}{n^2}} + 1} \right) = (\star) \end{aligned}$$

W celu znalezienia granicy skorzystamy z twierdzenia o trzech ciągach dla  $e_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$ .

$$f_n = 0 \leq e_n \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} = g_n.$$

Ze względu na fakt, że ciąg  $e_n$  jest ograniczony od dołu przez ciąg stały  $f_n$ , którego granica jest równa 0 oraz od góry przez  $g_n = \frac{1}{n}$  o takiej samej granicy, to na mocy twierdzenia o trzech ciągach również  $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 0$ .

$$(\star) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n)}{\sqrt{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} e_n} + 1} = \left[ \frac{+\infty}{\sqrt{1 + 0} + 1} \right] = \left[ \frac{+\infty}{2} \right] = +\infty$$

**Zadanie 3.** Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

(a)  $a_n = \frac{2n}{n^2 - 1} + \frac{2n}{n^2 - 2} + \dots + \frac{2n}{n^2 - n}$ , (b)  $b_n = \sqrt[n]{7 \cdot 4^n + 3 \cdot 2^n + 10}$ ,

[c]  $c_n = \left( \frac{7n^2 - 2n}{7n^2 + 5n} \right)^{4n},$

[d]  $d_n = \left( \frac{4n + 2}{4n - 3} \right)^{1+n^2}.$

### Rozwiązania:

[a] Przykład ten rozwiążemy w oparciu o twierdzenie o trzech ciągach.

$$e_n = \frac{2n}{n^2 - 1} + \frac{2n}{n^2 - 1} + \dots + \frac{2n}{n^2 - 1} \leq a_n \leq \frac{2n}{n^2 - n} + \frac{2n}{n^2 - n} + \dots + \frac{2n}{n^2 - n} = f_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{2n}{n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 - \frac{1}{n^2}} = 2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{2n}{n^2 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 - \frac{1}{n}} = 2.$$

Zatem z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ .

[b] Skorzystamy z tego samego twierdzenia.

$$g_n = \sqrt[n]{7 \cdot 4^n + 3 \cdot 0 + 10 \cdot 0} \leq b_n \leq \sqrt[n]{7 \cdot 4^n + 3 \cdot 4^n + 10 \cdot 4^n} = \sqrt[n]{20 \cdot 4^n} = h_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{7 \cdot 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{7} \cdot 4) = 1 \cdot 4 = 4,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{20} \cdot 4) = 4.$$

Stąd z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4$ .

[c] W tym przykładzie skorzystamy z definicji liczby  $e$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7n^2 + 5n - 7n}{7n^2 + 5n} \right)^{4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-7n}{7n^2 + 5n} \right)^{4n} = (\star)$$

Ponieważ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7n}{7n^2 + 5n} = 0$  oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} (4n) = +\infty$ , możemy skorzystać z tej definicji.

$$\begin{aligned} (\star) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[ \left( 1 + \frac{-7n}{7n^2 + 5n} \right)^{\frac{7n^2 + 5n}{-7n}} \right]^{\frac{-7n}{7n^2 + 5n} \cdot 4n} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{\frac{-7n}{7n^2 + 5n}} \right)^{4n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{-7n \cdot 4n}{7n^2 + 5n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{-28n^2}{7n^2 + 5n}} = e^{-\frac{28}{7}} = e^{-4} = \frac{1}{e^4} \end{aligned}$$

[d] Ponownie jest to przykład z granicy z liczbą  $e$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n - 3 + 5}{4n - 3} \right)^{1+n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{5}{4n - 3} \right)^{1+n^2} = (\star)$$

Założenia  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{4n-3} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+n^2) = +\infty$  również są spełnione, więc korzystamy z definicji.

$$\begin{aligned} (\star) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[ \left( 1 + \frac{5}{4n-3} \right)^{\frac{4n-3}{5}} \right]^{\frac{5}{4n-3}} \right\}^{1+n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{\frac{5}{4n-3}} \right)^{1+n^2} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n^2+1)}{4n-3}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+\frac{5}{n}}{4+\frac{3}{n}}} = \left[ e^{\frac{5}{4} \cdot (+\infty)} \right] = +\infty \end{aligned}$$

**Zadanie 4.** Zbadać istnienie granicy ciągu o wyrazie ogólnym:

$$[a] \ a_n = \frac{n+1}{n+3} \left( \sin \frac{n\pi}{2} + (-1)^{\frac{n \cdot (n+1)}{2}} \right), \quad [b] \ b_n = n \cdot \cos^2 \left( \frac{n\pi}{8} \right).$$

**Rozwiązania:**

[a] Pierwszym dobranym przez nas podciągiem będzie ten dla  $n = 4k$ , gdzie  $k \in \mathbb{N}$ , wówczas

$$\begin{aligned} a_{4k} &= \frac{4k+1}{4k+3} \left( \sin \frac{4k\pi}{2} + (-1)^{\frac{4k(4k+1)}{2}} \right) = \frac{4k+1}{4k+3} \left( \sin(2k\pi) + (-1)^{2k(4k+1)} \right) \\ &= \frac{4k+1}{4k+3} (\sin 0 + 1) = \frac{4k+1}{4k+3} \cdot (0+1) = \frac{4k+1}{4k+3}. \end{aligned}$$

Obliczamy jego granicę  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{4k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4k+1}{4k+3} = 1$ .

Następny rozważany podciąg będzie tym dla  $n = 4k+1$ , gdzie  $k \in \mathbb{N}$ , wtedy

$$\begin{aligned} a_{4k+1} &= \frac{4k+2}{4k+4} \left( \sin \frac{(4k+1)\pi}{2} + (-1)^{\frac{(4k+1)(4k+2)}{2}} \right) \\ &= \frac{4k+2}{4k+4} \left( \sin \left( 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right) + (-1)^{(4k+1)(2k+1)} \right) = \frac{4k+2}{4k+4} \left( \sin \frac{\pi}{2} - 1 \right) \\ &= \frac{4k+2}{4k+4} (1-1) = \frac{4k+2}{4k+4} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Wówczas  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{4k+1} = 0$ . Zatem znaleźliśmy dwa podciągi ciągu  $(a_n)$  o różnych granicach, co dowodzi, że ciąg  $(a_n)$  nie ma granicy.

[b] Tym razem ze względu 8 w mianowniku argumentu funkcji cosinus, wybierzemy  $n = 16k$ , dla  $k \in \mathbb{N}$ .

$$b_{16k} = 16k \cdot \cos^2 \left( \frac{16k\pi}{8} \right) = 16k \cdot \cos^2(2k\pi) = 16k \cdot \cos^2 0 = 16k.$$

Wówczas  $\lim_{k \rightarrow \infty} b_{16k} = +\infty$ . Indeksami generującymi drugi podciąg będą  $n = 16k + 4$ , gdzie  $k \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} b_{16k+4} &= (16k + 4) \cdot \cos^2 \left( \frac{(16k + 4)\pi}{8} \right) = (16k + 4) \cos^2 \left( 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= (16k + 4) \cos^2 \frac{\pi}{2} = (16k + 4) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Zatem  $\lim_{k \rightarrow \infty} b_{16k+4} = 0$  i stąd wynika, że ciąg  $(b_n)$  nie ma granicy, ponieważ znaleźliśmy dwa różne podciągi tego ciągu o różnych granicach.

## Zadania do samodzielnego rozwiązywania

**Zadanie 5.** Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

[a]  $a_n = \frac{3n - 2}{5n + 3},$

[d]  $d_n = \frac{3\sqrt{n} - 1}{2n - 3},$

[b]  $b_n = \frac{2n^3 - 5n^2 + 7}{2n^2 + 6 - n^3},$

[e]  $e_n = \frac{12n^3 - 5n + 2}{1 - n^2},$

[c]  $c_n = \frac{(3n - 1)^3}{(2n + 3)^2(5n - 1)},$

[f]  $f_n = \frac{(1 + \sqrt[3]{n} + 2\sqrt{n})^2}{3n - 1},$

[g]  $g_n = \sqrt{16n^2 + 3n + 1} - \sqrt{16n^2 - 1},$

[h]  $h_n = \left( \frac{n^2 + 3n}{2n^2 + 1} \right)^3,$

[i]  $j_n = \frac{\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3 + 2n} - n}.$

[j]  $i_n = \frac{1}{\sqrt[3]{27n^3 + n} - 2n + 1},$

**Zadanie 6.** Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

[a]  $a_n = \frac{n!}{(n + 2)! - (n + 1)!},$

[b]  $b_n = \frac{(-1)^n}{3n} - \frac{2n}{6n + 5},$

[c]  $c_n = \frac{1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (2n - 1) + (-2n)}{\sqrt{n^4 + n} + 1},$

$$[d] \quad d_n = \frac{\frac{2}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \dots + \frac{2}{5^n}}{1 + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{2n}}},$$

$$[g] \quad g_n = \frac{\sqrt{n^2 + n} - n}{\sin \frac{1}{n}},$$

$$[e] \quad e_n = \frac{5 - 3^{2n+1} - 2^{-n}}{8 \cdot 3^{n+1} - 2 \cdot 2^{2n+1} + 1},$$

$$[h] \quad h_n = \sqrt{n^2 \left(1 + \sin \frac{5}{n}\right)} - n.$$

$$[f] \quad f_n = \frac{16^{\frac{n}{2}-1} + 3^{n+2}}{2^{n+7} - 2^{2n-3}},$$

**Zadanie 7.** Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

$$[a] \quad a_n = \sqrt[n]{\pi^n + 2 \cdot 4^{-n} + 5 \cdot 2^{2n}},$$

$$[b] \quad b_n = \frac{\ln\left(e + \frac{1}{n^2}\right)}{n + \sqrt{n}} + \frac{\ln\left(e + \frac{2}{n^2}\right)}{n + \sqrt{n-1}} + \dots + \frac{\ln\left(e + \frac{n-1}{n^2}\right)}{n + \sqrt{n-(n-1)}},$$

$$[c] \quad c_n = \frac{2n}{\sqrt{n^4 + n \sin\left(\frac{n\pi}{12}\right) + 1}} + \frac{2n+1}{\sqrt{n^4 + n \sin\left(\frac{n\pi}{12}\right) + 2}} + \dots + \frac{3n}{\sqrt{n^4 + n \sin\left(\frac{n\pi}{12}\right) + n}},$$

$$[d] \quad d_n = (\sqrt{3} - \sqrt[3]{3})(\sqrt{3} - \sqrt[5]{3}) \dots (\sqrt{3} - \sqrt[2n+1]{3}),$$

$$[e] \quad e_n = \sin(\ln n) - \sin(\ln(n+1)),$$

$$[j] \quad j_n = \left(\frac{n^2 + n}{(n+2)^2}\right)^{n^2-2n},$$

$$[f] \quad f_n = \cos \sqrt{n+1} - \cos \sqrt{n+2},$$

$$[g] \quad g_n = \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + n + 3}\right)^{4n+1},$$

$$[k] \quad k_n = \left(\frac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + 5}\right)^{7-2n},$$

$$[h] \quad h_n = (n+1) \cdot \ln\left(\frac{n + \sqrt{n+2}}{n+2}\right),$$

$$[i] \quad i_n = \left(\frac{2n^2 + 4}{n^2 + n - 5}\right)^{3-2n},$$

$$[l] \quad l_n = \frac{\pi^{(-1)^n} + \sqrt{4n^2 + 3n} + n}{n \sqrt[n]{(n+2) \cdot (3^n + 3^{-n})}}.$$

**Zadanie 8.** Zbadać istnienie granicy ciągu o wyrazie ogólnym:

$$[a] \quad a_n = 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{4}} - 2 \cdot (-1)^n,$$

$$[b] \quad b_n = \frac{[2 - \cos(n\pi)] 3^n + 1}{3^n + \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)},$$

$$[c] \ c_n = \left( \sin \frac{n\pi}{2} \right)^n,$$

$$[d] \ d_n = \left( \frac{n^2 + \frac{\pi(-1)^{n+1}}{2}}{n^2 + 2n} \right)^n \cos \left( \frac{(-1)^n \pi}{3} \right).$$

**Zadanie 9. (dodatkowe)** Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczony zbadać istnienie granicy ciągu o wyrazie ogólnym:

$$[a] \ a_n = \sum_{k=1}^n \frac{e^k - 2^{1-k}}{\pi^k + 3^k},$$

$$[b] \ b_n = \frac{e \cdot n!}{n^n},$$

$$[c] \ c_n = \frac{2}{7} + \frac{8}{37} + \frac{26}{217} + \dots + \frac{3^n - 1}{6^n + 1},$$

$$[d] \ d_n = \frac{\sin^2 1}{2} + \frac{\sin^2 2}{2^2} + \frac{\sin^2 3}{2^3} + \dots + \frac{\sin^2 n}{2^n}.$$

## Literatura

- [1] Gewert, Marian, i Skoczylas, Zbigniew. *Analiza matematyczna I: Przykłady i zadania*. Wyd. 26, Oficyna Wydawnicza GIS, 2018.
- [2] Kaczor, Wiesława i Nowak, Maria. *Zadania z analizy matematycznej. I, Liczby rzeczywiste, ciągi i szeregi liczbowe*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2005.
- [3] Krysicki, Włodzimierz, i Włodarski, Lech. *Analiza matematyczna w zadaniach*. Cz. 1. Wyd. 29, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2003.

**Materiały do przedmiotu:**

**MATEMATYKA**

**Ćwiczenia nr 2**

Autor:

dr inż. Anna Futa

mgr inż. Michał Błaszczkowski

mgr inż. Magdalena Piłat-Rożek



Fundusze Europejskie  
dla Rozwoju Społecznego



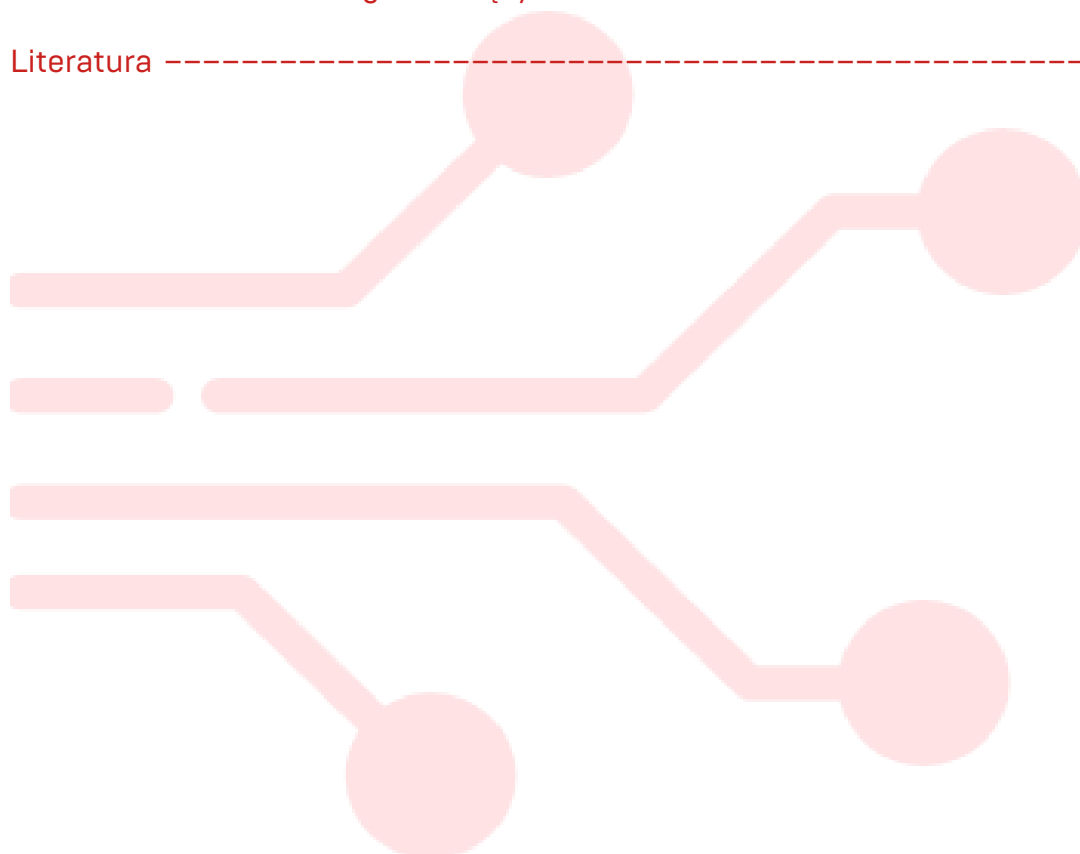
Rzeczpospolita  
Polska

Dofinansowane przez  
Unię Europejską



## Spis treści

|                                        |    |
|----------------------------------------|----|
| Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń         | 3  |
| Przykłady zadań z rozwiązaniami        | 4  |
| Zadania do samodzielnego rozwiązywania | 13 |
| Literatura                             | 15 |





## Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń

Przykłady oraz zadania do samodzielnego rozwiązania dotyczą obliczania granic funkcji oraz ich zastosowań w badaniu ciągłości oraz szukaniu asymptot ich wykresów. Przypomnijmy kilka najważniejszych twierdzeń oraz granic, które przydadzą się w rozwiązywaniu zadań.

**Twierdzenie o działaniach arytmetycznych na granicach funkcji:** Niech

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g_1, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g_2$ , wówczas:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = g_1 \pm g_2,$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = g_1 \cdot g_2,$
- jeżeli  $g(x) \neq 0$  w otoczeniu  $x_0$  oraz granica  $g_2 \neq 0$ , to  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g_1}{g_2}.$

**Twierdzenie o trzech funkcjach:** Niech  $f, g, h$  będą funkcjami, dla których zachodzą jednocześnie warunki:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a,$
- $f(x) \leq g(x) \leq h(x).$

Wówczas również  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a.$

Warto również przypomnieć dwie istotne granice, które pomogą w rozwiązywaniu przykładów

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Badanie ciągłości funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$  polega na sprawdzeniu warunku

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

W przypadku gdy granice jednostronne funkcji są obliczane przy pomocy różnych wzorów warunek ten przyjmuje postać

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Aby znaleźć asymptoty wykresów funkcji przypomnimy ich definicje:

- Asymptota pionowa to prosta o równaniu  $x = c$  i istnieje:
  - lewostronna wtt. gdy zachodzi warunek  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty,$

- prawostronna wtt. gdy zachodzi warunek  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty$ .
- Asymptota pozioma to prosta o równaniu  $y = p$  i istnieje:
  - lewostronna wtt. gdy istnieje skończona granica  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = p$ ,
  - prawostronna wtt. gdy istnieje skończona granica  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = p$ .
- Asymptota ukośna to prosta o równaniu  $y = ax + b$  i istnieje:
  - lewostronna wtt. gdy istnieją skończone granice  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$  oraz  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = b$ ,
  - prawostronna wtt. gdy istnieją skończone granice  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$  oraz  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$ .

Asymptota lewo- i prawostronna jest nazywana asymptotą obustronną, o ile dana jest tym samym równaniem.

W podręcznikach [1, 2, 3] można odnaleźć dodatkowe zadania z zakresu obliczania granic funkcji, badania ich ciągłości oraz szukania asymptot wykresów funkcji.

## Przykłady zadań z rozwiązaniami

**Zadanie 1.** Obliczyć granicę funkcji lub udowodnić, że nie istnieje:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{\sqrt{x} - 2}$ ,

(e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ ,

(b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{10 - 9x - x^2}{3x^2 + 4x - 7}$ ,

(f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 (2 + \sin^2 x)}{x + 100}$ ,

(c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\frac{\pi}{4} - x}$ ,

(g)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - \cos(2x)}{x^2 + 10}$ ,

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{5x^2 + 1}{3x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ ,

(h)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 1)^3 - 27}{|x - 2|}$ ,

$$(i) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^8}{(x^3 - 12x + 16)^4},$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(5x)}{\sin(2x)}.$$

### Rozwiązania:

[a] W rozwiązaniu tego zadania skorzystamy z dwóch wzorów skróconego mnożenia

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{\sqrt{x} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x^2 + 4x + 16)}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)(x^2 + 4x + 16)}{\sqrt{x} - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x} + 2)(x^2 + 4x + 16) = (\sqrt{4} + 2)(4^2 + 4 \cdot 4 + 16) = 192. \end{aligned}$$

[b] Ze względu na fakt, że jest to granica typu  $\frac{0}{0}$ , obliczymy wyróżniki trójmianów znajdujących się w liczniku i mianowniku.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (-9)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 10 = 81 + 40 = 121 = 11^2, \sqrt{\Delta_1} = 11, \\ x_1 &= \frac{9-11}{-2} = 1, x_2 = \frac{9+11}{-2} = -10. \text{ Zatem } 10 - 9x - x^2 = -(x-1)(x+10). \\ \Delta_2 &= 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-7) = 16 + 84 = 100 = 10^2, \sqrt{\Delta_2} = 10, \\ x_1 &= \frac{-4-10}{6} = -\frac{7}{3}, x_2 = \frac{-4+10}{6} = 1. \text{ Stąd } 3x^2 + 4x - 7 = 3\left(x + \frac{7}{3}\right)(x-1). \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{10 - 9x - x^2}{3x^2 + 4x - 7} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(x+10)}{3\left(x + \frac{7}{3}\right)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+10)}{3\left(x + \frac{7}{3}\right)} = \frac{-11}{3\left(1 + \frac{7}{3}\right)} = -\frac{11}{10}.$$

[c] W tym przykładzie skorzystamy z wzorów trygonometrycznych.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\frac{\pi}{4} - x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\frac{\pi}{4} - x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos \frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2} \sin \frac{x - (\frac{\pi}{2} - x)}{2}}{\frac{\pi}{4} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2}}{\frac{\pi}{4} - x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{2x - \frac{\pi}{2}}{2}}{\frac{\pi}{4} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos \frac{\pi}{4} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{-(x - \frac{\pi}{4})} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{-(x - \frac{\pi}{4})} = -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

[d] Ponieważ  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$  oraz  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 1}{3x^2 + 1} = 1$ , przekształcimy wyrażenie będące podstawą potęgi oraz skorzystamy z definicji liczby  $e$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{5x^2 + 1}{3x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3x^2 + 1 + 2x^2}{3x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3x^2 + 1}{3x^2 + 1} + \frac{2x^2}{3x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{2x^2}{3x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{3x^2 + 1} \cdot \frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3x^2 + 1}} = e^{\frac{2}{3 \cdot 0 + 1}} = e^2.$$

(e) W tym zadaniu skorzystamy z jedynki trygonometrycznej oraz wzoru skróconego mnożenia – różnicy kwadratów.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos x}{\sin x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x (1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sin x (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\sin 0}{1 + \cos 0} = \frac{0}{1 + 1} = 0. \end{aligned}$$

(f) W tym przypadku do obliczenia granicy wykorzystamy twierdzenie o trzech funkcjach oraz własności funkcji sinus. Obliczamy granicę przy  $x \rightarrow +\infty$  zatem możemy założyć, że  $x > 0$ . Wówczas:

$$-1 \leq \sin x \leq 1,$$

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1,$$

$$2 \leq 2 + \sin^2 x \leq 3 \left\| \cdot \frac{x^2}{x + 100} > 0, \right.$$

$$\frac{2x^2}{x + 100} \leq \frac{x^2 (2 + \sin^2 x)}{x + 100} \leq \frac{3x^2}{x + 100}.$$

Obliczymy granicę ograniczenia dolnego oraz górnego rozważanej funkcji.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x + 100} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x \left( 1 + \frac{100}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1 + \frac{100}{x}} = \left[ \frac{2 \cdot (+\infty)}{1 + 0} \right] = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x + 100} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x \left( 1 + \frac{100}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{1 + \frac{100}{x}} = \left[ \frac{3 \cdot (+\infty)}{1 + 0} \right] = +\infty.$$

Zatem z twierdzenia o trzech funkcjach oraz powyższych wyników wnioskujemy, że

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 (2 + \sin^2 x)}{x + 100} = +\infty.$$

(g) Ponownie skorzystamy z twierdzenia o trzech funkcjach. Tym razem obliczamy granicę przy  $x \rightarrow -\infty$ , zatem  $x < 0$ . Jednak we wzorze funkcji występują wyłącznie

wyrażenia  $x^2 > 0$ .

$$5x^2 - 1 \leq 5x^2 - \cos(2x) \leq 5x^2 + 1 \left\| \cdot \frac{1}{x^2 + 10} > 0, \right.$$

$$\frac{5x^2 - 1}{x^2 + 10} \leq \frac{5x^2 - \cos(2x)}{x^2 + 10} \leq \frac{5x^2 + 1}{x^2 + 10}.$$

Obliczymy granicę ograniczenia dolnego oraz górnego rozważanej funkcji.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 1}{x^2 + 10} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(5 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{10}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{10}{x^2}} = \frac{5 - 0}{1 + 0} = 5,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 + 1}{x^2 + 10} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(5 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{10}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{10}{x^2}} = \frac{5 + 0}{1 + 0} = 5.$$

Zatem z twierdzenia o trzech funkcjach oraz powyższych wyników wnioskujemy, że

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - \cos(2x)}{x^2 + 10} = 5.$$

(h) Rozwiązywanie tego przykładu rozpoczniemy od skorzystania z rozwinięcia wzoru na różnicę sześcianów, który znajduje się w liczniku wyrażenia.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)^3 - 3^3}{|x-2|} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1-3) \left[ (x+1)^2 + 3(x+1) + 9 \right]}{|x-2|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 1 + 3x + 3 + 9)}{|x-2|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 5x + 13)}{|x-2|}. \end{aligned}$$

Rozważymy w tym przypadku granice jednostronne ze względu na wartość bezwzględną znajdującą się w mianowniku.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x^2 + 5x + 13)}{|x-2|} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x^2 + 5x + 13)}{-(x-2)} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 5x + 13}{-1} &= -(2^2 + 5 \cdot 2 + 13) = -27, \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x^2+5x+13)}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x^2+5x+13)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2+5x+13) = 27.$$

Zatem granica rozważanej funkcji nie istnieje, ponieważ granica lewostronna nie jest równa granicy prawostronnej.

(i) W tym przykładzie rozpoczniemy od rozłożenia na czynniki nierozkładalne wyrażeń znajdujących się w liczniku i mianowniku rozważanej funkcji.

Rozpoczniemy od licznika:

$$\Delta_1 = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9, \sqrt{\Delta_1} = 3, x_1 = \frac{1-3}{2} = -1, x_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$$

$$\text{Zatem } (x^2 - x - 2)^8 = [(x+1)(x-2)]^8 = (x+1)^8 (x-2)^8.$$

Aby rozłożyć mianownik skorzystamy ze schematu Hornera – podzielimy wielomian  $x^3 - 12x + 16$  przez jednomian  $x - 2$ .

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -12 & 16 \\ 2 & & 2 & 4 & -16 \\ \hline & 1 & 2 & -8 & 0 \end{array}$$

Zatem  $x^3 - 12x + 16 = (x-2)(x^2+2x-8)$ . Następnie obliczmy miejsca zerowe funkcji  $x^2+2x-8$ .

$$\Delta_2 = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36, \sqrt{\Delta_2} = 6, x_3 = \frac{-2-6}{2} = -4, x_4 = \frac{-2+6}{2} = 2.$$

Stąd  $(x^3 - 12x + 16)^4 = [(x-2)^2(x+4)]^4 = (x-2)^8 (x+4)^4$ . Wówczas:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^8}{(x^3 - 12x + 16)^4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)^8 (x-2)^8}{(x-2)^8 (x+4)^4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)^8}{(x+4)^4} = \frac{(2+1)^8}{(2+4)^4} = \frac{3^8}{6^4} \\ &= \frac{3^8}{2^4 \cdot 3^4} = \frac{3^4}{2^4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}. \end{aligned}$$

(j) Przykład ten wymagał będzie skorzystania z definicji funkcji tangens oraz skorzystania z granicy  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(5x)}{\sin(2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(5x)}{\cos(5x)}}{\sin(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)} \cdot \frac{1}{\cos(5x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(5x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)} \cdot \frac{1}{\cos 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)} \cdot \frac{5x}{5x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(5x)}{5x} \cdot \frac{5x}{\sin(2x)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin(2x)} = 1 \cdot 5 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\sin(2x)} \cdot \frac{2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin(2x)} = \frac{5}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin(2x)}{2x}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{5}{2}.$$

**Zadanie 2.** Zbadać ciągłość funkcji. Wyznaczyć punkty nieciągłości dla funkcji nieciągłej:

$$\text{(a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}, & x > 2, \\ -\frac{1}{2}x + 3, & x \in [0, 2], \\ \frac{x^2-3x}{x^2-x}, & x < 0, \end{cases} \quad \text{(b) } g(x) = \begin{cases} \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sin x}, & x > 0, \\ 2x+1, & x \in [-1, 0], \\ x^2, & x < -1. \end{cases}$$

**Rozwiązania:**

(a) Punktami, w których będziemy obliczać granice oraz wartości funkcji będą  $x_1 = 0$  oraz  $x_2 = 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x-3)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-3}{x-1} = \frac{0-3}{0-1} = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( -\frac{1}{2}x + 3 \right) = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 3 = 3 = f(0).$$

Ponieważ granica lewostronna, prawostronna oraz wartość funkcji w punkcie  $x_1$  są równe to  $f$  jest ciągła w tym punkcie.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left( -\frac{1}{2}x + 3 \right) = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 3 = -1 + 3 = 2 = f(2),$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{x-1}-1} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{x-2}{\sqrt{x-1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{x-1-1} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (\sqrt{x-1}+1) = \sqrt{2-1}+1 = 2. \end{aligned}$$

Ponownie granice jednostronne oraz wartość funkcji w punkcie  $x_2$  są równe, więc funkcja jest ciągła w  $x_2$ . Zatem ponieważ nie ma innych potencjalnych punktów nieciągłości to  $f$  jest ciągła na całym zbiorze liczb rzeczywistych.

(b) Punktami, w których może potencjalnie wystąpić brak ciągłości funkcji są

$x_1 = -1$  oraz  $x_2 = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2) = (-1)^2 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (2x + 1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -2 + 1 = -1 = f(-1).$$

Zatem ze względu na brak ciągłości lewostronnej  $g$  nie jest ciągła w punkcie  $x_1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x + 1) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 = f(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = \left[ \frac{1 + \infty}{1 + 1} \right] = +\infty.$$

Zatem w tym przypadku mamy do czynienia z nieciągłością prawostronną funkcji  $g$  w punkcie  $x_2$ .

**Zadanie 3.** Wyznaczyć wartości parametrów tak, aby funkcja była ciągła w swojej dziedzinie:

$$[a] \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+ax-2}{3x^2+4x+3}, & x < -2, \\ x^3 + 2, & x \in [-2, 0], \\ \frac{b \cdot e^x}{b - e^x}, & x > 0, \end{cases} \quad [b] \quad g(x) = \begin{cases} -1, & x \leq -1, \\ ax^2 + bx + c, & x \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

### Rozwiązania:

[a] Rozpocniemy od obliczenia granicy prawostronnej w  $-2$  aby dopasować jej wartość do granicy lewostronnej.

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^3 + 2) = (-2)^3 + 2 = -8 + 2 = -6 = f(-2),$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + ax - 2}{3x^2 + 4x + 3} = \frac{(-2)^2 - 2a - 2}{3 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 3} = \frac{2 - 2a}{12 - 8 + 3} = \frac{2 - 2a}{7}.$$

Zatem aby funkcja była ciągła w tym punkcie musi zachodzić, że  $\frac{2-2a}{7} = -6$ , stąd  $2 - 2a = -42$ , zatem  $a = 22$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 + 2) = 0^3 + 2 = 2 = f(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b \cdot e^x}{b - e^x} = \frac{b \cdot e^0}{b - e^0} = \frac{b}{b - 1}, \quad b \neq 1.$$



Wynika stąd, że funkcja będzie ciągła w punkcie  $x_0 = 0$  gdy  $\frac{b}{b-1} = 2$ , czyli dla  $b = 2$ .  
Zatem  $f$  jest ciągła na całym zbiorze liczb rzeczywistych dla  $a = 22$  oraz  $b = 2$ .

(b) Punktami, w których może zająć brak ciągłości są  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 0$  oraz  $x_3 = 1$ .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (-1) = -1 = g(-1), \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (ax^2 + bx + c) = a - b + c.\end{aligned}$$

Zatem aby zaszła ciągłość w  $x_1$  musi być, że  $a - b + c = -1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (ax^2 + bx + c) = c, \quad g(0) = 0.$$

Stąd  $c = 0$ .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (1) = 1 = g(1), \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax^2 + bx + c) = a + b + c.\end{aligned}$$

Zatem aby funkcja  $g$  była ciągła w każdym punkcie zbioru liczb rzeczywistych muszą jednocześnie zachodzić warunki:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ c = 0 \\ a - b + c = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ a + b = 1 \\ a - b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ 2a = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ a = 0 \\ b = 1. \end{cases}$$

Zatem dla  $a = c = 0$  oraz  $b = 1$   $g$  jest ciągła.

**Zadanie 4.** Wyznaczyć asymptoty wykresu funkcji:

$$(a) f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 10x + 3}, \quad (b) g(x) = x - \frac{4}{x^2}.$$

**Rozwiązania:**

(a) Rozpocznijemy od określenia dziedziny funkcji. Ze względu na mianownik  $3x^2 - 10x + 3 \neq 0$ ,  $\Delta = 100 - 36 = 64$ ,  $\sqrt{\Delta} = 8$ ,  $x_1 = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3}$ ,  $x_2 = \frac{10+8}{6} = 3$ .  
Stąd  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}, 3\}$ . Zbadamy występowanie asymptot pionowych.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 10x + 3} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{3(x - \frac{1}{3})(x - 3)} = \left[ \frac{\frac{2}{9} - \frac{5}{3} + 2}{0} \right],$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} f(x) = \left[ \frac{\frac{2}{9} - \frac{5}{3} + 2}{3 \cdot 0^- \cdot (\frac{1}{3} - 3)} \right] = \left[ \frac{\frac{2}{9} - \frac{15}{9} + \frac{18}{9}}{3 \cdot 0^- \cdot (-\frac{8}{9})} \right] = \left[ \frac{\frac{5}{9}}{0^+} \right] = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} f(x) = \left[ \frac{\frac{5}{9}}{3 \cdot 0^+ \cdot (-\frac{8}{9})} \right] = \left[ \frac{\frac{5}{9}}{0^-} \right] = -\infty.$$

Wynika stąd, że krzywa o równaniu  $x = \frac{1}{3}$  jest asymptotą pionową obustronną wykresu funkcji  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 10x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x + 2}{3(x - \frac{1}{3})(x - 3)} = \left[ \frac{2 \cdot 9 - 5 \cdot 3 + 2}{0} \right],$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \left[ \frac{18 - 15 + 2}{3 \cdot (3 - \frac{1}{3}) \cdot 0^-} \right] = \left[ \frac{5}{3 \cdot \frac{8}{3} \cdot 0^-} \right] = \left[ \frac{5}{0^-} \right] = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \left[ \frac{5}{3 \cdot \frac{8}{3} \cdot 0^+} \right] = \left[ \frac{5}{0^+} \right] = +\infty.$$

Stąd wykres funkcji  $f$  posiada również drugą asymptotę pionową obustronną o równaniu  $x = 3$ . Zbadamy również istnienie asymptot poziomych.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 10x + 3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2(2 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2})}{x^2(3 - \frac{10}{x} + \frac{3}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}}{3 - \frac{10}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{2}{3}.$$

Ponieważ zarówno granica w plus, jak i minus nieskończoności wynosi  $\frac{2}{3}$  to istnieje asymptota pozioma obustronna wykresu funkcji  $f$  o równaniu  $y = \frac{2}{3}$ . Wykres tej funkcji nie posiada asymptot ukośnych ze względu na występowanie asymptoty poziomej obustronnej.

(b) Dziedziną funkcji  $g$  jest zbiór  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Zbadamy, czy występuje asymptota pionowa  $x = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( x - \frac{4}{x^2} \right) = \left[ 0 - \frac{4}{0^2} \right] = \left[ \frac{-4}{0^+} \right] = -\infty.$$

Stąd istnieje asymptota pionowa do wykresu funkcji  $g$  o równaniu  $x = 0$ . Zbadajmy granice funkcji w nieskończonościach.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \frac{4}{x^2} \right) = \left[ +\infty - \frac{4}{(+\infty)^2} \right] = [+ \infty - 0] = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x - \frac{4}{x^2} \right) = \left[ -\infty - \frac{4}{(-\infty)^2} \right] = [-\infty - 0] = -\infty.$$

Zatem wykres tej funkcji nie posiada asymptot poziomych. Z tego względu zbadamy występowanie asymptot ukośnych.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( 1 - \frac{4}{x^3} \right) = \left[ 1 - \frac{4}{(\pm\infty)^3} \right] = 1 - 0 = 1 = a,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (g(x) - a \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( x - \frac{4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-4}{x^2} = \left[ \frac{-4}{(\pm\infty)^2} \right] = 0 = b.$$

Stąd wykres tej funkcji posiada asymptotę ukośną obustronną o równaniu  $y = x$ .

## Zadania do samodzielnego rozwiązywania

**Zadanie 5.** Obliczyć granicę funkcji lub udowodnić, że nie istnieje:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)e^{x-1}}{\cos(x-1)},$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 7x - 6},$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{x^2 - 16},$

(d)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 + x^2 - 2},$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{6-x^2}}{x-2}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{3} - \sqrt{2 + \cos x}},$

(g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 8x}{x^2}$

(h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x),$

(i)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9},$

(j)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 - 4x + 3} \right)^{x+1},$

(k)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln x - \ln(x+3)],$

(l)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3x^3 + \cos x},$

(m)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7^x - 5^x}{3^x - 2^x}$

(n)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 \sin x},$

(o)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(9x)},$

(p)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{2x},$

(q)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi},$

(r)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x - 5|}{x^2 - 25},$

(s)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}},$

(t)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)}.$

**Zadanie 6.** Zbadać ciągłość funkcji. Wyznaczyć punkty nieciągłości dla funkcji nieciągłej:

(a)  $a(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3}, & x \neq -3, \\ 6, & x = -3, \end{cases}$

(e)  $e(x) = \begin{cases} x \cos^2 \frac{1}{x}, & x \in (0, \frac{2}{\pi}), \\ 0, & x = 0, \\ \frac{\ln(1-x^2)}{x}, & x \in (-1, 0), \end{cases}$

(b)  $b(x) = \begin{cases} 4 + x^2, & x \leq 0, \\ \frac{\sin(4x)}{x}, & x > 0, \end{cases}$

(f)  $f(x) = \frac{4 - x^2}{|2x - x^3|},$

(c)  $c(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{2-|x|}, & x > 2, \\ -4, & x = 2, \\ \frac{4x-8}{x^2-5x+6}, & x < 2, \end{cases}$

(g)  $g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}, & x > 1, \\ 5 - 3x, & x \in [-2, 1], \\ 2^{x+2} - 5^{3+x}, & x < -2. \end{cases}$

(d)  $d(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x\sqrt{x^2}}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$

(h)  $h(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

**Zadanie 7.** Wyznaczyć wartości parametrów tak, aby funkcja była ciągła w swojej dziedzinie:

(a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+27}{x+3}, & x \neq -3, \\ a, & x = 3, \end{cases}$

(c)  $h(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin(ax)}, & x < 0, \\ \frac{x^3-1}{x^2+x-2}, & 0 \leq x < 1, \\ bx - 3, & 1 \leq x \leq 2, \\ \frac{x^2+(c-2)x-2c}{x-2}, & x > 2, \end{cases}$

(b)  $g(x) = \begin{cases} (x-2)^3, & x \leq 0, \\ ax + b, & 0 < x < 1, \\ \sqrt{x+3}, & x \geq 1, \end{cases}$

(d)  $i(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, \\ \frac{\log_4^2(a)}{2} - \frac{\log_4(a)}{3}, & x = 2, \\ \frac{1}{3} \cdot \sin(b), & x = -2. \end{cases}$

**Zadanie 8.** Wyznaczyć asymptoty wykresu funkcji:

(a)  $f(x) = \frac{3x^2 - 6x + 3}{x - 2},$

(e)  $j(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x - 1}}.$

(b)  $g(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2x},$

(f)  $k(x) = (2 - x)^{\frac{2}{3}} - (2 + x)^{\frac{2}{3}},$

(c)  $h(x) = \frac{x^3 - 3}{x^3 - 1},$

(g)  $l(x) = \frac{|2 + x|}{\sqrt{x^2 - 4}},$

(d)  $i(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 - 1}{3 - 2x^2},$

(h)  $m(x) = \frac{|3x|}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}.$

## Literatura

- [1] Gewert, Marian, i Skoczylas, Zbigniew. *Analiza matematyczna I: Przykłady i zadania*. Wyd. 26, Oficyna Wydawnicza GIS, 2018.
- [2] Kryszicki, Włodzimierz, i Włodarski, Lech. *Analiza matematyczna w zadaniach*. Cz. 1. Wyd. 29, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2003.
- [3] Niewiadoma, Joanna, i Szynal, Jan. *15 wykładów i 150 zadań z analizy matematycznej*. Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, 2020.

**Materiały do przedmiotu:**

**MATEMATYKA**

**Ćwiczenia nr 3**

Autor:

dr inż. Anna Futa

mgr inż. Michał Błaszczukowski

mgr inż. Magdalena Piłat-Rożek



Fundusze Europejskie  
dla Rozwoju Społecznego



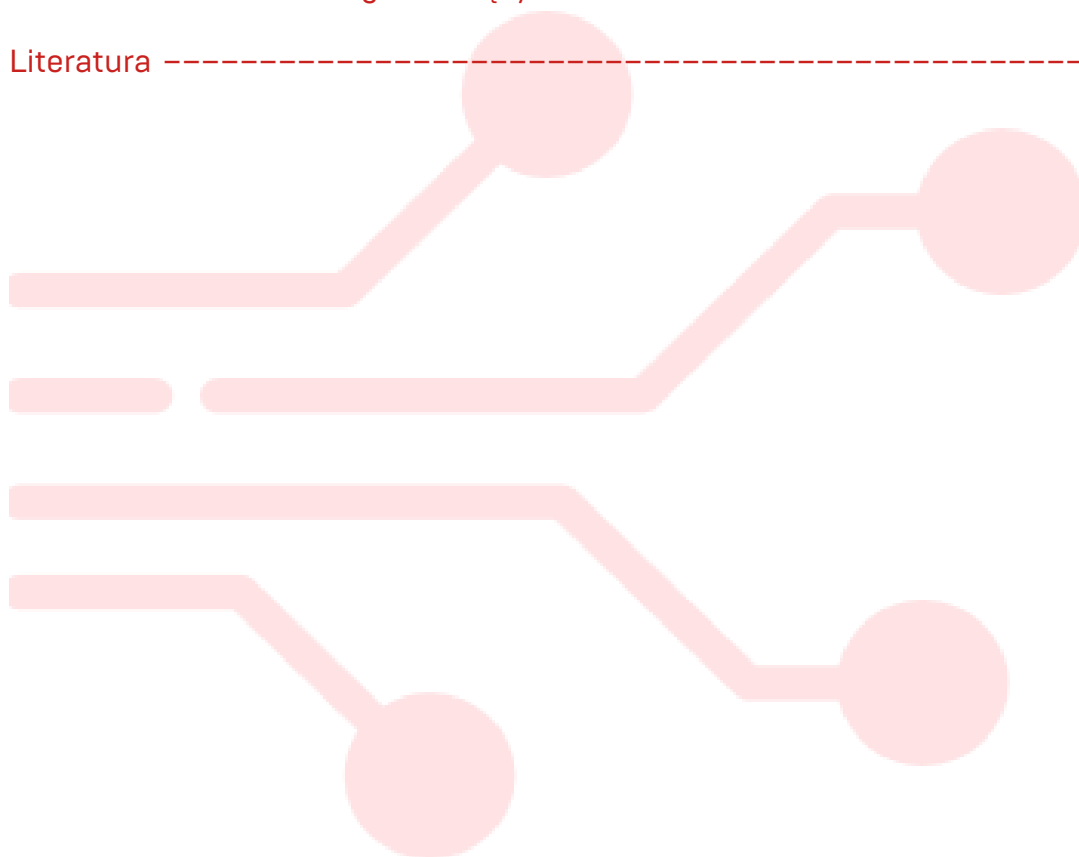
Rzeczpospolita  
Polska

Dofinansowane przez  
Unię Europejską



## Spis treści

|                                        |    |
|----------------------------------------|----|
| Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń         | 3  |
| Przykłady zadań z rozwiązaniami        | 4  |
| Zadania do samodzielnego rozwiązywania | 13 |
| Literatura                             | 14 |



## Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń

Ze względu na fakt, że zadania będą dotyczyły pochodnych funkcji, rozpoczniemy od przypomnienia definicji.

Pochodną funkcji  $f$  zmiennej rzeczywistej w punkcie  $x_0 \in \mathbb{R}$  nazywamy granicę  $f'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ , o ile ona istnieje.

Zestawienie wzorów potrzebnych do obliczania pochodnych zostało umieszczone w tabeli 1.

**Tabela 1.** Zestawienie pochodnych podstawowych funkcji

| $f(x)$                                     | $f'(x)$                   | $f(x)$                     | $f'(x)$                                  |
|--------------------------------------------|---------------------------|----------------------------|------------------------------------------|
| $c = \text{const}$                         | 0                         | $\cos x$                   | $-\sin x$                                |
| $x^p, p \in \mathbb{R}$                    | $p \cdot x^{p-1}$         | $\text{tg } x$             | $\frac{1}{\cos^2 x}$                     |
| $e^x$                                      | $e^x$                     | $\text{ctg } x$            | $-\frac{1}{\sin^2 x}$                    |
| $a^x, a > 0$                               | $a^x \cdot \ln a$         | $\arcsin x, x \in [-1, 1]$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$  |
| $\ln x$                                    | $\frac{1}{x}$             | $\arccos x, x \in [-1, 1]$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$ |
| $\log_a x, a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ | $\frac{1}{x \cdot \ln a}$ | $\text{arctg } x$          | $\frac{1}{1+x^2}$                        |
| $\sin x$                                   | $\cos x$                  | $\text{arcctg } x$         | $-\frac{1}{1+x^2}$                       |

Dodatkowo przypomnijmy podstawowe wzory na obliczanie pochodnych dla funkcji  $f, g$  oraz dowolnej stałej  $c \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} (c \cdot f(x))' &= c \cdot f'(x), & (f(x) \cdot g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \\ (f(x) \pm g(x))' &= f'(x) \pm g'(x), & \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \end{aligned}$$

W przypadku ostatniego wzoru jest on określony dla funkcji  $g$  różnej tożsamościowo od zera oraz dla  $x$  takich, że  $g(x) \neq 0$ . Natomiast w przypadku funkcji złożonej  $f \circ g$  jej pochodna wyraża się wzorem:

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$



Do rozwiązywania zadań przydadzą się również wzory dotyczące logarytmów dla dowolnych  $a, p \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$  oraz  $b, c \in (0, +\infty)$ :

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (bc), \quad \log_a b - \log_a c = \log_a \left( \frac{b}{c} \right),$$

$$a^{\log_a b} = b, \quad \log_a b = \frac{\log_p b}{\log_p a}.$$

Przypomnijmy również wzory na sinus i cosinus kąta podwojonego dla dowolnego  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Pochodne są wykorzystywane między innymi do wyznaczania równań stycznych. Równanie prostej stycznej do wykresu funkcji w punkcie 0 wyraża się wzorem:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

W podręcznikach [1, 2, 3] można znaleźć dodatkowe zadania z zakresu wyznaczania pochodnych funkcji z definicji oraz obliczania pochodnych za pomocą wzorów.

## Przykłady zadań z rozwiązaniami

**Zadanie 1.** Korzystając z definicji znaleźć pochodną funkcji oraz obliczyć ją przy pomocy wzorów:

(a)  $f_1(x) = 6x^2 + 1,$

(c)  $f_3(x) = \sqrt[3]{x^2 + 7x}$  w  $x_0 = 1,$

(b)  $f_2(x) = \frac{1}{x^3 - 1},$

(d)  $f_4(x) = 5 \log_3(2x + 1)$  w  $x_0 = 4.$

### Rozwiązania:

(a) Korzystając z wzorów na pochodne otrzymujemy od razu, że  $f'_1(x) = 12x$  dla  $x \in \mathbb{R}$ . Otrzymamy ten sam wynik korzystając z definicji:

$$\begin{aligned} f'_1(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(x+h)^2 + 1 - (6x^2 + 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(x+h)^2 + 1 - 6x^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(x+h)^2 - 6x^2}{h} \end{aligned}$$

$$= 6 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = 6 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h}$$

$$= 6 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 6 \cdot 2x = 12x.$$

(b) Dziedziną funkcji  $f_2$  jest zbiór  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Korzystając z wzorów

$$f'_2(x) = [(x^3 - 1)^{-1}]' = -(x^3 - 1)^{-2} (x^3 - 1)' = -\frac{1}{x^3 - 1} \cdot 3x^2 = \frac{-3x^2}{(x^3 - 1)^2}.$$

Natomiast z korzystając z definicji

$$f'_2(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^3 - 1} - \frac{1}{x^3 - 1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3 - 1 - [(x+h)^3 - 1]}{[(x+h)^3 - 1](x^3 - 1)}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 - 1 - (x+h)^3 + 1}{h[(x+h)^3 - 1](x^3 - 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 - (x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3)}{h[(x+h)^3 - 1](x^3 - 1)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^3 - 3x^2h - 3xh^2 - h^3}{h[(x+h)^3 - 1](x^3 - 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3x^2h - 3xh^2 - h^3}{h[(x+h)^3 - 1](x^3 - 1)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-3x^2 - 3xh - h^2)}{h[(x+h)^3 - 1](x^3 - 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3x^2 - 3xh - h^2}{[(x+h)^3 - 1](x^3 - 1)} = \frac{-3x^2}{(x^3 - 1)^2}.$$

Dziedzina pochodnej  $f'_2$  jest identyczna z dziedziną funkcji  $f_2$ .

(c) W przypadku tego podpunktu na początek skorzystamy z definicji pochodnej funkcji w punkcie, w tym celu będziemy korzystali ze wzoru skróconego mnożenia – różnicy sześcianów:

$$f'_3(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_3(1+h) - f_3(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(1+h)^2 + 7(1+h)} - \sqrt[3]{1^2 + 7 \cdot 1}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + 2h + h^2 + 7 + 7h} - \sqrt[3]{8}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h^2 + 9h + 8} - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h^2 + 9h + 8} - 2}{h} \cdot \frac{(\sqrt[3]{h^2 + 9h + 8})^2 + 2\sqrt[3]{h^2 + 9h + 8} + 4}{(\sqrt[3]{h^2 + 9h + 8})^2 + 2\sqrt[3]{h^2 + 9h + 8} + 4}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 9h + 8 - 8}{h[(\sqrt[3]{h^2 + 9h + 8})^2 + 2\sqrt[3]{h^2 + 9h + 8} + 4]}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+9)}{h \left[ \left( \sqrt[3]{h^2+9h+8} \right)^2 + 2\sqrt[3]{h^2+9h+8} + 4 \right]} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h+9}{\left( \sqrt[3]{h^2+9h+8} \right)^2 + 2\sqrt[3]{h^2+9h+8} + 4} = \frac{9}{2^2 + 2 \cdot 2 + 4} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$

Sprawdźmy teraz ten wynik przy pomocy wzorów na pochodne

$$f'_3(x) = \left[ (x^2 + 7x)^{\frac{1}{3}} \right]' = \frac{1}{3} (x^2 + 7x)^{-\frac{2}{3}} (x^2 + 7x)' = \frac{2x+7}{3 \left( \sqrt[3]{x^2+7x} \right)^2}$$

i obliczmy jej wartość dla  $x_0 = 1$ :  $f'_3(1) = \frac{2+7}{3 \left( \sqrt[3]{1+7} \right)^2} = \frac{9}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}.$

[d] W tym przykładzie do znalezienia pochodnej funkcji z definicji potrzebne będą wzory na różnicę oraz zmianę podstawy logarytmu:

$$\begin{aligned}
 f'_4(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_4(4+h) - f_4(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5 \log_3 [2(4+h) + 1] - 5 \log_3 9}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5 \log_3 (9+2h) - 5 \log_3 9}{h} = 5 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_3 \frac{9+2h}{9}}{h} = 5 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{h} \log_3 \left( 1 + \frac{2h}{9} \right) \right] \\
 &= 5 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \log_3 \left( 1 + \frac{2h}{9} \right)^{\frac{1}{h}} = 5 \cdot \log_3 \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{2h}{9} \right)^{\frac{1}{h}} \right] = 5 \cdot \log_3 e^{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{9} \cdot \frac{1}{h}} \\
 &= 5 \cdot \log_3 e^{\frac{2}{9}} = 5 \cdot \frac{\ln e^{\frac{2}{9}}}{\ln 3} = \frac{5 \cdot \frac{2}{9}}{\ln 3} = \frac{10}{9 \ln 3}.
 \end{aligned}$$

Sprawdzając wynik za pomocą wzorów otrzymujemy:

$$f'_4(x) = \frac{5}{(2x+1) \ln 3} \cdot (2x+1)' = \frac{10}{(2x+1) \ln 3} \text{ oraz } f'_4(4) = \frac{10}{9 \ln 3}.$$

**Zadanie 2.** Obliczyć pierwszą pochodną funkcji:

[a]  $f_1(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^4 - 1},$

[d]  $f_4(x) = \arctg^2 \left( \frac{1 - \ln x}{x} \right),$

[b]  $f_2(x) = \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x,$

[e]  $f_5(x) = \frac{2}{3} x^3 \cdot \sqrt{3x^3 - 12x},$

[c]  $f_3(x) = 3x^2 \cdot \ln^2(x^5) + 2^{\lg \frac{x}{2}},$

[f]  $f_6(x) = (\ln x)^{\frac{3}{x}}.$

### Rozwiązania:

[a] Dziedziną funkcji  $f_1$  jest zbiór  $x \in \mathbb{R}$ , dla których  $x^4 - 1 \neq 0$ . Stąd jest to zbiór  $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{(x^2 + 2x - 1)'(x^4 - 1) - (x^2 + 2x - 1)(x^4 - 1)'}{(x^4 - 1)^2} \\ &= \frac{(2x + 2)(x^4 - 1) - (x^2 + 2x - 1)4x^3}{(x^4 - 1)^2} \\ &= \frac{2x^5 - 2x + 2x^4 - 2 - (4x^5 + 8x^4 - 4x^3)}{(x^4 - 1)^2} \\ &= \frac{2x^5 - 2x + 2x^4 - 2 - 4x^5 - 8x^4 + 4x^3}{(x^4 - 1)^2} = \frac{-2x^5 - 6x^4 + 4x^3 - 2x - 2}{(x^4 - 1)^2}. \end{aligned}$$

Dziedziną pochodnej jest  $D_{f_1'} = D_{f_1}$ .

[b] Nie ma punktów, w których nie istnieje wartość funkcji  $f_2$  stąd  $D_{f_2} = \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= -\sin x - \frac{1}{3}(\cos^3 x)' = -\sin x - \frac{1}{3} \cdot 3 \cos^2 x (\cos x)' \\ &= -\sin x - \cos^2 x (-\sin x) = -\sin x + \sin x \cos^2 x = \sin x (\cos^2 x - 1) \\ &= -\sin x (1 - \cos^2 x) = -\sin x (\sin^2 x) = -\sin^3 x. \end{aligned}$$

Dziedziną pochodnej jest  $D_{f_2'} = D_{f_2}$ .

[c] Ze względu na występujące w wyrażeniu funkcje dziedziną funkcji będą  $x \in \mathbb{R}$ , dla których  $x^5 > 0$  i  $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ . Stąd  $x > 0$  oraz  $x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Zatem dziedziną tej funkcji jest zbiór  $D_{f_3} = \mathbb{R}_+ \setminus \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{N}\}$ .

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= (3x^2)' \cdot \ln^2(x^5) + 3x^2 \cdot [\ln^2(x^5)]' + 2^{\lg \frac{x}{2}} \cdot \ln 2 \cdot \left(\lg \frac{x}{2}\right)' \\ &= 6x \ln^2(x^5) + 3x^2 \cdot 2 \ln(x^5) \cdot [\ln(x^5)]' + 2^{\lg \frac{x}{2}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' \\ &= 6x \ln^2(x^5) + 6x^2 \cdot \ln(x^5) \cdot \frac{1}{x^5} \cdot (x^5)' + 2^{\lg \frac{x}{2}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \\ &= 6x \ln^2(x^5) + 6x^2 \cdot \ln(x^5) \cdot \frac{1}{x^5} \cdot 5x^4 + 2^{\lg \frac{x}{2}-1} \cdot \frac{\ln 2}{\cos^2 \frac{x}{2}} \\ &= 6x \ln^2(x^5) + 30x \ln(x^5) + 2^{\lg \frac{x}{2}-1} \cdot \frac{\ln 2}{\cos^2 \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

$$= 6x \ln(x^5) [\ln(x^5) + 5] + 2^{\lg \frac{x}{2} - 1} \cdot \frac{\ln 2}{\cos^2 \frac{x}{2}}$$

Dziedziną pochodnej jest  $D_{f'_3} = D_{f_3}$ .

(d) Dziedziną funkcji ze względu na logarytm jest zbiór  $D_{f_4} = (0, +\infty)$ .

$$\begin{aligned} f'_4(x) &= 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1 - \ln x}{x} \right) \cdot \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{1 - \ln x}{x} \right) \right]' \\ &= 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1 - \ln x}{x} \right) \cdot \frac{1}{1 + \left( \frac{1 - \ln x}{x} \right)^2} \cdot \left( \frac{1 - \ln x}{x} \right)' \\ &= 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1 - \ln x}{x} \right) \cdot \frac{1}{1 + \left( \frac{1 - \ln x}{x} \right)^2} \cdot \frac{(1 - \ln x)' \cdot x - (1 - \ln x) \cdot x'}{x^2} \\ &= 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1 - \ln x}{x} \right) \cdot \frac{1}{1 + \left( \frac{1 - \ln x}{x} \right)^2} \cdot \frac{-\frac{1}{x} \cdot x - (1 - \ln x)}{x^2} \\ &= 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1 - \ln x}{x} \right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{(1 - \ln x)^2}{x^2}} \cdot \frac{-1 - 1 + \ln x}{x^2} \\ &= 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1 - \ln x}{x} \right) \cdot \frac{\ln x - 2}{x^2 + (1 - \ln x)^2} \end{aligned}$$

Dziedziną pochodnej jest  $D_{f'_4} = D_{f_4}$ .

(e) Dziedziną funkcji jest zbiór  $x$ , dla których  $3x^3 - 12x \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) \geq 0$   
 $\Leftrightarrow x(x - 2)(x + 2) \geq 0$ . Stąd  $D_{f_5} = [-2, 0] \cup [2, +\infty)$ .

$$\begin{aligned} f'_5(x) &= \frac{2}{3} (x^3)' \sqrt{3x^3 - 12x} + \frac{2}{3} x^3 \cdot (\sqrt{3x^3 - 12x})' \\ &= \frac{2}{3} \cdot 3x^2 \cdot \sqrt{3x^3 - 12x} + \frac{2}{3} x^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x^3 - 12x}} (3x^3 - 12x)' \\ &= 2x^2 \cdot \sqrt{3x^3 - 12x} + \frac{x^3}{3} \cdot \frac{9x^2 - 12}{\sqrt{3x^3 - 12x}} \\ &= 2x^2 \cdot \sqrt{3x^3 - 12x} + \frac{x^3(3x^2 - 4)}{\sqrt{3x^3 - 12x}} = \frac{2x^2 \cdot (3x^3 - 12x) + x^3(3x^2 - 4)}{\sqrt{3x^3 - 12x}} \\ &= \frac{x^2(6x^3 - 24x + 3x^3 - 4x)}{\sqrt{3x^3 - 12x}} = \frac{x^2(9x^3 - 28x)}{\sqrt{3x^3 - 12x}} = \frac{x^3(9x^2 - 28)}{\sqrt{3x^3 - 12x}}. \end{aligned}$$

Ze względu na pierwiastek kwadratowy występujący w mianowniku pochodnej musimy dodatkowo założyć, że  $3x^3 - 12x \neq 0$ . Zatem  $D_{f'_5} = (-2, 0) \cup (2, +\infty) \subset D_{f_5}$ .

(f) Aby obliczyć pochodną tej funkcji, musimy dokonać zawężenia dziedziny do argumentów, dla których podstawa potęgi jest większa od zera, to jest  $D_{f_6} = (1, +\infty)$ . Przy tak dobranej dziedzinie można zapisać funkcję w postaci logarytmiczno-wykładniczej:

$$f_6(x) = (\ln x)^{\frac{3}{x}} = e^{\ln(\ln x) \cdot \frac{3}{x}} = e^{\frac{3}{x} \ln(\ln x)}. \text{ Wówczas:}$$

$$\begin{aligned} f'_6(x) &= e^{\frac{3}{x} \ln(\ln x)} \cdot \left[ \frac{3}{x} \ln(\ln x) \right]' = (\ln x)^{\frac{3}{x}} \left[ \frac{3 \ln(\ln x)}{x} \right]' \\ &= 3(\ln x)^{\frac{3}{x}} \cdot \frac{[\ln(\ln x)]' \cdot x - \ln(\ln x) \cdot x'}{x^2} = 3(\ln x)^{\frac{3}{x}} \cdot \frac{\frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' \cdot x - \ln(\ln x)}{x^2} \\ &= 3(\ln x)^{\frac{3}{x}} \cdot \frac{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \cdot x - \ln(\ln x)}{x^2} = 3(\ln x)^{\frac{3}{x}} \cdot \frac{\frac{1}{\ln x} - \ln(\ln x)}{x^2} \\ &= 3(\ln x)^{\frac{3}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x \cdot \ln(\ln x)}{\ln x \cdot x^2} = 3(\ln x)^{\frac{3}{x}-1} \cdot \frac{1 - \ln x \cdot \ln(\ln x)}{x^2} \end{aligned}$$

Dziedziną pochodnej jest  $D_{f'_6} = D_{f_6}$ .

**Zadanie 3.** Obliczyć pierwszą oraz drugą pochodną funkcji:

(a)  $f_1(x) = \frac{12}{x} - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4},$

(c)  $f_3(x) = (5x^2 + 1)(2\sqrt{x} - 1),$

(d)  $f_4(x) = e^{-x} \cdot \sqrt{x^3 - 4x},$

(b)  $f_2(x) = \frac{1 - 4x}{x - 3},$

(e)  $f_5(x) = (2x)^{\lg x}$

**Rozwiązania:**

(a) Ponieważ w mianownikach znajdują się  $x$  o różnych potęgach, dziedziną jest zbiór  $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

$$\begin{aligned} f'_1(x) &= (12 \cdot x^{-1} - 4 \cdot x^{-3} + x^{-4})' = 12 \cdot (-1) \cdot x^{-2} - 4 \cdot (-3) \cdot x^{-4} - 4 \cdot x^{-5} \\ &= -12 \cdot x^{-2} + 12 \cdot x^{-4} - 4 \cdot x^{-5} = -\frac{12}{x^2} + \frac{12}{x^4} - \frac{4}{x^5}, \\ f''_1(x) &= (-12 \cdot x^{-2} + 12 \cdot x^{-4} - 4 \cdot x^{-5})' = -12 \cdot (-2) \cdot x^{-3} + 12 \cdot (-4) \cdot x^{-5} \\ &\quad - 4 \cdot (-5) \cdot x^{-6} = 24 \cdot x^{-3} - 48 \cdot x^{-5} + 20 \cdot x^{-6} = \frac{24}{x^3} - \frac{48}{x^5} + \frac{20}{x^6}. \end{aligned}$$

Dziedziny pochodnych obu pochodnych są równe dziedzinie funkcji.

(b) Ze względu na wyrażenie występujące w mianowniku  $D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ .

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \frac{(1-4x)'(x-3) - (1-4x)(x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{-4(x-3) - (1-4x) \cdot 1}{(x-3)^2} \\ &= \frac{-4x + 12 - 1 + 4x}{(x-3)^2} = \frac{11}{(x-3)^2}, \\ f_2''(x) &= \left( \frac{11}{(x-3)^2} \right)' = (11 \cdot (x-3)^{-2})' = 11 \cdot (-2)(x-3)^{-3} = -\frac{22}{(x-3)^3}. \end{aligned}$$

Stąd  $D_{f_2} = D_{f_2'} = D_{f_2''}$ .

(c) Ze względu na pierwiastek kwadratowy  $D_{f_3} = [0, +\infty)$ .

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= (5x^2 + 1)'(2\sqrt{x} - 1) + (5x^2 + 1)(2\sqrt{x} - 1)' = 10x(2\sqrt{x} - 1) \\ &\quad + (5x^2 + 1) \frac{2}{2\sqrt{x}} = 20x\sqrt{x} - 10x + (5x^2 + 1) \frac{1}{\sqrt{x}} = 20x\sqrt{x} - 10x + \frac{5x^2}{\sqrt{x}} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{x}} = 20x\sqrt{x} - 10x + 5x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 25x^{\frac{3}{2}} - 10x + x^{-\frac{1}{2}} \\ f_3''(x) &= (25x^{\frac{3}{2}} - 10x + x^{-\frac{1}{2}})' = 25 \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} - 10 - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{75}{2}\sqrt{x} - 10 - \frac{1}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Zatem  $D_{f_3'} = D_{f_3''} = (0, +\infty) \subset D_{f_3}$ .

(d) Ze względu na wyrażenie pod pierwiastkiem kwadratowym  $D_{f_4} = [-2, 0] \cup [2, +\infty)$ .

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= (e^{-x})' \cdot \sqrt{x^3 - 4x} + e^{-x} \cdot (\sqrt{x^3 - 4x})' = -e^{-x} \cdot \sqrt{x^3 - 4x} \\ &\quad + e^{-x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3 - 4x}} \cdot (x^3 - 4x)' = -e^{-x} \cdot \sqrt{x^3 - 4x} + \frac{e^{-x} \cdot (3x^2 - 4)}{2\sqrt{x^3 - 4x}} \\ &= \frac{-2e^{-x} \cdot (x^3 - 4x) + e^{-x} \cdot (3x^2 - 4)}{2\sqrt{x^3 - 4x}} = \frac{e^{-x}(-2x^3 + 3x^2 + 8x - 4)}{2\sqrt{x^3 - 4x}}, \\ f_4''(x) &= \frac{[e^{-x}(-2x^3 + 3x^2 + 8x - 4)]' \cdot 2\sqrt{x^3 - 4x} - \frac{e^{-x}(-2x^3 + 3x^2 + 8x - 4) \cdot (3x^2 - 4)}{\sqrt{x^3 - 4x}}}{4 \cdot (x^3 - 4x)} = (\star). \end{aligned}$$

Ze względu na skomplikowanie wyrażenia w liczniku obliczymy najpierw pochodną iloczynu w nawiasie kwadratowym.

$$\begin{aligned} [e^{-x}(-2x^3 + 3x^2 + 8x - 4)]' &= -e^{-x}(-2x^3 + 3x^2 + 8x - 4) + e^{-x}(-6x^2 + 6x + 8) \\ &= e^{-x}(2x^3 - 3x^2 - 8x + 4 - 6x^2 + 6x + 8) = e^{-x}(2x^3 - 9x^2 - 2x + 12) \end{aligned}$$

Wówczas po sprowadzeniu wyrażenia w liczniku do wspólnego mianownika oraz wyłączeniu przed nawias  $e^{-x}$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned}(\star) &= e^{-x} \cdot \frac{(2x^3 - 9x^2 - 2x + 12) 2(x^3 - 4x) - (-2x^3 + 3x^2 + 8x - 4)(3x^2 - 4)}{4(x^3 - 4x)\sqrt{x^3 - 4x}} \\ &= e^{-x} \cdot \frac{4x^6 - 12x^5 - 29x^4 + 64x^3 + 40x^2 - 64x - 16}{4(x^3 - 4x)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

Zatem ponieważ pierwiastki kwadratowe występują w mianownikach pierwszej oraz drugiej pochodnej  $D_{f_4'} = D_{f_4''} = (-2, 0) \cup (0, +\infty) \subset D_{f_4}$ .

(e) Po ograniczenia dziedziny naturalnej funkcji  $f_5$  do argumentów, dla których podstawa potęgi jest dodatnia tj.  $D_{f_5} = (0, +\infty) \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ . Wówczas możemy zapisać wzór funkcji w postaci, która umożliwi nam obliczenie jej pochodnej:

$$\begin{aligned}f_5(x) &= e^{\ln(2x)\operatorname{tg} x} = e^{\operatorname{tg} x \cdot \ln(2x)}. \\ f_5'(x) &= e^{\operatorname{tg} x \cdot \ln(2x)} \cdot (\operatorname{tg} x \cdot \ln(2x))' = (2x)^{\operatorname{tg} x} \cdot [(\operatorname{tg} x)' \cdot \ln(2x) + \operatorname{tg} x \cdot (\ln(2x))'] \\ &= (2x)^{\operatorname{tg} x} \cdot \left( \frac{\ln(2x)}{\cos^2 x} + \operatorname{tg} x \cdot \frac{2}{2x} \right) = (2x)^{\operatorname{tg} x} \cdot \left( \frac{\ln(2x)}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right), \\ f_5''(x) &= [(2x)^{\operatorname{tg} x}]' \left( \frac{\ln(2x)}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right) + (2x)^{\operatorname{tg} x} \left( \frac{\ln(2x)}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)' \\ &= (2x)^{\operatorname{tg} x} \left( \frac{\ln(2x)}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^2 + (2x)^{\operatorname{tg} x} \left( \frac{\frac{\cos^2 x}{x} - \ln(2x) \cdot 2 \cos x \cdot (-\sin x)}{\cos^4 x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{x}{\sin^2 x} - \operatorname{tg} x}{x^2} \right) = (2x)^{\operatorname{tg} x} \left( \frac{\ln(2x)}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^2 \\ &\quad + (2x)^{\operatorname{tg} x} \cdot \left( \frac{\cos x + 2x \ln(2x) \sin x}{x \cos^3 x} + \frac{\frac{x}{\sin^2 x} - \operatorname{tg} x}{x^2} \right) \\ &= (2x)^{\operatorname{tg} x} \left[ \left( \frac{\ln(2x)}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^2 + \frac{\cos x + 2x \ln(2x) \sin x}{x \cos^3 x} + \frac{\frac{x}{\sin^2 x} - \operatorname{tg} x}{x^2} \right].\end{aligned}$$

Stąd  $D_{f_5} = D_{f_5'} = D_{f_5''}$ .

**Zadanie 4.** Obliczyć wartość pochodnej funkcji w podanym punkcie:

$$[a] f_1(x) = 4^x \cdot \ln x \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) \text{ w } x_0 = 1, \quad [b] f_2(x) = \frac{\sin x - 1}{x} \text{ w } x_0 = -\frac{\pi}{2}.$$

**Rozwiązania:**



(a) Funkcja ta oraz jej pochodna mają dziedzinę  $D_{f_1} = D_{f'_1} = (0, +\infty)$ .

$$\begin{aligned} f'_1(x) &= \left[ (4^x \cdot \ln x) \cdot \left( 1 - \frac{1}{x} \right) \right]' = (4^x \cdot \ln x)' \cdot \left( 1 - \frac{1}{x} \right) + (4^x \cdot \ln x) \cdot \left( 1 - \frac{1}{x} \right)' \\ &= [(4^x)' \cdot \ln x + 4^x \cdot (\ln x)'] \cdot \left( 1 - \frac{1}{x} \right) + 4^x \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x^2} \\ &= \left( 4^x \cdot \ln 4 \cdot \ln x + 4^x \cdot \frac{1}{x} \right) \cdot \left( 1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{4^x \cdot \ln x}{x^2} = 4^x \cdot \ln 4 \cdot \ln x + \frac{4^x}{x} \\ &\quad - \frac{4^x \cdot \ln 4 \cdot \ln x}{x} - \frac{4^x}{x^2} + \frac{4^x \cdot \ln x}{x^2} = 4^x \cdot \ln 4 \cdot \ln x + \frac{4^x - 4^x \cdot \ln 4 \cdot \ln x}{x} \\ &\quad + \frac{4^x \cdot \ln x - 4^x}{x^2} = 4^x \cdot \left( \ln 4 \cdot \ln x + \frac{1 - \ln 4 \cdot \ln x}{x} + \frac{\ln x - 1}{x^2} \right). \\ f'_1(1) &= 4 \cdot \left( \ln 4 \cdot \ln 1 + \frac{1 - \ln 4 \cdot \ln 1}{1} + \frac{\ln 1 - 1}{1^2} \right) = 4 \cdot \left( 0 + \frac{1 - 0}{1} + \frac{0 - 1}{1} \right) \\ &= 4 \cdot (1 - 1) = 4 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

(b) Funkcja ta oraz jej pochodna mają dziedzinę  $D_{f_2} = D_{f'_2} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

$$\begin{aligned} f'_2(x) &= \frac{(\sin x - 1)' \cdot x - (\sin x - 1) \cdot x'}{x^2} = \frac{\cos x \cdot x - (\sin x - 1) \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{\cos x \cdot x - \sin x + 1}{x^2}. \\ f'_2\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 1}{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{0 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) - (-1) + 1}{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{2}{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{8}{\pi^2}. \end{aligned}$$

**Zadanie 5.** Napisać równanie prostej prostopadłej do stycznej do wykresu funkcji  $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$  w punkcie o odciętej równej  $-1$ .

**Rozwiązanie:** Zaczniemy od obliczenia współczynnika kierunkowego prostej stycznej korzystając z pochodnej:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3}} \cdot (2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}, f'(-1) = \frac{-1}{\sqrt{1 + 3}} = -\frac{1}{2}$$

Iloczyn współczynników kierunkowych prostych, które są do siebie prostopadłe jest równy  $-1$ , stąd współczynnik prostej prostopadłej do stycznej jest równy  $2$ . Prosta ta ma więc równanie  $y = 2x + b$ . Musi ona również przechodzić przez punkt należący do wykresu funkcji  $f$  o odciętej równej  $-1$ . Zatem przez punkt o współrzędnych  $(-1, 2)$ . Zatem  $2 = 2 \cdot (-1) + b$  i stąd  $b = 4$ . Stąd jest to prosta o równaniu  $y = 2x + 4$ .

## Zadania do samodzielnego rozwiązywania

**Zadanie 6.** Korzystając z definicji znaleźć pochodną funkcji:

(a)  $f_1(x) = 3x^3 + 2x,$

(d)  $f_4(x) = 2 \sin x$  w  $x_0 = \frac{\pi}{4},$

(b)  $f_2(x) = \frac{1}{6x^2},$

(e)  $f_5(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$  w  $x_0 = 1,$

(c)  $f_3(x) = \sqrt{2x-1},$

(f)  $f_6(x) = \frac{3}{\cos x}$  w  $x_0 = \frac{\pi}{3}.$

**Zadanie 7.** Obliczyć pierwszą pochodną funkcji:

(a)  $f_1(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3\sqrt[5]{x^3},$

(g)  $f_7(x) = \sin \frac{3x^2}{1+x^3},$

(b)  $f_2(x) = \operatorname{tg} x + \frac{1}{x^3},$

(h)  $f_8(x) = \log_2(\sin x),$

(c)  $f_3(x) = \frac{e^x}{\ln x},$

(i)  $f_9(x) = \frac{(x^2+2)e^x}{\sqrt{x}},$

(d)  $f_4(x) = (1+x)\sqrt{x},$

(j)  $f_{10}(x) = 2^{-x^2 \cdot \cos x},$

(e)  $f_5(x) = 3^x \cdot \cos x,$

(k)  $f_{11}(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{x^2},$

(f)  $f_6(x) = x^2 \cdot \operatorname{tg} x,$

(l)  $f_{12}(x) = (\cos x)^{2x}.$

**Zadanie 8.** Obliczyć pierwszą oraz drugą pochodną funkcji:

(a)  $f_1(x) = 2x^3 + \sqrt[7]{x^2},$

(e)  $f_5(x) = \frac{x^3-2}{x+3},$

(b)  $f_2(x) = \log x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}},$

(f)  $f_6(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1},$

(c)  $f_3(x) = (x^2-4x) \cdot \cos x,$

(d)  $f_4(x) = e^x \cdot \sin x,$

(g)  $f_7(x) = (\sqrt{x}-1)^2 - (x^2+1)^3,$

(h)  $f_8(x) = \ln(1 + 3x)$ ,

(j)  $f_{10}(x) = 2^{-3x} \cdot \cos x$ ,

(i)  $f_9(x) = \frac{x-1}{(x^2+2)^2}$ ,

(k)  $f_{11}(x) = \sin^3 x$ ,

(l)  $f_{12}(x) = x^{e^x}$ .

**Zadanie 9.** Obliczyć wartość pochodnej funkcji w podanym punkcie:

(a)  $f_1(x) = 7x + \cos x$  w  $x_0 = 0$ ,

(e)  $f_5(x) = \log_5(x^2 + 1)$  w  $x_0 = 2$ ,

(b)  $f_2(x) = x^4 \cdot e^x$  w  $x_0 = 2$ ,

(f)  $f_6(x) = 3 \cdot \operatorname{ctg}(2x)$  w  $x_0 = \frac{\pi}{4}$ ,

(c)  $f_3(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$  w  $x_0 = \frac{1}{2}$ ,

(g)  $f_7(x) = e^{8 \cos(x^2)}$  w  $x_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ,

(d)  $f_4(x) = \sin x \cdot \cos^2 x$  w  $x_0 = \frac{\pi}{6}$ ,

(h)  $f_8(x) = 6 \sin(3x^2)$  w  $x_0 = \frac{1}{3}$ .

**Zadanie 10.** Wyznaczyć wszystkie punkty, w których proste styczne do wykresu funkcji  $h(x) = \frac{2x^2}{x-2}$  są równoległe do osi  $Ox$ . Napisać równania tych stycznych.

**Zadanie 11.** Napisać równanie prostej stycznej do wykresu funkcji  $f(x) = \left(3x + \frac{1}{x}\right)^2$  w punkcie  $(1, f(1))$ .

**Zadanie 12.** Napisać równanie prostej prostopadłej do stycznej do wykresu funkcji  $g(x) = \sin^2(\pi x)$  w punkcie o odciętej równej  $\frac{1}{4}$ .

## Literatura

- [1] Gewert, Marian, i Skoczylas, Zbigniew. *Analiza matematyczna 1: Przykłady i zadania*. Wyd. 26, Oficyna Wydawnicza GIS, 2018.
- [2] Krywicki, Włodzimierz, i Włodarski, Lech. *Analiza matematyczna w zadaniach*. Cz. 1. Wyd. 29, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2003.
- [3] Stankiewicz, Władysław. *Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych. Część B*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2012.



**Materiały do przedmiotu:**

**MATEMATYKA**

**Ćwiczenia nr 4**

Autor:

dr inż. Anna Futa

mgr inż. Michał Błaszczkowski

mgr inż. Magdalena Piłat-Rożek



Fundusze Europejskie  
dla Rozwoju Społecznego



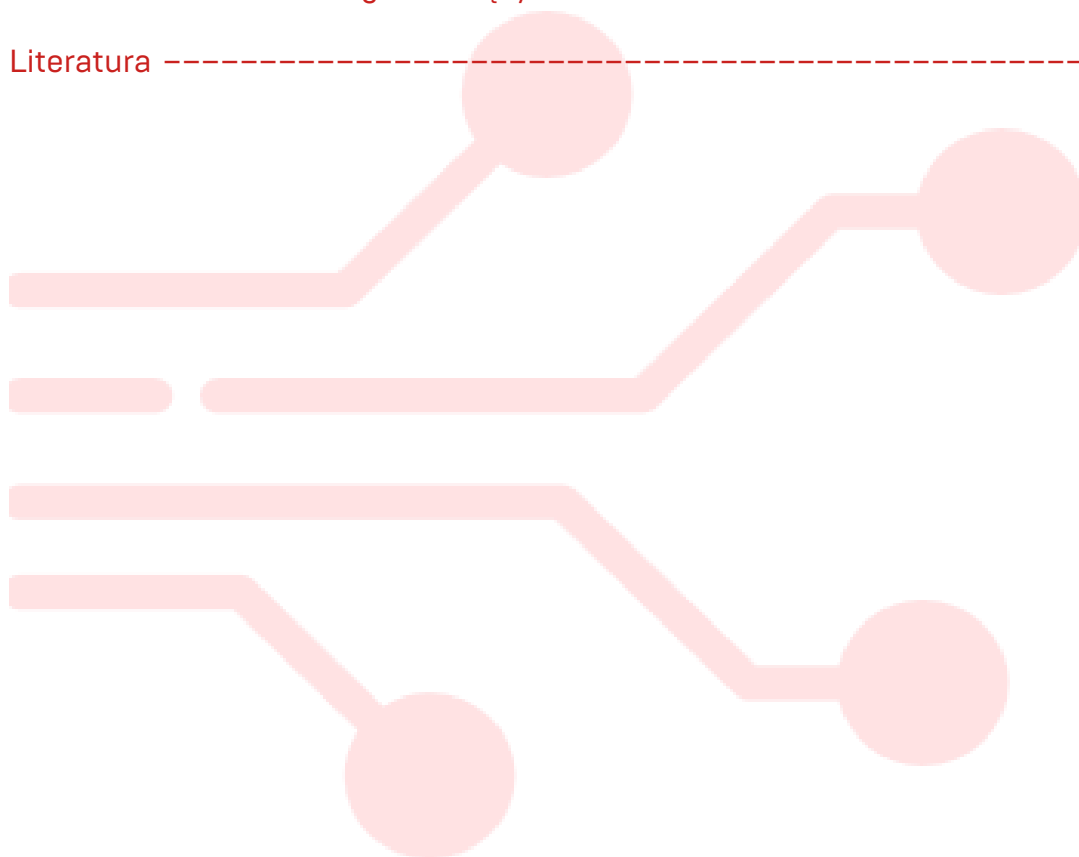
Rzeczpospolita  
Polska

Dofinansowane przez  
Unię Europejską



## Spis treści

|                                        |    |
|----------------------------------------|----|
| Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń         | 3  |
| Przykłady zadań z rozwiązaniami        | 4  |
| Zadania do samodzielnego rozwiązywania | 11 |
| Literatura                             | 11 |



## Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń

W zadaniach będziemy się skupiać na zagadnieniu monotoniczności funkcji oraz poszukiwaniu ich ekstremów lokalnych. Przypomnijmy zatem odmiany monotoniczności funkcji oraz warunki, które musi spełniać funkcja różniczkowalna  $f$  na przedziale  $P$ , aby ją tak nazywać:

- Jeżeli  $f'(x) = 0$ , to  $f$  jest stała na  $P$ ;
- Jeżeli  $f'(x) > 0$ , to  $f$  jest rosnąca na  $P$ ;
- Jeżeli  $f'(x) \geq 0$ , to  $f$  jest niemalejąca na  $P$ ;
- Jeżeli  $f'(x) < 0$ , to  $f$  jest malejąca na  $P$ ;
- Jeżeli  $f'(x) = 0$ , to  $f$  jest nierosnąca na  $P$ .

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum lokalnego funkcji różniczkowalnej  $f$  w punkcie  $x_0$  jest aby  $f'(x_0) = 0$ . Nie jest to jednak warunek wystarczający, a więc istnieją funkcje, dla których mimo że w  $x_0$  będzie ten warunek spełniony, to nie będzie tam występowało ekstremum lokalne. Przykładem takiej funkcji jest  $f(x) = x^3$ . Warunki wystarczające istnienia ekstremum lokalnego można wyróżnić dwa.

**Pierwszy warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego:** Jeżeli  $f$  jest funkcją określoną w otoczeniu punktu  $x_0 \in \mathbb{R}$ , różniczkowalną w pewnym jego sąsiedztwie oraz ciągłą w  $x_0$ , wówczas jeśli istnieje  $\delta > 0$ , taka że:

- $f'(x) > 0$  dla  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  oraz  $f'(x) < 0$  dla  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , to w punkcie  $x_0$  funkcja ma ekstremum lokalne maksimum,
- $f'(x) < 0$  dla  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  oraz  $f'(x) > 0$  dla  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , to w punkcie  $x_0$  funkcja ma ekstremum lokalne minimum.

W pozostałych przypadkach w  $x_0$  funkcja nie osiąga ekstremum lokalnego.

**Drugi warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego:** Jeżeli  $f$  jest funkcją określoną w otoczeniu punktu  $x_0 \in \mathbb{R}$  oraz spełniającą równocześnie warunki:

$$[1] \quad f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

$$[2] \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

to jeśli  $n \geq 2$  jest liczbą parzystą, to funkcja  $f$  osiąga w  $x_0$  ekstremum lokalne:

- gdy  $f^{(n)}(x_0) > 0$  minimum lokalne,
- gdy  $f^{(n)}(x_0) < 0$  maksimum lokalne.

Jeśli natomiast  $n$  jest nieparzyste to ekstremum nie występuje w punkcie  $x_0$ .

W podręcznikach [1, 2, 3] można znaleźć dodatkowe zadania z zakresu wyznaczania przedziałów monotoniczności funkcji oraz ich ekstremów lokalnych.

## Przykłady zadań z rozwiązaniami

**Zadanie 1.** Z badać monotoniczność funkcji:

- (a)  $f_1(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 2$ , (d)  $f_4(x) = 2x + \sqrt[3]{(1-x)^2}$ ,  
 (b)  $f_2(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$ , (e)  $f_5(x) = x \cdot e^{-\frac{8x^3}{3}}$ ,  
 (c)  $f_3(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ , (f)  $f_6(x) = \ln(x^2 - 4)$ .

**Rozwiązania:**

(a) Dziedziną funkcji jest zbiór  $D_{f_1} = \mathbb{R}$ . Zbadajmy pochodną tej funkcji:

$f'_1(x) = 12x^2 + 6x - 6$ ,  $D_{f'_1} = \mathbb{R}$ . W celu zbadania przedziałów monotoniczności funkcji zbadamy miejsca zerowe  $f'_1$ .  $\Delta = 36 - 4 \cdot 12 \cdot (-6) = 36 + 288 = 324$ ,  $\sqrt{\Delta} = 18$ ,  $x_1 = \frac{-6-18}{24} = -1$ ,  $x_2 = \frac{-6+18}{24} = \frac{1}{2}$ . Wówczas

$$f'_1(x) > 0 \iff 12(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right) > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Zatem  $f'_1(x) < 0$  dla  $x \in (-1, \frac{1}{2})$ . Wynika stąd, że  $f_1$  jest rosnąca dla  $x \in (-\infty, -1)$  oraz  $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ , natomiast malejąca dla  $x \in (-1, \frac{1}{2})$ .

(b) Ponownie dziedziną funkcji jest zbiór  $D_{f_2} = \mathbb{R}$ .

$$f'_2(x) = \frac{3(x^2 + 1) - 3x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^2 + 3 - 6x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-3x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2}, D_{f'_2} = \mathbb{R}. \text{ Zatem}$$

$$f'_2(x) > 0 \iff \frac{-3(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} > 0 \iff -3(x-1)(x+1) > 0 \iff x \in (-1, 1).$$

Stąd  $f'_2(x) < 0$  dla  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ . Zatem funkcja  $f_2$  jest rosnąca dla  $x \in (-1, 1)$ , natomiast malejąca dla  $x \in (-\infty, -1)$  oraz  $x \in (1, +\infty)$ .

(c) Ze względu na pierwiastek kwadratowy musimy wyznaczyć zbiór  $x$ , dla których

$$\left(\frac{1+x}{1-x} \geq 0 \wedge 1-x \neq 0\right) \Leftrightarrow [(1+x)(1-x) \geq 0 \wedge x \neq 1]$$

$$\Leftrightarrow [(x+1)(x-1) \leq 0 \wedge x \neq 1] \Leftrightarrow (x \in [-1, 1] \wedge x \neq 1) \Leftrightarrow x \in [-1, 1).$$

Zatem  $D_{f_3} = [-1, 1)$ . Wówczas pochodna tej funkcji dana jest wzorem

$$f'_3(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{1 \cdot (1-x) - (1+x) \cdot (-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} (1-x)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} (1-x)^2}, D_{f'_3} = (-1, 1).$$

Pierwiastki kwadratowe oraz funkcja kwadratowa znajdująca się w mianowniku są dodatnie dla  $x \in (-1, 1)$ , stąd  $f'_3(x) > 0$ . Zatem  $f_3$  jest funkcją rosnącą w całej swojej dziedzinie.

(d) Dziedziną funkcji jest zbiór  $D_{f_4} = \mathbb{R}$ . Zbadajmy jej pochodną:

$$f'_4(x) = 2 + \left[(1-x)^{\frac{2}{3}}\right]' = 2 + \frac{2}{3} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{3}} \cdot (-1) = 2 - \frac{2}{3\sqrt[3]{1-x}}, D_{f'_4} = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

$$f'_4(x) > 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{2}{3\sqrt[3]{1-x}} > 0 \Leftrightarrow \frac{6\sqrt[3]{1-x} - 2}{3\sqrt[3]{1-x}} > 0.$$

Aby rozwiązać tę nierówność dokonamy podstawienia  $t := \sqrt[3]{1-x} \neq 0$ . Wówczas

$$\frac{6t-2}{3t} > 0 \Rightarrow (6t-2)t > 0 \Leftrightarrow t(3t-1) > 0 \Leftrightarrow t \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right).$$

Zatem  $\sqrt[3]{1-x} \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$  i stąd

$$\left(\sqrt[3]{1-x} < 0 \vee \sqrt[3]{1-x} > \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \left(1-x < 0 \vee 1-x > \frac{1}{27}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x > 1 \vee x < \frac{26}{27}\right) \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{26}{27}\right) \cup (1, +\infty)$$

Zatem  $f'_4(x) < 0$  dla  $x \in \left(\frac{26}{27}, 1\right)$ . Stąd  $f_4$  jest rosnąca dla  $x \in \left(-\infty, \frac{26}{27}\right)$  i  $x \in (1, +\infty)$  oraz malejąca dla  $x \in \left(\frac{26}{27}, 1\right)$ .



(e) Ponownie  $D_{f_5} = \mathbb{R}$ . Wówczas pochodna funkcji dana jest wzorem

$$\begin{aligned} f'_5(x) &= (x)' \cdot e^{-\frac{8x^3}{3}} + x \cdot \left(e^{-\frac{8x^3}{3}}\right)' = e^{-\frac{8x^3}{3}} + x \cdot e^{-\frac{8x^3}{3}} \left(-\frac{8x^3}{3}\right)' \\ &= e^{-\frac{8x^3}{3}} + x \cdot e^{-\frac{8x^3}{3}} \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) \cdot 3x^2 = e^{-\frac{8x^3}{3}} - 8x^3 \cdot e^{-\frac{8x^3}{3}} = e^{-\frac{8x^3}{3}} (1 - 8x^3). \end{aligned}$$

Dziedzina pochodnej jest identyczna z dziedziną funkcji wyjściowej. Ponieważ  $e^{-\frac{8x^3}{3}} > 0$ , znak pochodnej zależy od znaku wyrażenia  $1 - 8x^3$ , stąd  $f'_5(x) > 0$  dla  $x < \frac{1}{2}$  oraz  $f'_5(x) < 0$  dla  $x > \frac{1}{2}$ . Zatem  $f_5$  jest rosnąca dla  $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$  oraz malejąca dla  $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ .

(f) Dziedziną funkcji jest zbiór  $x \in \mathbb{R}$ , dla których  $x^2 - 4 > 0$ . Stąd dziedziną tą jest  $D_{f_6} = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ . Obliczmy teraz pochodną tej funkcji

$$f'_6(x) = \frac{1}{x^2 - 4} \cdot (x^2 - 4)' = \frac{2x}{x^2 - 4}, \quad D_{f'_6} = D_{f_6}.$$

$$f'_6(x) > 0 \iff \frac{2x}{x^2 - 4} > 0 \iff 2x(x^2 - 4) > 0 \iff x(x - 2)(x + 2) > 0.$$

Zatem  $f'_6(x) > 0$  dla  $x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$ , stąd  $f_6$  jest rosnąca dla  $x \in (-2, 0)$  oraz  $x \in (2, +\infty)$ . Dodatkowo  $f'_6(x) < 0$  dla  $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$  i stąd  $f_6$  jest malejąca dla  $x \in (-\infty, -2)$ , a także dla  $x \in (0, 2)$ .

**Zadanie 2.** Wyznaczyć, o ile istnieją, ekstrema lokalne funkcji:

(a)  $f_1(x) = \frac{16}{3}x^3 - x,$

(d)  $f_4(x) = \frac{1}{x} + \ln x,$

(b)  $f_2(x) = x^5 + x^3 + 1,$

(e)  $f_5(x) = e^{\frac{x^3}{4-x^2}},$

(c)  $f_3(x) = \frac{1}{x^4 - 1},$

(f)  $f_6(x) = x\sqrt{\frac{x}{2-x}}.$

**Rozwiązania:**

(a) Ze względu na fakt, że jest to wielomian dziedziną funkcji jest zbiór  $D_{f_1} = \mathbb{R}$ .

$$f'_1(x) = \frac{16}{3} \cdot 3x^2 - 1 = 16x^2 - 1 = (4x - 1)(4x + 1), \quad D_{f'_1} = D_{f_1}.$$

Z warunku koniecznego występowania ekstremum funkcji w punkcie otrzymujemy

$$f'_1(x) = 0 \iff (4x - 1)(4x + 1) = 0 \iff \left(x = \frac{1}{4} \vee x = -\frac{1}{4}\right).$$

Zatem zbiorem krytycznym punktów podejrzanych o bycie ekstremum lokalnym jest zbiór  $K = \{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$ . Z postaci wzoru funkcji  $f'_1$  jako funkcji kwadratowej wynika, że  $f'_1(x) > 0$  dla  $x \in (-\infty, -\frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}, +\infty)$ . Natomiast  $f'_1(x) < 0$  dla  $x \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ . Stąd w  $x = -\frac{1}{4}$  znak pochodnej zmienia się z dodatniego na ujemny, więc korzystając z I warunku dostatecznego istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej w tym punkcie występuje ekstremum lokalne maksimum o wartości

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{16}{3} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{1}{4} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{6}.$$

Natomiast w  $x = \frac{1}{4}$  znak pochodnej zmienia się z ujemnego na dodatni, więc w tym punkcie występuje ekstremum lokalne minimum o wartości

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{16}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{6}.$$

(b) Ponownie dziedziną funkcji jest zbiór  $D_{f_2} = \mathbb{R}$ .

$f'_2(x) = 5x^4 + 3x^2 = x^2(5x^2 + 3)$ ,  $D_{f'_2} = \mathbb{R}$ . Tym razem skorzystamy z II warunku dostatecznego istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej. W tym celu również znajdziemy argumenty funkcji, dla których pochodna się zeruje:

$$f'_2(x) = 0 \iff x^2(5x^2 + 3) = 0 \iff (x^2 = 0 \vee 5x^2 + 3 = 0) \iff x = 0.$$

Zbadamy zatem wartości kolejnych pochodnych funkcji  $f_2$  w  $x = 0$ .

$$\begin{aligned} f''_2(x) &= (5x^4 + 3x^2)' = 20x^3 + 6x, & f''_2(0) &= 20 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0, \\ f'''_2(x) &= (20x^3 + 6x)' = 60x^2 + 6, & f'''_2(0) &= 60 \cdot 0 + 6 = 6 > 0. \end{aligned}$$

Stąd  $f'_2(0) = f''_2(0) = 0$ , zaś  $f'''_2(0) \neq 0$ , więc  $n = 3$ . Skoro  $n$  jest liczbą nieparzystą to ekstremum lokalne w  $x = 0$  nie występuje. Zatem  $f_2$  nie posiada ekstremów lokalnych.

(c) Ze względu na mianownik we wzorze funkcji

$$x^4 - 1 \neq 0 \iff (x^2 - 1)(x^2 + 1) \neq 0 \iff (x - 1)(x + 1) \neq 0 \iff x \neq \pm 1.$$

Stąd  $D_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ . Obliczymy pochodną funkcji

$$f'_3(x) = [(x^4 - 1)^{-1}]' = -(x^4 - 1)^{-2} \cdot (x^4 - 1)' = \frac{-4x^3}{(x^4 - 1)^2}.$$

$D_{f'_3} = D_{f_3}$ . Obliczanie kolejnych pochodnych tej funkcji byłoby uciążliwe, więc ko-

rzystać będziemy z I warunku dostatecznego istnienia ekstremum lokalnego.

$$f'_3(x) = 0 \iff \frac{-4x^3}{(x^4 - 1)^2} = 0 \implies -4x^3 = 0 \iff x = 0,$$

$$f'_3(x) > 0 \iff \frac{-4x^3}{(x^4 - 1)^2} = 0 \implies -4x^3 > 0 \iff x^3 < 0 \iff x < 0.$$

Zatem uwzględniając dziedzinę  $D_{f'_3} = D_{f_3}$  pochodna  $f'_3(x) > 0$  dla  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ , natomiast  $f'_3(x) < 0$  dla  $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ . Stąd w  $x = 0$  pochodna zmienia znak i występuje w nim ekstremum lokalne maksimum o wartości  $f_3(0) = \frac{1}{0-1} = -1$ .

(d) Argumentem logarytmu naturalnego mogą być wyłącznie liczby dodatnie, natomiast ze względu na mianownik pierwszego wyrażenia  $x \neq 0$ , stąd  $D_{f_4} = \mathbb{R}_+$ .

$$f'_4(x) = (x^{-1})' + \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}.$$

$D_{f'_4} = D_{f_4}$  oraz  $f'_4(x) = 0 \iff x = 1$ . Zbadamy znak pochodnej

$$f'_4(x) > 0 \iff \frac{x-1}{x^2} > 0 \implies x-1 > 0 \iff x > 1.$$

Zatem po uwzględnieniu dziedziny pochodnej  $f'_4(x) > 0$  dla  $x \in (1, +\infty)$  oraz  $f'_4(x) < 0$  dla  $x \in (0, 1)$ . Stąd w punkcie krytycznym  $x = 1$  występuje zmiana znaku pochodnej z ujemnej na dodatni, przez co występuje w nich ekstremum lokalne minimum o wartości  $f_4(1) = \frac{1}{1} + \ln 1 = 1$ .

(e) W mianowniku wykładnika potęgi występuje wyrażenie, które powoduje ograniczenie dziedziny tj.  $4 - x^2 \neq 0 \iff x \neq \pm 2$ . Zatem  $D_{f_5} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ . Wówczas pochodna tej funkcji dana jest wzorem:

$$\begin{aligned} f'_5(x) &= \left( e^{\frac{x^3}{4-x^2}} \right)' = e^{\frac{x^3}{4-x^2}} \cdot \left( \frac{x^3}{4-x^2} \right)' = e^{\frac{x^3}{4-x^2}} \cdot \frac{3x^2(4-x^2) - x^3(-2x)}{(4-x^2)^2} \\ &= e^{\frac{x^3}{4-x^2}} \cdot \frac{12x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(4-x^2)^2} = e^{\frac{x^3}{4-x^2}} \cdot \frac{12x^2 - x^4}{(4-x^2)^2} = e^{\frac{x^3}{4-x^2}} \cdot \frac{-x^2(x^2 - 12)}{(4-x^2)^2} \\ &= e^{\frac{x^3}{4-x^2}} \cdot \frac{-x^2(x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3})}{(4-x^2)^2}. \end{aligned}$$

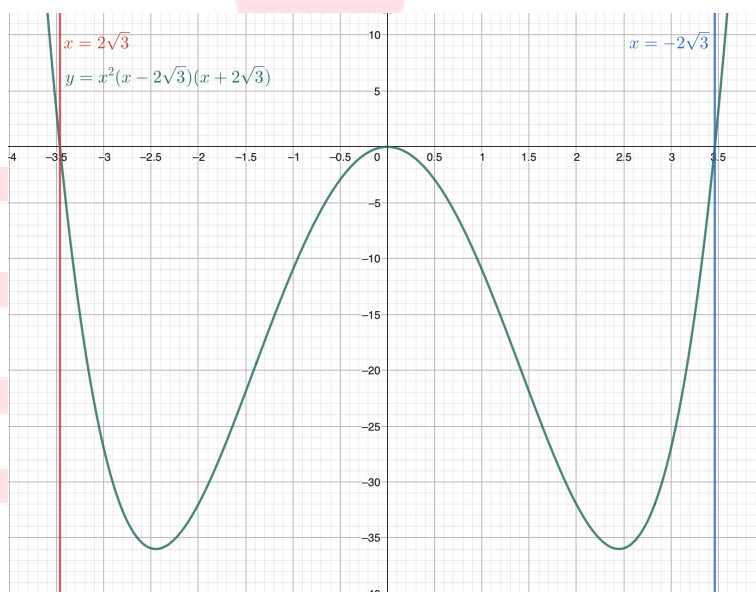
Zatem  $D_{f'_5} = D_{f_5}$ , zaś  $f'_5(x) = 0 \iff x^2(x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3}) = 0$ , stąd zbiór

punktów podejrzanych o wystąpienie ekstremum to  $K = \{-2\sqrt{3}, 0, 2\sqrt{3}\}$ .

Wówczas ze względu na dodatni mianownik oraz funkcję wykładniczą, która zawsze przyjmuje wartości dodatnie otrzymujemy

$$f'_5(x) > 0 \Rightarrow -x^2(x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3}) > 0 \Leftrightarrow x^2(x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3}) < 0.$$

Zatem zgodnie z wykresem na rysunku 1  $f'_5(x) > 0$  dla  $x \in (-2\sqrt{3}, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, 2\sqrt{3})$ . Wyłączenie  $-2$  oraz  $2$  z tego zbioru wynika z dziedziny funkcji. Natomiast  $f'_5(x) < 0$  dla  $x \in (-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, +\infty)$ .



**Rysunek 1.** Wykres funkcji o równaniu  $y = x^2(x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3})$

Wynika stąd, że w  $x = -2\sqrt{3}$  nastąpiła zmiana znaku pochodnej (z ujemnego na dodatni) przez co występuje w nim ekstremum minimum lokalne o wartości

$$f_5(2\sqrt{3}) = e^{\frac{(-2\sqrt{3})^3}{4 - (-2\sqrt{3})^2}} = e^{\frac{-8 \cdot 3\sqrt{3}}{4 - 12}} = e^{\frac{-24\sqrt{3}}{-8}} = e^{3\sqrt{3}}.$$

W  $x = 0$  nie zmienił się znak pochodnej, więc nie ma w tym punkcie ekstremum lokalnego. W  $x = 2\sqrt{3}$  natomiast ponownie zmienił się znak pochodnej (z dodatniego na ujemny), zatem w tym punkcie występuje ekstremum maksimum lokalne o wartości

$$f_5(2\sqrt{3}) = e^{\frac{(2\sqrt{3})^2}{4 - (2\sqrt{3})^2}} = e^{\frac{24\sqrt{3}}{-8}} = e^{-3\sqrt{3}}.$$

Z powyższych wyników można wysnuć wniosek, że wartość minimum lokalnego funkcji jest większa od wartości maksimum lokalnego. Jest to jednak możliwe ze względu

na to, że funkcja  $f_5$  jest nieciągła w  $x = -2$  oraz  $x = 2$ .

[f] Wzór funkcji, w którym występuje pierwiastek kwadratowy powoduje, że jej dziedziną będzie zbiór spełniający warunki

$$\left(\frac{x}{2-x} \geq 0 \wedge 2-x \neq 0\right) \Rightarrow (x(2-x) \geq 0 \wedge x \neq 2) \Leftrightarrow (x(x-2) \leq 0 \wedge x \neq 2) \\ \Leftrightarrow (x \in [0, 2] \wedge x \neq 2) \Leftrightarrow x \in [0, 2).$$

Stąd  $D_{f_6} = [0, 2)$ . Obliczymy pochodną tej funkcji

$$\begin{aligned} f'_6(x) &= \left(x \sqrt{\frac{x}{2-x}}\right)' = \sqrt{\frac{x}{2-x}} + x \left[\left(\frac{x}{2-x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = \sqrt{\frac{x}{2-x}} \\ &\quad + x \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{2-x}}} \cdot \left(\frac{x}{2-x}\right)' = \sqrt{\frac{x}{2-x}} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{2-x}}} \cdot \frac{2-x-x \cdot (-1)}{(2-x)^2} \\ &= \sqrt{\frac{x}{2-x}} + \frac{x}{2\sqrt{\frac{x}{2-x}}} \cdot \frac{2}{(2-x)^2} = \sqrt{\frac{x}{2-x}} + \frac{x}{\sqrt{\frac{x}{2-x}} \cdot (2-x)^2} \\ &= \frac{\frac{x}{2-x} \cdot (2-x)^2 + x}{\sqrt{\frac{x}{2-x}} \cdot (2-x)^2} = \frac{x \cdot (2-x) + x}{\sqrt{\frac{x}{2-x}} \cdot (2-x)^2} = \frac{2x - x^2 + x}{\sqrt{x} \cdot (2-x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-x^2 + 3x}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{2-x})^3}. \end{aligned}$$

$D_{f'_6} = (0, 2)$  ze względu na fakt, że pochodna z funkcji na przedziale domkniętym zawsze ma jako dziedzinę przedział otwarty. Wówczas:

$$f'_6(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x-3) = 0.$$

Jednak  $0 \notin (0, 2)$  oraz  $3 \notin (0, 2)$ , zatem funkcja  $f_6$  nie posiada ekstremów lokalnych. Zbadajmy jeszcze monotoniczność tej funkcji  $f'_6(x) > 0 \Rightarrow -x(x-4) > 0$ . Zatem uwzględniając dziedzinę pochodnej  $f'_6(x) > 0$  dla  $x \in (0, 2)$ . Zatem funkcja  $f_6$  jest rosnąca w całej swojej dziedzinie. Zatem w  $x = 0$  funkcja  $f_6$  osiąga swoje minimum globalne o wartości  $f_6(0) = 0$ . Natomiast ze względu na to, że  $D_{f_6} = [0, 2)$ , maksimum globalne nie jest osiągnięte. Dodatkowo

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f_6(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x \sqrt{\frac{x}{2-x}} = \left[2 \cdot \sqrt{\frac{2}{0^+}}\right] = [2 \cdot \sqrt{+\infty}] = +\infty.$$

Zatem zbiór wartości funkcji  $f_6$  to  $ZW_{f_6} = [0, +\infty)$ .

## Zadania do samodzielnego rozwiązywania

**Zadanie 3.** Zbadać monotoniczność funkcji:

(a)  $f_1(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$ ,      (e)  $f_5(x) = x \cdot \sqrt{1 - x^2}$ ,

(b)  $f_2(x) = 4x^4 - 2x^2 + 3$ ,      (f)  $f_6(x) = \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 + 1}}$ ,

(c)  $f_3(x) = x^3 + \frac{3}{x^2}$ ,      (g)  $f_7(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ ,

(d)  $f_4(x) = \frac{x^2}{x - 2}$ ,      (h)  $f_8(x) = \frac{\ln(3 - x)}{3 - x}$ .

**Zadanie 4.** Wyznaczyć, o ile istnieją, ekstrema lokalne funkcji:

(a)  $f_1(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ ,      (f)  $f_6(x) = \sqrt[3]{(x^2 + 2x)^2}$ ,

(b)  $f_2(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3$ ,      (g)  $f_7(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$ ,

(c)  $f_3(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ ,      (h)  $f_8(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ ,

(d)  $f_4(x) = \sqrt{x} - \ln x$ ,      (i)  $f_9(x) = x \cdot 2^{\frac{1}{x}}$ ,

(e)  $f_5(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$ ,      (j)  $f_{10}(x) = \sqrt{1 - \cos x}$ .

## Literatura

- [1] Gewert, Marian, i Skoczylas, Zbigniew. *Analiza matematyczna I: Przykłady i zadania*. Wyd. 26, Oficyna Wydawnicza GIS, 2018.
- [2] Kryszicki, Włodzimierz, i Włodarski, Lech. *Analiza matematyczna w zadaniach*. Cz. 1. Wyd. 29, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2003.
- [3] Stankiewicz, Władysław. *Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych. Część B*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2012.

**Materiały do przedmiotu:**

**MATEMATYKA**

**Ćwiczenia nr 5**

Autor:

dr inż. Anna Futa

mgr inż. Michał Błaszczukowski

mgr inż. Magdalena Piłat-Rożek



Fundusze Europejskie  
dla Rozwoju Społecznego



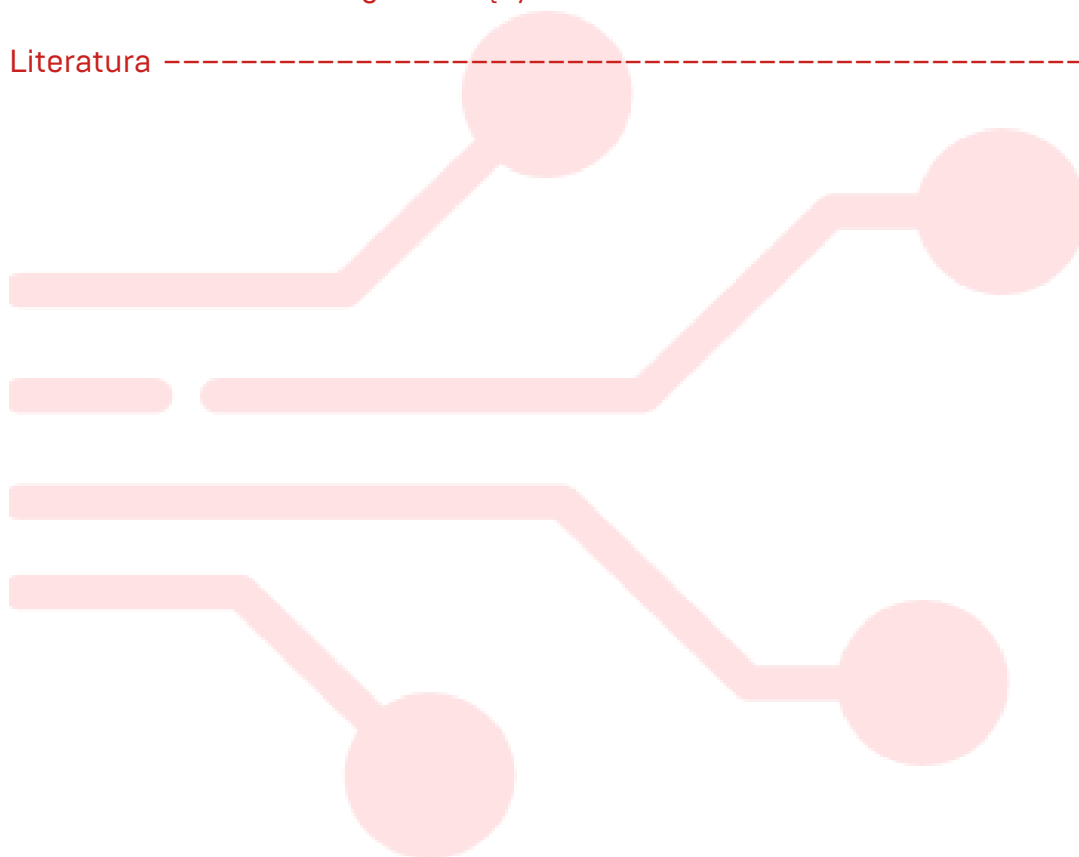
Rzeczpospolita  
Polska

Dofinansowane przez  
Unię Europejską



## Spis treści

|                                        |    |
|----------------------------------------|----|
| Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń         | 3  |
| Przykłady zadań z rozwiązaniami        | 4  |
| Zadania do samodzielnego rozwiązywania | 11 |
| Literatura                             | 12 |





## Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń

Ćwiczenia dotyczą wyznaczania ekstremów globalnych funkcji oraz wyznaczania przedziałów wklęsłości i wypukłości funkcji.

W celu wyznaczenia ekstremów globalnych funkcji jednej zmiennej na przedziale domkniętym  $[a, b]$ , należy wykonać następujące kroki:

1. Obliczyć pochodną  $f'(x)$ .
2. Wyznaczyć punkty krytyczne w przedziale  $[a, b]$ , czyli rozwiązania równania  $f'(x) = 0$  oraz punkty, w których pochodna nie istnieje.
3. Ustalić zbiór punktów do sprawdzenia:
  - punkty krytyczne należące do  $[a, b]$ ,
  - końce przedziału:  $x = a$  i  $x = b$ .
4. Obliczyć wartości funkcji w tych punktach.
5. Porównać wartości:
  - największa wartość to maksimum globalne,
  - najmniejsza wartość to minimum globalne.

**Twierdzenie Weierstrassa:** Na przedziale domkniętym i dla funkcji ciągłej, ekstrema globalne zawsze istnieją.

W celu wyznaczenia przedziałów wklęsłości i wypukłości oraz punktów przegięcia wykresu funkcji  $f(x)$  należy:

1. Obliczyć drugą pochodną  $f''(x)$ .
2. Wyznaczyć punkty krytyczne drugiej pochodnej, czyli rozwiązania równania  $f''(x) = 0$  oraz miejsca, w których  $f''(x)$  nie istnieje.
3. Podzielić dziedzinę na przedziały wyznaczone przez te punkty.
4. Zbadać znak  $f''(x)$  na każdym przedziale:
  - $f''(x) > 0$  - funkcja jest wypukła
  - $f''(x) < 0$  - funkcja jest wklęsła.
5. Punkty przegięcia to miejsca, gdzie:
  - $f''(x) = 0$  (lub nie istnieje),
  - oraz zmienia znak (z plusa na minus lub odwrotnie).

Najważniejsze metody można odnaleźć w materiałach wykładowych. W celu pogłębienia wiedzy i umiejętności można dodatkowo skorzystać z podręczników [1, 2, 3].

## Przykłady zadań z rozwiązaniami

**Zadanie 1.** Wyznaczyć wartość najmniejszą i największą funkcji  $f$  w podanym przedziale:

(a)  $f(x) = x^3 - 3x, \quad x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$

(c)  $f(x) = -\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\cos x + 3, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

(b)  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 8, \quad x \in [-3, 6]$

(d)  $f(x) = \frac{e^{2x}}{1 + e^{-x}}, \quad x \in [-1, 0]$

**Rozwiązania:**

(a)

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x = 1 \vee x = -1$$

Stąd otrzymujemy

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8} + \frac{9}{2} = \frac{9}{8}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{8}$$

$$f(-1) = -1 + 3 = 2$$

$$f(1) = 1 - 3 = -2$$

Największą wartość w przedziale  $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$  (maksimum globalne) funkcja  $f$  przyjmuje dla  $x = -1$  i wartość ta jest równa 2, najmniejszą wartość (minimum globalne) funkcja  $f$  przyjmuje dla  $x = 1$  i wartość ta jest równa -2.

(b)

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$$

$$f'(x) = 0$$

$$6x^2 - 6x - 36 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Delta = 25 = 5^2$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 3$$

Stąd otrzymujemy

$$f(-3) = 2(-27) - 3 \cdot 9 - 36(-3) - 8 = 19$$

$$f(6) = 2 \cdot 216 - 3 \cdot 36 - 36 \cdot 6 - 8 = 100$$

$$f(-2) = 2(-8) - 3 \cdot 4 - 36(-2) - 8 = 36$$

$$f(3) = 2 \cdot 27 - 3 \cdot 9 - 36 \cdot 3 - 8 = -89$$

Największą wartość w przedziale  $[-3, 6]$  (maksimum globalne) funkcja  $f$  przyjmuje dla  $x = 6$  i wartość ta jest równa 100, najmniejszą wartość (minimum globalne) funkcja  $f$  przyjmuje dla  $x = 3$  i wartość ta jest równa -89.

[c]

$$f'(x) = -\frac{1}{4}(-\sin(2x)) \cdot 2 + \frac{1}{2}(-\sin x) = \frac{1}{2} \sin(2x) - \frac{1}{2} \sin x$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1}{2} \sin(2x) - \frac{1}{2} \sin x = 0$$

$$\sin(2x) - \sin x = 0$$

$$2 \sin x \cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x(2 \cos x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \vee \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \vee x = \pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{3}$$

Stąd otrzymujemy

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4} \cos(-\pi) + \frac{1}{2} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 3 = -\frac{1}{4}(-1) + \frac{1}{2} \cdot 0 + 3 = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$$

$$f(\pi) = -\frac{1}{4} \cos(2\pi) + \frac{1}{2} \cos \pi + 3 = -\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2}(-1) + 3 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{2}$$

$$f(0) = -\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 + 3 = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4} \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + 3 = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 3 = -\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$$

Największą wartość w przedziale  $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$  [maksimum globalne] funkcja  $f$  przyjmuje dla  $x = -\frac{\pi}{3}$  oraz  $x = \frac{\pi}{3}$  i wartość ta jest równa  $\frac{27}{8}$ , najmniejszą wartość (minimum globalne) funkcja  $f$  przyjmuje dla  $x = \pi$  i wartość ta jest równa  $\frac{9}{4}$ .

(d)

$$f'(x) = \frac{e^{2x} \cdot 2 \cdot (1 + e^{-x}) - e^{2x} \cdot e^{-x}(-1)}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{e^x(2e^x + 3)}{(1 + e^{-x})^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$e^x(2e^x + 3) = 0$$

$$e^x = 0 \vee 2e^x + 3 = 0$$

$$e^x = 0 \vee e^x = -\frac{3}{2}$$

$$x \in \emptyset \vee x \in \emptyset$$

Stąd otrzymujemy

$$f(-1) = \frac{e^{-2}}{1 + e^2} = \frac{1}{e^2(1 + e^2)}$$

$$f(0) = \frac{e^0}{1 + e^0} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

Największą wartość w przedziale  $[-1, 0]$  [maksimum globalne] funkcja  $f$  przyjmuje dla  $x = 0$  i wartość ta jest równa  $\frac{1}{2}$ , najmniejszą wartość (minimum globalne) funkcja

$f$  przyjmuje dla  $x = -1$  i wartość ta jest równa  $\frac{1}{e^2(1 + e^2)}$ .

**Zadanie 2.** Wyznaczyć przedziały wklęsłości, wypukłości i punkty przegięcia wykresu funkcji:

(a)  $f(x) = x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 4x$

(d)  $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

(b)  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$

(e)  $f(x) = x + \cos x$

(f)  $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$

(c)  $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

(g)  $f(x) = xe^{-x}$

**Rozwiązania:**

(a) Dziedzina funkcji  $D_f = \mathbb{R}$ .

$$f'(x) = 4x^3 + 3x - 4, \quad D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 12x^2 + 3, \quad D_{f''} = \mathbb{R}$$

Funkcja jest wypukła, gdy  $f''(x) > 0$ , mamy więc

$$12x^2 + 3 > 0$$

$$x^2 > -\frac{1}{4}$$

$$x \in \mathbb{R}.$$

Funkcja jest wklęsła, gdy  $f''(x) < 0$ , mamy więc

$$12x^2 + 3 < 0$$

$$x^2 < -\frac{1}{4}$$

$$x \in \emptyset.$$

Dodatkowo

$$f''(x) = 0$$

$$12x^2 + 3 = 0$$

$$x^2 = -\frac{1}{4}$$

$$x \in \emptyset.$$

Funkcja  $f$  jest wypukła w całej swojej dziedzinie (brak punktów przegięcia).

(b) Dziedzina funkcji:  $D_f = \mathbb{R}$ .

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3), \quad D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 6x + 6 = 6(x + 1)$$

$$f''(x) = 0$$

$$6(x + 1) = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

W punkcie  $x = -1$  druga pochodna zmienia znak, a więc funkcja  $f$  ma punkt przegięcia.

Dla  $x < -1$  druga pochodna jest ujemna, a więc funkcja  $f$  jest wklęsła. Dla  $x > -1$  druga pochodna jest dodatnia, a więc funkcja  $f$  jest wypukła.

(c) Dziedzina funkcji:  $D_f = \mathbb{R}$ .

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \quad D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = -2 \frac{(1+x^2)^2 - x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}, \quad D_{f''} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 0$$

$$2(3x^2-1) = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Mianownik drugiej pochodnej jest dodatni, a więc jej znak jest zgodny ze znakiem  $3x^2 - 1$ . Gdy  $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ , druga pochodna jest ujemna, więc funkcja  $f$  jest wklęsła. Dla  $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$  albo  $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$  druga pochodna jest dodatnia, więc funkcja  $f$  jest wypukła.

W punktach  $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  oraz  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$  druga pochodna zmienia znak, a więc funkcja  $f$  ma punkty przegięcia.

(d) Funkcja jest określona tylko dla tych wartości, dla których wyrażenie pod pierwiastkiem jest nieujemne, a więc dziedziną funkcji jest  $D_f = (-1, 1]$ .

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}, \quad D_{f'} = (-1, 1)$$

$$f''(x) = \frac{1-2x}{(1+x)(1-x)\sqrt{1-x^2}}, \quad D_{f''} = (-1, 1)$$

$$f''(x) = 0$$

$$1 - 2x = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Druga pochodna jest dodatnia dla  $x < \frac{1}{2}$ , a więc funkcja  $f$  jest wypukła. Druga pochodna jest ujemna dla  $x > \frac{1}{2}$ , więc funkcja  $f$  jest wklęsła.

W punkcie  $x = \frac{1}{2}$  druga pochodna zmienia znak, więc funkcja  $f$  ma punkt przegięcia.

(e) Dziedzina funkcji:  $D_f = \mathbb{R}$ .

$$f'(x) = 1 - \sin x, \quad D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = \cos x, \quad D_{f''} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Druga pochodna jest dodatnia dla  $x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  a więc funkcja  $f$  jest wypukła. Druga pochodna jest ujemna dla  $x \in (2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$  oraz  $x \in (\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , więc funkcja  $f$  jest wklęsła.

W punktach  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  druga pochodna zmienia znak, więc funkcja  $f$  ma punkty przegięcia.

(f) Dziedzina funkcji:  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}, \quad D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f''(x) = 2 - \frac{2}{x^3}, \quad D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f''(x) = 0$$

$$2 - \frac{2}{x^3} = 0$$

$$\frac{2x^3 - 2}{x^3} = 0$$

$$x^3 - 1 = 0$$

$$x^3 = 1$$

$$x = 1$$

Ponadto

$$f''(x) > 0$$

$$2 - \frac{2}{x^3} > 0$$

$$\frac{x^3 - 1}{x^3} > 0$$

$$(x^3 - 1)x^3 > 0$$

$$x \in (-\infty, 0), (1, +\infty)$$

Druą pochodna jest dodatnia dla  $x \in (-\infty, 0)$  oraz  $x \in (1, +\infty)$ , a więc funkcja  $f$  jest wypukła. Druą pochodna jest ujemna dla  $x \in (0, 1)$ , więc funkcja  $f$  jest wklęsła. W punkcie  $x = 1$  druą pochodna zmienia znak, więc funkcja  $f$  ma punkt przegięcia.

(g) Dziedzina funkcji:  $D_f = \mathbb{R}$ .

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + xe^{-x}(-1) = e^{-x}(1 - x), \quad D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = e^{-x}(x - 2), \quad D_{f''} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 0$$

$$e^{-x}(x - 2) = 0$$

$$e^{-x} = 0 \vee x - 2 = 0$$

$$x \in \emptyset \vee x = 2$$

Ponadto

$$f''(x) > 0$$

$$e^{-x}(x - 2) > 0$$

$$x > 2$$

Druą pochodna jest dodatnia dla  $x > 2$ , a więc funkcja  $f$  jest wypukła. Druą pochodna jest ujemna dla  $x < 2$ , więc funkcja  $f$  jest wklęsła.

W punkcie  $x = 2$  druą pochodna zmienia znak, więc funkcja  $f$  ma punkt przegięcia.



## Zadania do samodzielnego rozwiązywania

**Zadanie 3.** Wyznaczyć wartość najmniejszą i największą funkcji  $f$  w podanym przedziale:

(a)  $f(x) = x^3 - x, \quad x \in [-1, 1]$

(f)  $f(x) = x^2 \ln x, \quad x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$

(b)  $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x^2}, \quad x \in [-1, 1]$

(g)  $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in [-2, 3]$

(c)  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10, \quad x \in [-1, 4]$

(h)  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 + 1}, \quad x \in [-3, 3]$

(d)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{9}{x}, \quad x \in [1, 3]$

(i)  $f(x) = (x - 1)e^{-x}, \quad x \in [0, 5]$

(e)  $f(x) = \sqrt{x} - x, \quad x \in [0, 4]$

(j)  $f(x) = 1 - |x^2 - 2|, \quad x \in [-4, 6]$

**Zadanie 4.** Wyznaczyć przedziały wklęsłości, wypukłości i punkty przegięcia funkcji:

(a)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

(i)  $f(x) = \frac{(x + 1)^2}{2x}$

(b)  $f(x) = x^4 - 4x^3$

(j)  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

(c)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

(k)  $f(x) = (x^2 - 3)e^x$

(d)  $f(x) = \sin x$

(l)  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

(e)  $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$

(f)  $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$

(m)  $f(x) = \frac{e^x}{x + 1}$

(g)  $f(x) = xe^{-x}$

(h)  $f(x) = \frac{3x - 1}{2x + 1}$

(n)  $f(x) = \arctg x + \frac{x}{1 + x^2}$

**Zadanie 5.** Dla jakich wartości parametrów  $a, b \in \mathbb{R}$  funkcja

$$f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3bx$$

ma w  $x = 1$  punkt przegięcia?

**Zadanie 6.** Dla jakich wartości parametrów  $a, b \in \mathbb{R}$  funkcja

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2$$

ma dokładnie dwa punkty przegięcia, których suma odciętych jest równa 0?

## Literatura

- [1] Gewert, Marian, i in. *Analiza matematyczna 1 : przykłady i zadania*. Wyd. 17 powiększ., Oficyna Wydawnicza GiS, 2008.
- [2] Gewert, Marian, i in. *Analiza matematyczna 1 : definicje, twierdzenia, wzory*. Wydanie XXX powiększone., Oficyna Wydawnicza GIS, 2023.
- [3] Kryszicki Włodzimierz, i Włodarski Lech. *Analiza matematyczna w zadaniach. Część I*. 29. wyd., Wydawnictwo Naukowe PWN, 2013.

**Materiały do przedmiotu:**

**MATEMATYKA**

**Ćwiczenia nr 6**

Autor:

dr inż. Anna Futa

mgr inż. Michał Błaszczukowski

mgr inż. Magdalena Piłat-Rożek



Fundusze Europejskie  
dla Rozwoju Społecznego



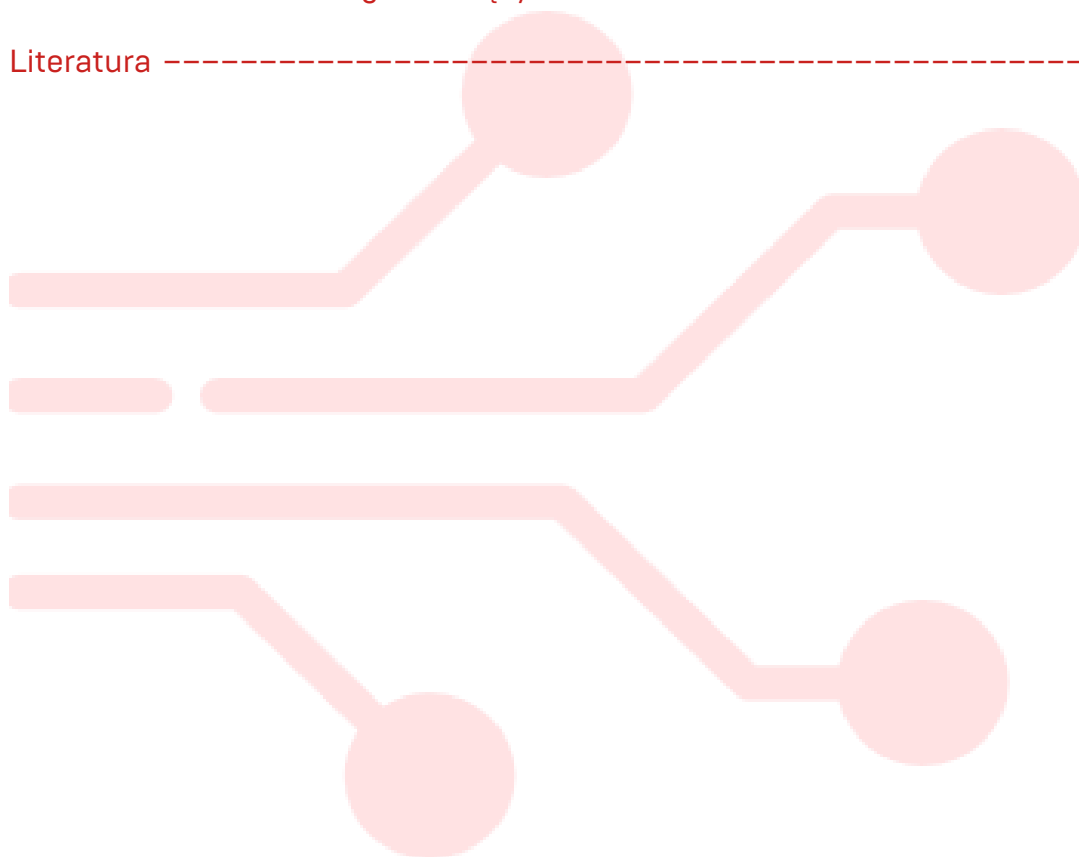
Rzeczpospolita  
Polska

Dofinansowane przez  
Unię Europejską



## Spis treści

|                                        |    |
|----------------------------------------|----|
| Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń         | 3  |
| Przykłady zadań z rozwiązaniami        | 4  |
| Zadania do samodzielnego rozwiązywania | 15 |
| Literatura                             | 16 |



## Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń

Ćwiczenia dotyczą obliczania granic funkcji z wykorzystaniem twierdzenia de l'Hospitala oraz sporządzania wykresów funkcji.

Twierdzenie de l'Hospitala: Niech  $f(x)$  i  $g(x)$  będą funkcjami różniczkowalnymi w pewnym otoczeniu punktu  $a$ , oraz niech spełniają warunki:

1.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  i  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$   
lub

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$  i  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$

2.  $g'(x) \neq 0$  w otoczeniu punktu  $a$

3. Istnieje granica  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$  [skończona lub nieskończona].

Wtedy zachodzi:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

W celu sporządzenia wykresu funkcji w pierwszej kolejności należy zbadać przebieg zmienności funkcji w następujących krokach:

- dziedzina funkcji,
- miejsca zerowe funkcji,
- punkt przecięcia z osią OY,
- parzystość/nieparzystość funkcji,
- ciągłość,
- granice na krańcach dziedziny,
- asymptoty,
- przedziały monotoniczności,
- ekstrema lokalne funkcji,
- przedziały wklęsłości, wypukłości,
- punkty przegięcia.

Ostatnim etapem jest sporządzenie wykresu funkcji.

Najważniejsze metody można odnaleźć w materiałach wykładowych. W celu pogłębienia wiedzy i umiejętności można dodatkowo skorzystać z podręczników [1, 2, 3].

## Przykłady zadań z rozwiązaniami

**Zadanie 1.** Obliczyć granice funkcji:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x^2 - 1}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - x + 6}{x^3 + 8}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \cos x}{\sin(2x) - \cos x}$

(g)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x) \ln(1 - x)$

(h)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x$

(i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

(j)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

(k)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$

**Rozwiązania:**

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x^2 - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-x}}{2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{2} = +\infty$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\sin^2 x}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot x\right) = 0$$

(e)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - x + 6}{x^3 + 8} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 1}{3x^2} = \frac{11}{12}$$

(f)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \cos x}{\sin(2x) - \cos x} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x - \sin x}{2 \cos(2x) + \sin x} = 1$$

(g)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \ln(1-x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{1-x}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{(1-x)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)^2}{-(1-x)} = 0$$

(h)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{tg} x &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\operatorname{ctg} x} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (-\sin^2 x) = -1 \end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \left[ \frac{0}{0} \right] \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x + x(-\sin x)} = 0 \end{aligned}$$

(j)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + (x-1) \frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x \ln x + x - 1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{x \ln x + x - 1} = \left[ \frac{0}{0} \right] \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{\ln x + x \cdot \frac{1}{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{\ln x + 2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(k)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln x \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{H}{=} e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^0 = 1$$

**Zadanie 2.** Z badać przebieg zmienności funkcji, a następnie sporządzić jej wykres:

(a)  $f(x) = \frac{3x - 1}{2x + 1}$

(b)  $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$

(c)  $f(x) = x(x - 1)^2$

**Rozwiązania:**

(a) - dziedziną funkcji

$$2x + 1 \neq 0$$

$$x \neq -\frac{1}{2}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

- miejsca zerowe funkcji

$$f(x) = 0$$

$$3x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{3}$$

- punkt przecięcia z osią OY

$$f(0) = -1 \implies (0, -1)$$

- parzystość/nieparzystość funkcji

$$f(-x) = \frac{-3x - 1}{-2x + 1} = \frac{3x + 1}{2x - 1}$$

Funkcja nie jest parzysta, funkcja nie jest nieparzysta.

- ciągłość

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} \frac{3x - 1}{2x + 1} = \left[ \frac{-\frac{5}{2}}{0^-} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} \frac{3x - 1}{2x + 1} = \left[ \frac{-\frac{5}{2}}{0^+} \right] = -\infty$$

Funkcja nie jest ciągła w  $x = -\frac{1}{2}$ .



- granice na krańcach dziedziny

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{2x + 1} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 1}{2x + 1} = \frac{3}{2}$$

- asymptoty

Funkcja ma asymptotę poziomą o równaniu  $y = \frac{3}{2}$ .

Funkcja ma asymptotę pionową o równaniu  $x = -\frac{1}{2}$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{2x^2 + x} = 0 \Rightarrow a = 0$$

Brak asymptoty ukośnej w  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 1}{2x^2 + x} = 0 \Rightarrow a = 0$$

Brak asymptoty ukośnej w  $-\infty$ .

- przedziały monotoniczności

$$f'(x) = \frac{3(2x + 1) - 2(3x - 1)}{(2x + 1)^2} = \frac{5}{(2x^2 + 1)^2}, \quad D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{5}{(2x^2 + 1)^2} = 0$$

$$5 = 0$$

$$x \in \emptyset$$

Ponieważ  $f'(x) = \frac{5}{(2x^2 + 1)^2} > 0$  dla  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ , więc funkcja jest rosnąca dla  $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ .

- ekstrema lokalne funkcji

Ponieważ funkcja jest rosnąca w całej swojej dziedzinie, więc nie osiąga ekstremum.

- przedziały wklęsłości, wypukłości

$$f''(x) = 5[(2x + 1)^{-2}]' = \frac{-20}{(2x + 1)^3}, \quad D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$f''(x) > 0$$

$$\frac{-20}{(2x+1)^3} > 0$$

$$-20(2x+1)^3 > 0$$

$$(2x+1)^3 < 0$$

$$x < -\frac{1}{2}$$

Ponieważ druga pochodna jest dodatnia dla  $x < -\frac{1}{2}$ , więc funkcja  $f$  jest wypukła.  
Ponieważ druga pochodna jest ujemna dla  $x > -\frac{1}{2}$ , więc funkcja  $f$  jest wklęsła.

- punkty przegięcia

$$f''(x) = 0$$

$$\frac{-20}{(2x+1)^3} = 0$$

$$-20 = 0$$

$$x \in \emptyset$$

Brak punktów przegięcia.

- wykres funkcji

Wykres funkcji  $f$  został przedstawiony na rysunku 1.

(b) - dziedzina funkcji

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- miejsca zerowe funkcji

$$f(x) = 0$$

$$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = 0$$

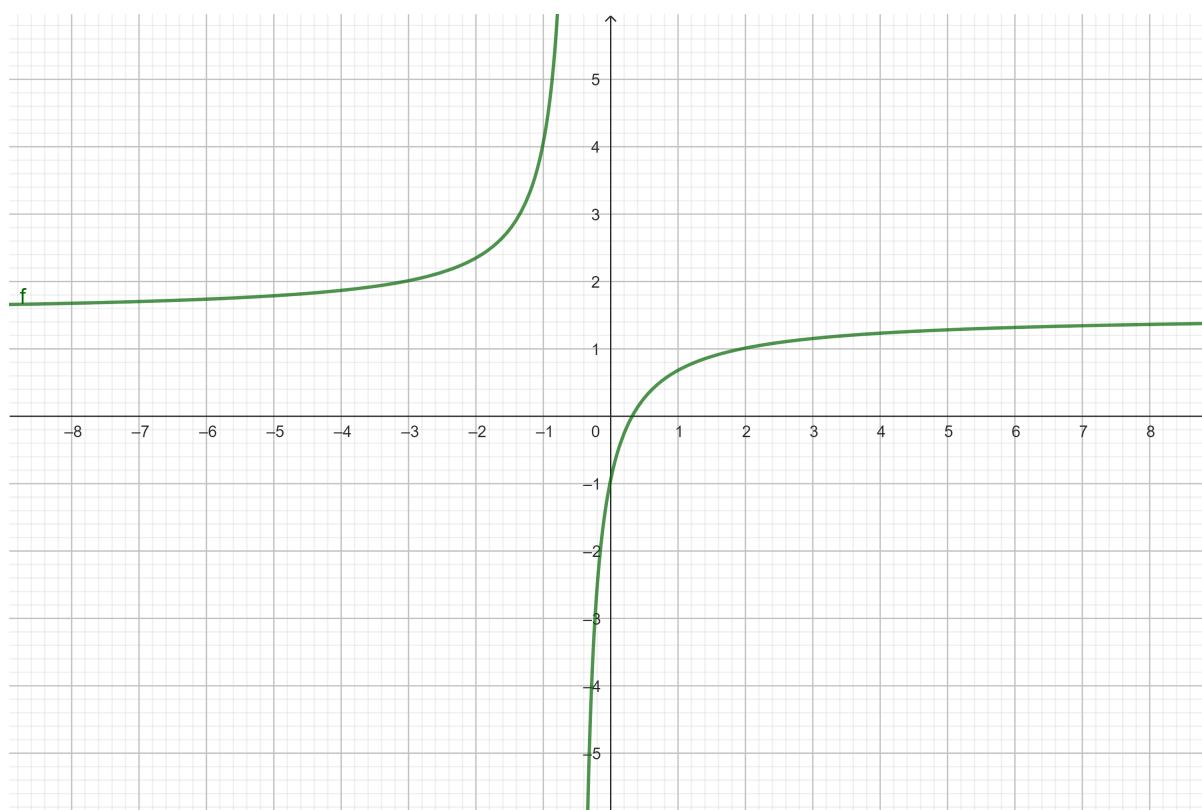
$$\frac{x^2 + 4}{2x} = 0$$

$$x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = -4$$

$$x \in \emptyset$$

Brak miejsc zerowych.



**Rysunek 1.** Wykres funkcji  $f(x) = \frac{3x-1}{2x+1}$

- punkt przecięcia z osią OY

Ponieważ  $x = 0$  jest wykluczony z dziedziny funkcji, więc nie ma punktu przecięcia z osią OY.

- parzystość/nieparzystość funkcji

$$f(-x) = -\frac{x}{2} - \frac{2}{x} = -\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) = -f(x)$$

Funkcja  $f$  jest nieparzysta.

- ciągłość

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) = 0 + \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) = 0 + \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty$$

Funkcja nie jest ciągła w  $x = 0$ .

- granice na krańcach dziedziny

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{2} + \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4}{2x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x}{2} + \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4}{2x} = -\infty$$

- asymptoty

Brak asymptoty poziomej.

Funkcja ma asymptotę pionową o równaniu  $x = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 4}{2x^2} \right) = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow b = 0$$

Funkcja ma asymptotę ukośną o równaniu  $y = \frac{1}{2}x$  w  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 + 4}{2x^2} \right) = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow b = 0$$

Funkcja ma asymptotę ukośną o równaniu  $y = \frac{1}{2}x$  w  $-\infty$ .

- przedziały monotoniczności

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}, \quad D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = 0$$

$$\frac{x^2 - 4}{2x^2} = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

$$f'(x) > 0$$

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} > 0$$

$$\frac{x^2 - 4}{2x^2} > 0$$

$$(x - 2)(x + 2) \cdot 2x^2 = 0$$

$$x \in (-\infty, -2), (2, +\infty)$$

Pierwsza pochodna jest dodatnia dla  $x \in (-\infty, -2), (2, +\infty)$ , więc funkcja  $f$  jest rosnąca w tych przedziałach.

Pierwsza pochodna jest ujemna dla  $x \in (-2, 0), (0, 2)$ , więc funkcja  $f$  jest malejąca w tych przedziałach.

- ekstrema lokalne funkcji

$$f(-2) = -2$$

$$f(2) = 2$$

Funkcja  $f$  osiąga maksimum lokalne w punkcie  $x = -2$  o wartości -2.

Funkcja  $f$  osiąga minimum lokalne w punkcie  $x = 2$  o wartości 2.

- przedziały wklęsłości, wypukłości

$$f''(x) = \frac{4}{x^3}, \quad D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f''(x) > 0$$

$$\frac{4}{x^3} > 0$$

$$4x^3 > 0$$

$$x^3 > 0$$

$$x > 0$$

Druga pochodna jest dodatnia dla  $x > 0$ , więc funkcja jest wypukła.

Druga pochodna jest ujemna dla  $x < 0$ , więc funkcja jest wklęsła.

- punkty przegięcia

$$f''(x) = 0$$

$$\frac{4}{x^3} = 0$$

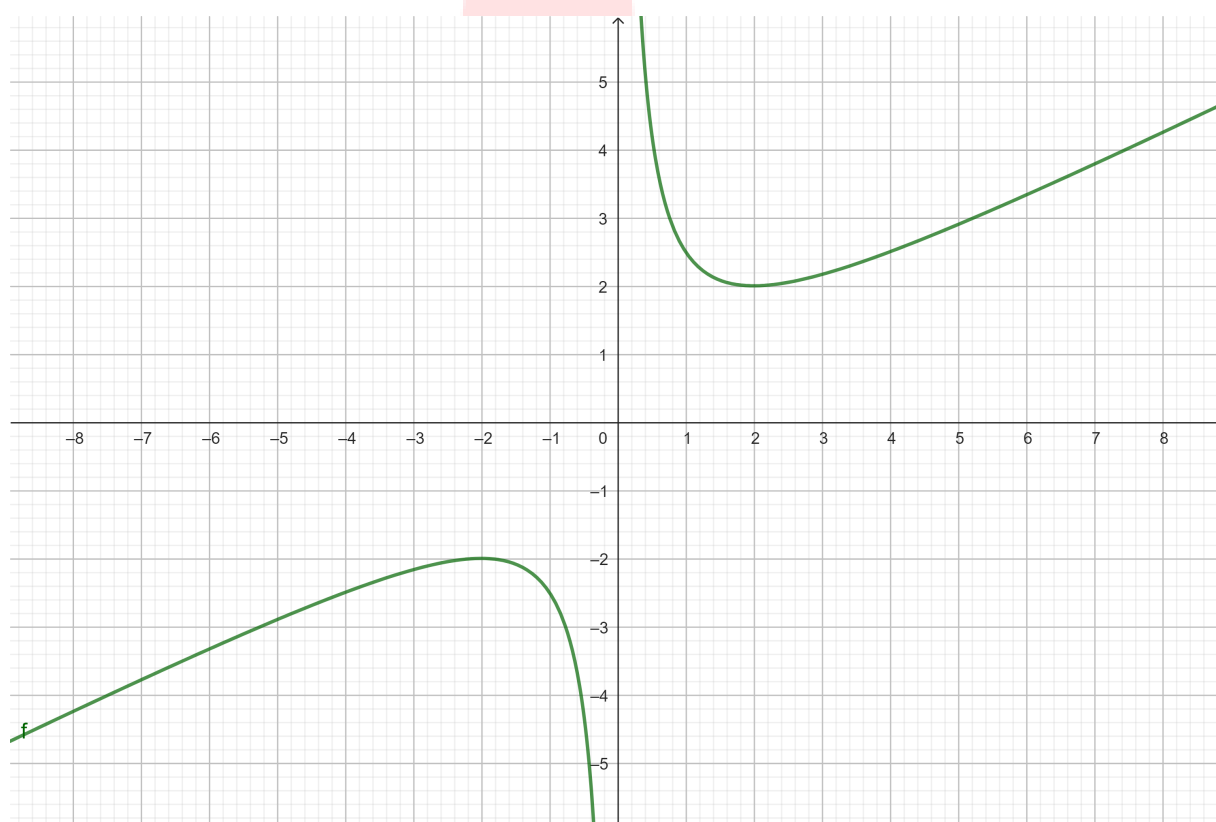
$$4 = 0$$

$$x \in \emptyset$$

Brak punktów przegięcia.

- wykres funkcji

Wykres funkcji  $f$  został przedstawiony na rysunku 2.



**Rysunek 2.** Wykres funkcji  $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$

(c)

$$f(x) = x(x-1)^2 = x^3 - 2x^2 + x$$

- dziedzina funkcji

$$D_f = \mathbb{R}$$

- miejsca zerowe funkcji

$$f(x) = 0$$

$$x(x-1)^2 = 0$$

$$x = 0 \vee x = 1$$

- punkt przecięcia z osią OY

$$f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

- parzystość/nieparzystość funkcji

$$f(-x) = -x(-x-1)^2 = -x(x+1)^2$$

Funkcja nie jest parzysta, funkcja nie jest nieparzysta.

- ciągłość

Funkcja jest ciągła, ponieważ jej dziedziną jest  $\mathbb{R}$ .

- granice na krańcach dziedziny

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2x^2 + x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2 + x) = -\infty$$

- asymptoty

Brak asymptoty poziomej.

Brak asymptoty pionowej, ponieważ funkcja jest ciągła w całej swojej dziedzinie.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x + 1) = +\infty$$

Brak asymptoty ukośnej.

- przedziały monotoniczności

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1, \quad D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1) = 0$$

$$x = \frac{1}{3} \vee x = 1$$

$$f'(x) > 0$$

$$3x^2 - 4x + 1 > 0$$

$$3 \left( x - \frac{1}{3} \right) (x - 1) > 0$$

$$x \in \left( -\infty, \frac{1}{3} \right), (1, +\infty)$$

Pierwsza pochodna jest dodatnia dla  $x \in \left( -\infty, \frac{1}{3} \right), (1, +\infty)$ , więc funkcja  $f$  jest rosnąca w tych przedziałach.

Pierwsza pochodna jest ujemna dla  $x \in \left( \frac{1}{3}, 1 \right)$ , więc funkcja  $f$  jest malejąca w tym przedziale.

- ekstrema lokalne funkcji

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27}$$

$$f(1) = 0$$

Funkcja  $f$  osiąga maksimum lokalne w punkcie  $x = \frac{1}{3}$  o wartości  $\frac{4}{27}$ .

Funkcja  $f$  osiąga minimum lokalne w punkcie  $x = 1$  o wartości 0.

- przedziały wklęsłości, wypukłości

$$f''(x) = 6x - 4, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f''(x) > 0$$

$$6x - 4 > 0$$

$$x > \frac{2}{3}$$

Druga pochodna jest dodatnia dla  $x > \frac{2}{3}$ , więc funkcja jest wypukła.

Druga pochodna jest ujemna dla  $x < \frac{2}{3}$ , więc funkcja jest wklęsła.

- punkty przegięcia

$$f''(x) = 0$$

$$6x - 4 = 0$$

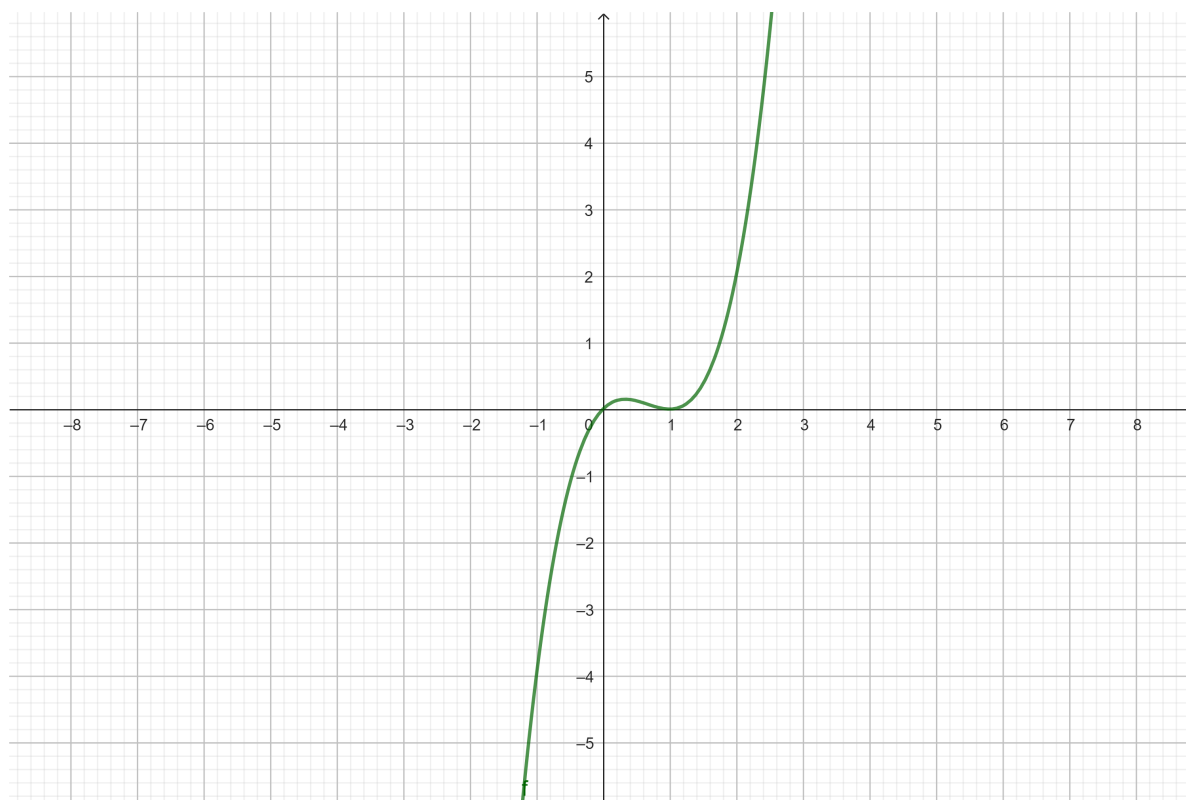
$$x = \frac{2}{3}$$



W punkcie  $x = \frac{2}{3}$  druga pochodna zmienia znak, a więc funkcja  $f$  ma punkt przegięcia.

- wykres funkcji

Wykres funkcji  $f$  został przedstawiony na rysunku 3.



**Rysunek 3.** Wykres funkcji  $f(x) = x(x-1)^2$

## Zadania do samodzielnego rozwiązywania

**Zadanie 3.** Obliczyć granice funkcji:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$

(g)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

(h)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \ln(1-x^2)$

(i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2(5x)}$

(j)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

(k)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}}$

(l)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})^2}{x^2 \cos x}$

(m)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$

(n)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln x)}{x}$

(o)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$

(p)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\pi-x} - e^{\sin x}}{(\pi-x) - \sin x}$

**Zadanie 4.** Zbadać przebieg zmienności funkcji a następnie sporządzić jej wykres:

(a)  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

(b)  $f(x) = x^3 + x + 1$

(c)  $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 2x + 4}$

(d)  $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

(e)  $f(x) = \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$

(f)  $f(x) = \frac{x^2 - x - 4}{x - 1}$

(g)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

(h)  $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

## Literatura

- [1] Gewert, Marian, i in. *Analiza matematyczna 1: przykłady i zadania*. Wyd. 17 powiększ., Oficyna Wydawnicza GiS, 2008.
- [2] Gewert, Marian, i in. *Analiza matematyczna 1: definicje, twierdzenia, wzory*. Wydanie XXX powiększone., Oficyna Wydawnicza GIS, 2023.
- [3] Kryszicki Włodzimierz, i Włodarski Lech. *Analiza matematyczna w zadaniach. Część I*. 29. wyd., Wydawnictwo Naukowe PWN, 2013.

**Materiały do przedmiotu:**

**MATEMATYKA**

**Ćwiczenia nr 7**

Autor:

dr inż. Anna Futa

mgr inż. Michał Błaszczukowski

mgr inż. Magdalena Piłat-Rożek



Fundusze Europejskie  
dla Rozwoju Społecznego



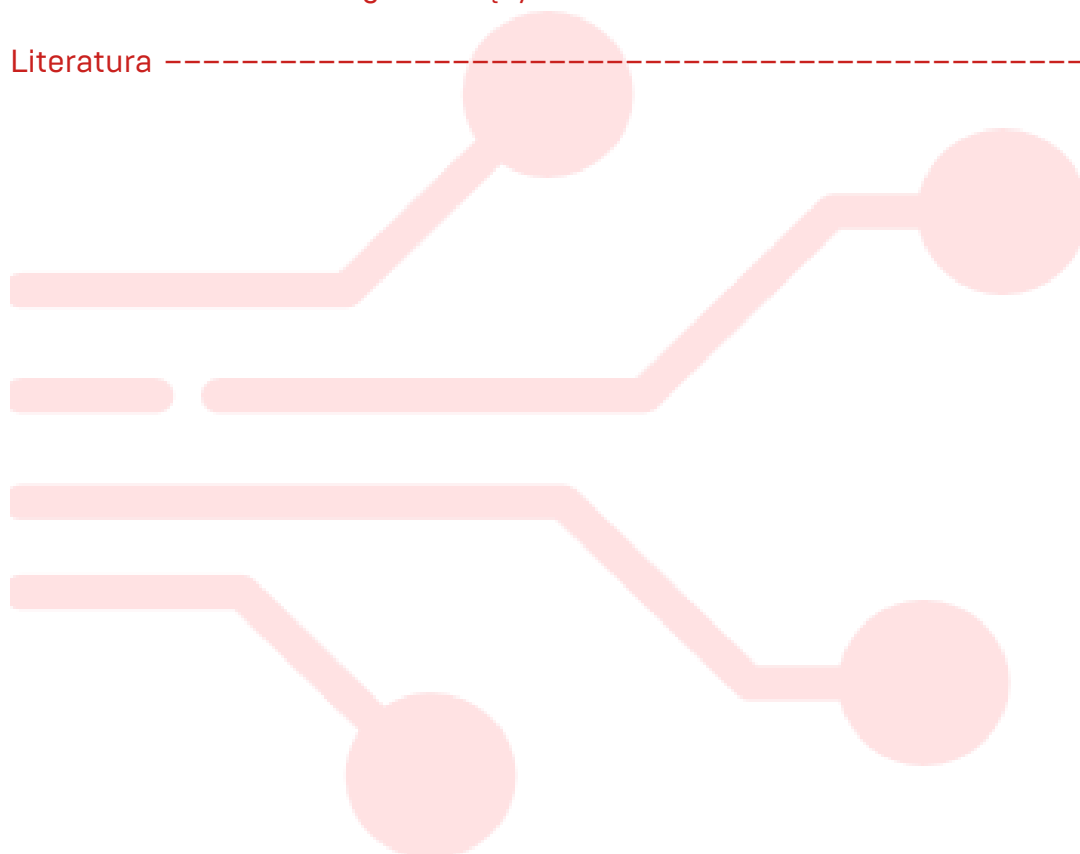
Rzeczpospolita  
Polska

Dofinansowane przez  
Unię Europejską



## Spis treści

|                                        |    |
|----------------------------------------|----|
| Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń         | 3  |
| Przykłady zadań z rozwiązaniami        | 4  |
| Zadania do samodzielnego rozwiązywania | 17 |
| Literatura                             | 19 |



## Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń

Ćwiczenia dotyczą całek nieoznaczonych. W szczególności dotyczą całek z podstawowych funkcji, całkowania przez podstawienie, całkowania przez części oraz całkowania funkcji wymiernych.

Zestawienie potrzebnych wzorów zostało umieszczone w tabeli 1. Wzory te przedstawiają całki z podstawowych funkcji.

**Tabela 1.** Zestawienie potrzebnych wzorów

| kolumna 1                                            | kolumna 2                                                              |
|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| $\int dx = x + c$                                    | $\int \cos x dx = \sin x + c$                                          |
| $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, n \neq -1$ | $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln  \cos x  + c$                      |
| $\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + c$                    | $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln  \sin x  + c$                      |
| $\int \frac{1}{x} dx = \ln  x  + c$                  | $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$                 |
| $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$                | $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$               |
| $\int e^x dx = e^x + c$                              | $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + c$ |
| $\int \sin x dx = -\cos x + c$                       | $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc} \sin x + c$       |

Całkowanie przez podstawienie (metoda zmiany zmiennej) polega na uproszczeniu całki poprzez wprowadzenie nowej zmiennej. Można to opisać w następujących krokach:

1. Wybranie podstawienia  $g(x) = t$ , które upraszcza wyrażenie.
2. Obliczenie pochodnej  $g'(x)dx = dt$ .
3. Zamiana całki z  $x$  na całkę z  $t$ .
4. Obliczenie całki zmiennej  $t$ .
5. Cofnięcie do wejściowej zmiennej: zamiana  $t$  z powrotem na  $g(x)$ .

Całkowanie przez części to metoda oparta na wzorze na pochodną iloczynu funkcji:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx.$$

Całkowanie funkcji wymiernych polega na obliczaniu całek wyrażeń, które są ilorazem dwóch wielomianów. Należy postępować według ustalonego schematu.

W pierwszej kolejności należy sprawdzić, czy stopień licznika jest mniejszy od stopnia mianownika. Jeśli nie jest, to należy wykonać dzielenie wielomianów, aby uzyskać sumę wielomianu i ułamka właściwego (czyli takiego, w którym stopień licznika jest mniejszy od stopnia mianownika).

Następnie należy zająć się ułamkiem właściwym – rozłożyć go na prostsze składniki, tzw. ułamki proste. W zależności od postaci mianownika można otrzymać składniki z mianownikami liniowymi (np.  $x - a$ ) lub kwadratowymi (np.  $x^2 + bx + c$ ).

Każdy taki prosty ułamek należy całkować ze znanych wzorów. Na końcu należy zsumować wyniki, co daje rozwiązanie całki.

Najważniejsze metody można odnaleźć w materiałach wykładowych. W celu pogłębienia wiedzy i umiejętności można dodatkowo skorzystać z podręczników [1, 2, 3].

## Przykłady zadań z rozwiązaniami

**Zadanie 1.** Obliczyć

(a)  $\int (x^5 + \sqrt[3]{x}) dx$

(b)  $\int \left( 5x^2 - 6x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} \right) dx$

(c)  $\int \frac{(x^2 - 1)^3}{x} dx$

(d)  $\int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}} dx$

(e)  $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt{x^3}} dx$

(f)  $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$

(g)  $\int \frac{10}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

### Rozwiązania:

(a)

$$\int (x^5 + \sqrt[3]{x}) dx = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1} + c = \frac{1}{6}x^6 + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c$$

(b)

$$\int \left( 5x^2 - 6x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} \right) dx = \frac{5}{3}x^3 - 3x^2 + 3x - 2 \ln |x| - \frac{5}{x} + c$$

(c)

$$\begin{aligned} \int \frac{(x^2 - 1)^3}{x} dx &= \int \frac{x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1}{x} dx = \int \left( x^5 - 3x^3 + 3x - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \ln |x| + c \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}} dx &= \int \left( \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \right) dx = \int \left( x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx \\ &= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + c \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt{x^3}} dx &= \int \left( \frac{x^{\frac{1}{2}}}{6x^{\frac{3}{2}}} - \frac{2x^{\frac{2}{3}}}{6x^{\frac{3}{2}}} + \frac{4\sqrt[4]{5}x^{\frac{3}{4}}}{6x^{\frac{3}{2}}} \right) dx \\ &= \int \left( \frac{1}{6}x^{-1} - \frac{1}{3}x^{-\frac{5}{6}} + \frac{2\sqrt[4]{5}}{3}x^{-\frac{3}{4}} \right) dx \\ &= \int \left( \frac{1}{6x} - \frac{1}{3}x^{-\frac{5}{6}} + \frac{2\sqrt[4]{5}}{3}x^{-\frac{3}{4}} \right) dx \\ &= \frac{1}{6} \ln |x| - 2x^{\frac{1}{6}} + \frac{8\sqrt[4]{5}}{3}x^{\frac{1}{4}} + c \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}\int \operatorname{ctg}^2 x dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} \right) dx \\ &= \int \left( \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int 1 dx = -\operatorname{ctg} x - x + c\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}\int \frac{10}{\sin^2 x \cos^2 x} dx &= 10 \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = 10 \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx \\ &= 10 \int \left( \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \right) dx \\ &= 10 \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = 10 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + 10 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx \\ &= 10 \operatorname{tg} x - 10 \operatorname{ctg} x + c\end{aligned}$$

**Zadanie 2.** Obliczyć całki:

(a)  $\int \frac{1}{2} \sin(4x) dx$

(h)  $\int \sqrt[4]{10 - 2x} dx$

(b)  $\int 3 \cos\left(\frac{x}{5}\right) dx$

(i)  $\int \sqrt[4]{2x^5 + 10} \cdot x^4 dx$

(c)  $\int (8x - 5)^5 dx$

(j)  $\int e^{-\frac{x}{4}} dx$

(d)  $\int \frac{4x}{3x^2 + 5} dx$

(k)  $\int e^{-x^3} \cdot x^2 dx$

(e)  $\int \frac{2e^{3x}}{2 + 5e^{3x}} dx$

(l)  $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

(f)  $\int \operatorname{ctg} x dx$

(m)  $\int \frac{2x^2}{\sqrt[5]{3 + x^3}} dx$

(g)  $\int \sqrt{4x - 1} dx$

(n)  $\int \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x} dx$



### Rozwiązania:

(a)

$$\int \frac{1}{2} \sin(4x) dx = \frac{1}{2} \int \sin(4x) dx = \left| \begin{array}{l} 4x = t \\ 4dx = dt \\ dx = \frac{1}{4} dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \sin t \cdot \frac{1}{4} dt = \frac{1}{8} \int \sin t dt$$

$$= \frac{1}{8} (-\cos t) + c = -\frac{1}{8} \cos(4x) + c$$

(b)

$$\int 3 \cos\left(\frac{x}{5}\right) dx = 3 \int \cos\left(\frac{x}{5}\right) dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x}{5} = t \\ \frac{1}{5} dx = dt \\ dx = 5dt \end{array} \right| = 3 \int \cos t \cdot 5dt = 15 \int \cos t dt$$

$$= 15 \sin t + c = 15 \sin\left(\frac{x}{5}\right) + c$$

(c)

$$\int (8x - 5)^5 dx = \left| \begin{array}{l} 8x - 5 = t \\ 8dx = dt \\ dx = \frac{1}{8} dt \end{array} \right| = \int t^5 \cdot \frac{1}{8} dt = \frac{1}{8} \int t^5 dt = \frac{1}{48} t^6 + c$$

$$= \frac{1}{48} (8x - 5)^6 + c$$

(d)

$$\int \frac{4x}{3x^2 + 5} dx = 4 \int \frac{x}{3x^2 + 5} dx = \left| \begin{array}{l} 3x^2 + 5 = t \\ 6x dx = dt \\ x dx = \frac{1}{6} dt \end{array} \right| = 4 \int \frac{\frac{1}{6}}{t} dt = \frac{2}{3} \int \frac{1}{t} dt$$

$$= \frac{2}{3} \ln |t| + c = \frac{2}{3} \ln(3x^2 + 5) + c$$

(e)

$$\int \frac{2e^{3x}}{2 + 5e^{3x}} dx = 2 \int \frac{e^{3x}}{2 + 5e^{3x}} dx = \left| \begin{array}{l} 2 + 5e^{3x} = t \\ 15e^{3x} dx = dt \\ e^{3x} dx = \frac{1}{15} dt \end{array} \right| = 2 \int \frac{\frac{1}{15}}{t} dt = \frac{2}{15} \int \frac{1}{t} dt$$

$$= \frac{2}{15} \ln |t| + c = \frac{2}{15} \ln(2 + 5e^{3x}) + c$$

(f)

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + c = \ln |\sin x| + c$$

(g)

$$\int \sqrt{4x - 1} dx = \left| \begin{array}{l} 4x - 1 = t \\ 4dx = dt \\ dx = \frac{1}{4} dt \end{array} \right| = \int \sqrt{t} \cdot \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{6} (4x - 1)^{\frac{3}{2}} + c$$

(h)

$$\int \sqrt[4]{10-2x} dx = \left| \begin{array}{l} 10-2x = t \\ -2dx = dt \\ dx = -\frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \int \sqrt[4]{t} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) dt = -\frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{4}} dt = -\frac{4}{10} t^{\frac{5}{4}} + c$$

$$= -\frac{2}{5} (10-2x)^{\frac{5}{4}} + c$$

(i)

$$\int \sqrt[4]{2x^5+10} \cdot x^4 dx = \left| \begin{array}{l} 2x^5+10 = t \\ 10x^4 dx = dt \\ x^4 dx = \frac{1}{10} dt \end{array} \right| = \int \sqrt[4]{t} \cdot \frac{1}{10} dt = \frac{1}{10} \int t^{\frac{1}{4}} dt = \frac{2}{25} t^{\frac{5}{4}} + c$$

$$= \frac{2}{25} (2x^5+10)^{\frac{5}{4}} + c$$

(j)

$$\int e^{-\frac{x}{4}} dx = \left| \begin{array}{l} -\frac{x}{4} = t \\ -\frac{1}{4} dx = dt \\ dx = -4dt \end{array} \right| = \int e^t (-4) dt = -4 \int e^t dt = -4e^t + c = -4e^{-\frac{x}{4}} + c$$

(k)

$$\int e^{-x^3} \cdot x^2 dx = \left| \begin{array}{l} -x^3 = t \\ -3x^2 dx = dt \\ x^2 dx = -\frac{1}{3} dt \end{array} \right| = \int e^t \left(-\frac{1}{3}\right) dt = -\frac{1}{3} e^t + c = -\frac{1}{3} e^{-x^3} + c$$

(l)

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \\ \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2dt \end{array} \right| = \int e^t \cdot 2dt = 2 \int e^t dt = 2e^t + c = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

(m)

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2}{\sqrt[5]{3+x^3}} dx &= 2 \int \frac{x^2}{\sqrt[5]{3+x^3}} dx = \left| \begin{array}{l} 3+x^3 = t \\ 3x^2 dx = dt \\ x^2 dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right| = 2 \int \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt[5]{t}} dt \\ &= \frac{2}{3} \int t^{-\frac{1}{5}} dt = \frac{10}{12} t^{\frac{4}{5}} + c = \frac{5}{6} (3+x^3)^{\frac{4}{5}} + c \end{aligned}$$

(n)

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{1+3\cos x} dx &= \left| \begin{array}{l} 1+3\cos x = t \\ -3\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -\frac{1}{3} dt \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{1}{3}}{t} dt = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{t} dt = -\frac{1}{3} \ln |t| + c \\ &= -\frac{1}{3} \ln |1+3\cos x| + c \end{aligned}$$

**Zadanie 3.** Obliczyć całki:

(a)  $\int x \sin x dx$

(c)  $\int x e^x dx$

(b)  $\int x^2 \cos x dx$

(d)  $\int e^x \sin x dx$

(e)  $\int \sqrt{x} \ln x dx$

(g)  $\int \arcsin x dx$

(f)  $\int \ln x dx$

**Rozwiązania:**

(a)

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= \left| \begin{array}{ll} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g'(x) = \sin x & g(x) = -\cos x \end{array} \right| = x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x dx &= \left| \begin{array}{ll} f(x) = x^2 & f'(x) = 2x \\ g'(x) = \cos x & g(x) = \sin x \end{array} \right| = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx \\ &= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g'(x) = \sin x & g(x) = -\cos x \end{array} \right| \\ &= x^2 \sin x - 2 \left[ x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx \right] \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x dx \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c \end{aligned}$$

(c)

$$\int x e^x dx = \left| \begin{array}{ll} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^x & g(x) = e^x \end{array} \right| = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

(d)

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= \left| \begin{array}{ll} f(x) = e^x & f'(x) = e^x \\ g'(x) = \sin x & g(x) = -\cos x \end{array} \right| = -e^x \cos x - \int e^x (-\cos x) dx \\ &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} f(x) = e^x & f'(x) = e^x \\ g'(x) = \cos x & g(x) = \sin x \end{array} \right| \\ &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \end{aligned}$$

Porównując lewą i prawą stronę, otrzymujemy

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$2 \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} (-e^x \cos x + e^x \sin x) + c$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c$$

(e)

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} \ln x dx &= \left| \begin{array}{ll} f(x) = \ln x & f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = \sqrt{x} & g(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \end{array} \right| = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \int \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{2}{3} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{4}{9} x^{\frac{3}{2}} + c \end{aligned}$$

(f)

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} f(x) = \ln x & f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = 1 & g(x) = x \end{array} \right| = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx$$

$$= x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + c$$

(g)

$$\int \arcsin x dx = \left| \begin{array}{ll} f(x) = \arcsin x & f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ g'(x) = 1 & g(x) = x \end{array} \right| = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \left| \begin{array}{l} 1-x^2 = t \\ -2x dx = dt \\ x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = x \arcsin x - \int \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{t}} dt = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$= x \arcsin x + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

**Zadanie 4.** Obliczyć całki:

(a)  $\int \frac{1}{6+x^2} dx$

(e)  $\int \frac{4x-10}{2x^2-10x-18} dx$

(b)  $\int \frac{1}{x^2+16} dx$

(f)  $\int \frac{3-18x^5}{3x-3x^6} dx$

(c)  $\int \frac{1}{2x^2+1} dx$

(g)  $\int \frac{x+6}{x^2+12x} dx$

(d)  $\int \frac{77}{x^2+7} dx$

(h)  $\int \frac{x-8}{x^2-16x+3} dx$

$$(i) \int \frac{12 \cos x}{\sin x + 19} dx$$

$$(k) \int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 + 5x + 6} dx$$

$$(j) \int \frac{1}{-x^2 + 6x - 5} dx$$

### Rozwiązania:

(a)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{6 + x^2} dx &= \int \frac{1}{6 \left(1 + \frac{x^2}{6}\right)} dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{1 + \frac{x^2}{6}} dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right)^2} dx \\ &= \left| \begin{array}{l} \frac{x}{\sqrt{6}} = t \\ \frac{1}{\sqrt{6}} dx = dt \\ dx = \sqrt{6} dt \end{array} \right| = \frac{1}{6} \int \frac{\sqrt{6}}{1 + t^2} dt = \frac{\sqrt{6}}{6} \int \frac{1}{1 + t^2} dt \\ &= \frac{\sqrt{6}}{6} \arctan t + c = \frac{\sqrt{6}}{6} \arctan \left( \frac{\sqrt{6}}{6} x \right) + c \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + 16} dx &= \int \frac{1}{16 \left(\frac{x^2}{16} + 1\right)} dx = \frac{1}{16} \int \frac{1}{\frac{x^2}{16} + 1} dx = \frac{1}{16} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{4}\right)^2 + 1} dx \\ &= \left| \begin{array}{l} \frac{x}{4} = t \\ \frac{1}{4} dx = dt \\ dx = 4 dt \end{array} \right| = \frac{1}{16} \int \frac{4}{t^2 + 1} dt = \frac{4}{16} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{4} \arctan t + c = \frac{1}{4} \arctan \left( \frac{x}{4} \right) + c \end{aligned}$$



(c)

$$\int \frac{1}{2x^2 + 1} dx = \int \frac{1}{(\sqrt{2}x)^2 + 1} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{2}x = t \\ \sqrt{2}dx = dt \\ dx = \frac{1}{\sqrt{2}}dt \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \arctg t + c = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctg(\sqrt{3}x) + c$$

(d)

$$\int \frac{77}{x^2 + 7} dx = 77 \int \frac{1}{x^2 + 7} dx = 77 \int \frac{1}{7\left(\frac{x^2}{7} + 1\right)} dx = 11 \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} dx$$

$$= \left| \begin{array}{l} \frac{x}{\sqrt{7}} = t \\ \frac{1}{\sqrt{7}}dx = dt \\ dx = \sqrt{7}dt \end{array} \right| = 11\sqrt{7} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = 11\sqrt{7} \arctg t + c$$

$$= 11\sqrt{7} \arctg\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + c$$

(e)

$$\int \frac{4x - 10}{2x^2 - 10x - 18} dx = \ln |2x^2 - 10x - 18| + c$$

(f)

$$\int \frac{3 - 18x^5}{3x - 3x^6} dx = \ln |3x - 3x^6| + c$$

(g)

$$\int \frac{x + 6}{x^2 + 12x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x + 6)}{x^2 + 12x} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 12x| + c$$

(h)

$$\int \frac{x-8}{x^2-16x+3} dx = 2 \int \frac{2(x-8)}{x^2-16x+3} dx = 2 \ln |x^2-16x+3| + c$$

(i)

$$\int \frac{12 \cos x}{\sin x + 19} dx = 12 \int \frac{\cos x}{\sin x + 19} dx = 12 \ln |\sin x + 19| + c$$

(j)

$$\int \frac{1}{-x^2+6x-5} dx = - \int \frac{1}{x^2-6x+5} dx = - \int \frac{1}{(x-1)(x-5)} dx$$

$$\begin{aligned} & \left| \begin{aligned} \frac{1}{(x-1)(x-5)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-5} \\ 1 &= A(x-5) + B(x-1) \\ 1 &= Ax - 5A + Bx - B \\ 1 &= (A+B)x - 5A - B \\ A+B &= 0 \wedge -5A - B = 1 \\ A &= -\frac{1}{4} \wedge B = \frac{1}{4} \end{aligned} \right| \\ &= - \int \left( \frac{-\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}}{x-5} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-5} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-5} dx \\ &= \frac{1}{4} \ln |x-1| - \frac{1}{4} \ln |x-5| + c \end{aligned}$$

[k]

$$\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 + 5x + 6} dx = \int \frac{(x^2 + 5x + 6) - 10x + 3}{x^2 + 5x + 6} dx = \int 1 dx - \int \frac{10x - 3}{x^2 + 5x + 6} dx$$

$$= x - \int \frac{10x - 3}{(x + 3)(x + 2)} dx$$

$$\frac{10x - 3}{(x + 3)(x + 2)} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x + 2}$$

$$10x - 3 = Ax + 2A + Bx + 3B$$

$$10x - 3 = (A + B)x + 2A + 3B$$

$$A + B = 10 \wedge 2A + 3B = -3$$

$$A = 33 \wedge B = -23$$

$$= x - \int \left( \frac{33}{x + 3} - \frac{23}{x + 2} \right) dx$$

$$= x - 33 \int \frac{1}{x + 3} dx + 23 \int \frac{1}{x + 2} dx$$

$$= x - 33 \ln |x + 3| + 23 \ln |x + 2| + c$$

## Zadania do samodzielnego rozwiązywania

**Zadanie 5.** Obliczyć całki:

(a)  $\int \left( 5x^2 + 3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} + \sqrt{x} \right) dx$

(d)  $\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x^2} dx$

(b)  $\int (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) dx$

(e)  $\int \operatorname{tg}^2 x dx$

(c)  $\int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}} dx$

(f)  $\int \frac{\sqrt{7}e^\pi}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

**Zadanie 6.** Obliczyć całki:

(a)  $\int (x^2 + 4)^5 x dx$

(h)  $\int \frac{1}{2 \cos^2(3x)} dx$

(b)  $\int x \sin(2x^2 + 1) dx$

(i)  $\int \sin^5 x \cos x dx$

(c)  $\int \frac{x}{1 + x^2} dx$

(j)  $\int \frac{\sin x}{a + b \cos x} dx$

(d)  $\int \frac{x^2}{a^3 + x^3} dx$

(k)  $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$

(e)  $\int \sqrt{3x + 1} dx$

(l)  $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$

(f)  $\int \frac{x}{\sqrt[3]{2x^2 - 1}} dx$

(m)  $\int \frac{1}{\sqrt{3 - 2x^2}} dx$

(g)  $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

(n)  $\int \frac{1}{(1 + x^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} x} dx$

**Zadanie 7.** Obliczyć całki:

(a)  $\int x \cos x dx$

(f)  $\int e^x \cos x dx$

(b)  $\int x^2 e^x dx$

(g)  $\int x \ln(1 + x^2) dx$

(c)  $\int x^2 \sin x dx$

(h)  $\int x e^{x^2} (x^2 + 1) dx$

(d)  $\int x^2 \ln x dx$

(i)  $\int x^2 \sin(5x) dx$

(e)  $\int \ln^2 x dx$

(j)  $\int \sqrt{x} \ln^3 x dx$

**Zadanie 8.** Obliczyć całki:

(a)  $\int \frac{1}{25 + x^2} dx$

(b)  $\int \frac{12}{x^2 + 11} dx$

(c)  $\int \frac{1}{6x^2 + 1} dx$

(d)  $\int \frac{6x + 16x^7}{3x^2 - 2x^8} dx$

(e)  $\int \frac{x - 6}{x^2 - 12x + 4} dx$

(f)  $\int \frac{9 \sin x}{\cos x + \sqrt{3}} dx$

(g)  $\int \frac{3x + 4}{x^2 - x - 2} dx$

(h)  $\int \frac{1}{x^4 - x^3 + x^2} dx$

(i)  $\int \frac{5x - 1}{x^3 - 3x - 2} dx$

(j)  $\int \frac{(x + 1)^3}{x^2 - x} dx$

## Literatura

- [1] Gewert, Marian, i in. *Analiza matematyczna 1 : przykłady i zadania*. Wyd. 17 powiększ., Oficyna Wydawnicza GiS, 2008.
- [2] Gewert, Marian, i in. *Analiza matematyczna 1 : definicje, twierdzenia, wzory*. Wydanie XXX powiększone., Oficyna Wydawnicza GIS, 2023.
- [3] Krywicki Włodzimierz, i Włodarski Lech. *Analiza matematyczna w zadaniach. Część I*. 29. wyd., Wydawnictwo Naukowe PWN, 2013.

**Materiały do przedmiotu:**

**MATEMATYKA**

**Ćwiczenia nr 8**

Autor:

dr inż. Anna Futa

mgr inż. Michał Błaszczkowski

mgr inż. Magdalena Piłat-Rożek



Fundusze Europejskie  
dla Rozwoju Społecznego



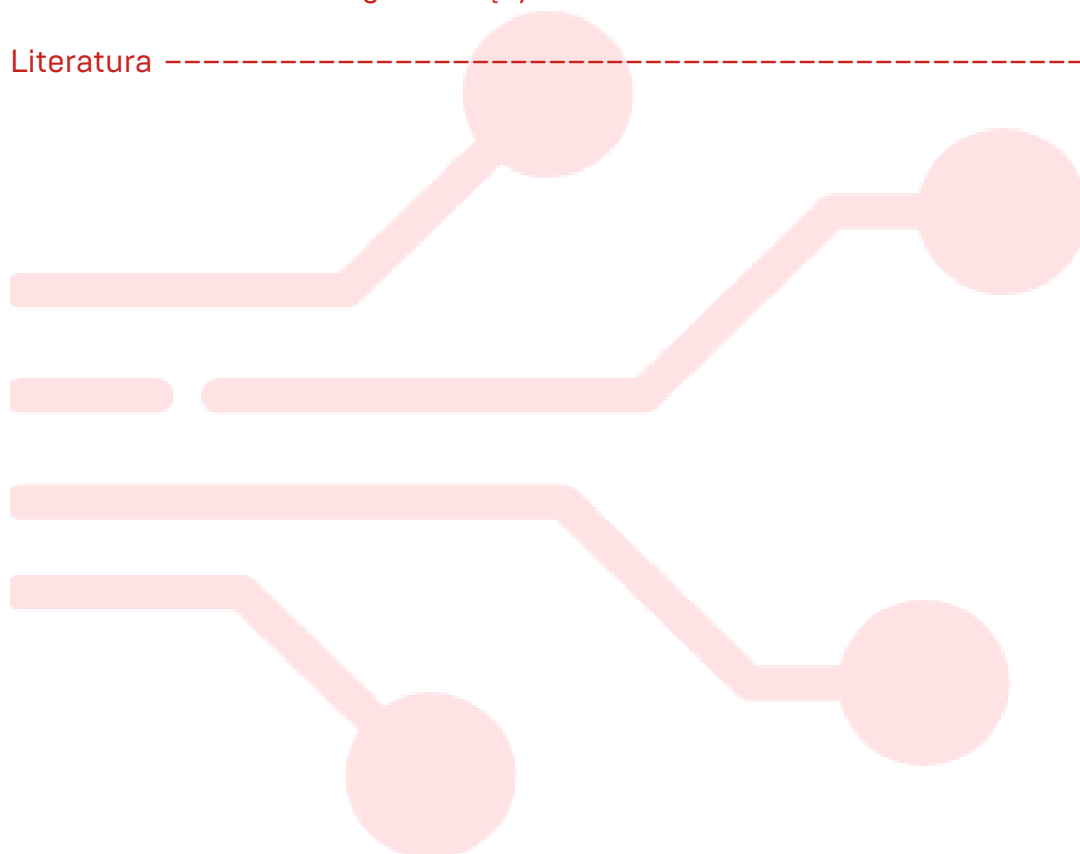
Rzeczpospolita  
Polska

Dofinansowane przez  
Unię Europejską



## Spis treści

|                                        |   |
|----------------------------------------|---|
| Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń         | 3 |
| Przykłady zadań z rozwiązaniami        | 3 |
| Zadania do samodzielnego rozwiązywania | 8 |
| Literatura                             | 9 |



## Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń

Ćwiczenia dotyczą całek nieoznaczonych. W szczególności dotyczą całkowania funkcji trygonometrycznych oraz funkcji niewymiernych.

Całkowanie funkcji trygonometrycznych polega na znajdowaniu funkcji pierwotnej, której pochodna daje daną funkcję trygonometryczną. W praktyce przy całkowaniu funkcji trygonometrycznych często stosuje się:

1. Podstawienia – jeśli funkcja jest złożona.
2. Wzory redukcyjne i podwójnego kąta – ułatwiają całkowanie potęg sinusów i cosinusów.
3. Podstawienia uniwersalne typu  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = u$  lub  $\operatorname{tg} x = u$ .

Całkowanie funkcji niewymiernych polega na przekształceniu pierwiastków poprzez podstawienia (algebraiczne lub trygonometryczne), aby uzyskać prostsze całki możliwe do policzenia.

Wybrane podstawienia Eulera dla całek postaci  $\int F(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ :

- I rodzaju, gdy  $a > 0$ :

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x$$

- II rodzaju, gdy  $c > 0$ :

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$$

- III rodzaju, gdy  $\Delta > 0$ :

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1).$$

Najważniejsze metody można odnaleźć w materiałach wykładowych. W celu pogłębienia wiedzy i umiejętności można dodatkowo skorzystać z podręczników [1, 2, 3].

## Przykłady zadań z rozwiązaniami

**Zadanie 1.** Obliczyć

(a)  $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x + 1} dx$

(b)  $\int \frac{1}{\sin x} dx$



[c]  $\int \cos(2x) \cos(3x) dx$

[e]  $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$

[d]  $\int \frac{1}{1 + 3 \cos^2 x} dx$

[f]  $\int \sin^6(2x) dx$

**Rozwiązania:**

[a]

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x + 1} dx &= \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x}{\sin^2 x + 1} dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \\ \cos^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right| = \int \frac{1 - t^2}{t^2 + 1} dt \\ &= \int \frac{-t^2 - 1 + 2}{t^2 + 1} dt = \int \left( -1 + \frac{2}{t^2 + 1} \right) dt \\ &= - \int 1 dt + 2 \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = -t + 2 \arctan t + c \\ &= -\sin x + 2 \arctan(\sin x) + c \end{aligned}$$

[b]

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = - \int \frac{1}{1 - t^2} dt \\ &= - \int \frac{1}{(1 - t)(1 + t)} dt = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} \\ 1 = A(1+t) + B(1-t) \\ 1 = A + At + B - Bt \\ 1 = (A - B)t + A + B \\ A - B = 0 \wedge A + B = 1 \\ A = \frac{1}{2} \wedge B = \frac{1}{2} \end{array} \right| \\ &= - \left( \int \frac{\frac{1}{2}}{1-t} dt + \int \frac{\frac{1}{2}}{1+t} dt \right) = -\frac{1}{2} \left( \int \frac{1}{1-t} dt + \int \frac{1}{1+t} dt \right) \\ &= -\frac{1}{2} (-\ln |1-t| + \ln |1+t|) + c \\ &= \frac{1}{2} (\ln |1 - \cos x| - \ln |1 + \cos x|) + c \end{aligned}$$

(c)

$$\int \cos(2x) \cos(3x) dx = \left| \begin{array}{l} \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{2} (\cos \alpha + \cos \beta) \\ \frac{\alpha+\beta}{2} = 3x \wedge \frac{\alpha-\beta}{2} = 2x \\ \alpha = 5x \wedge \beta = x \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \int (\cos(5x) + \cos x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos(5x) dx + \frac{1}{2} \int \cos x dx$$

$$= \frac{1}{10} \sin(5x) + \frac{1}{2} \sin x + c$$

gdyż

$$\int \cos(5x) dx = \left| \begin{array}{l} 5x = t \\ 5dx = dt \\ dx = \frac{1}{5} dt \end{array} \right| = \frac{1}{5} \int \cos t dt = \frac{1}{5} \sin t + c = \frac{1}{5} \sin(5x) + c$$

(d)

$$\int \frac{1}{1 + 3 \cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = u \\ x = \arctg u \\ dx = \frac{1}{1+u^2} du \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+u^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{1+u^2}}{1 + 3 \cdot \frac{1}{1+u^2}} du = \int \frac{\frac{1}{1+u^2}}{1 + \frac{3}{1+u^2}} du$$

$$= \int \frac{\frac{1}{1+u^2}}{\frac{u^2+1+3}{1+u^2}} du = \int \frac{1}{u^2 + 4} du = \int \frac{1}{4 \left( \frac{1}{4} u^2 + 1 \right)} du$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{\frac{1}{4} u^2 + 1} du = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left( \frac{1}{2} u \right)^2 + 1} du = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} u = t \\ \frac{1}{2} du = dt \\ du = 2 dt \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \arctg t + c = \frac{1}{2} \arctg \left( \frac{1}{2} u \right) + c$$

$$= \frac{1}{2} \arctg \left( \frac{1}{2} \operatorname{tg} x \right) + c$$

(e)

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \cos^5 x dx &= \int \sin^4 x \cdot \cos^4 x \cdot \cos x dx = \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 \cdot \cos x dx \\ &= \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t^4 (1 - t^2)^2 dt = \int t^4 (1 - 2t^2 + t^4) dt \\ &= \int (t^4 - 2t^6 + t^8) dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 + c \\ &= \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + c\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}\int \sin^6(2x) dx &= \frac{-\sin^5(2x) \cos(2x)}{12} + \frac{5}{6} \int \sin^4(2x) dx \\ &= \frac{-\sin^5(2x) \cos(2x)}{12} + \frac{5}{6} \left( -\frac{\sin^3(2x) \cos(2x)}{8} + \frac{3}{4} \int \sin^2(2x) dx \right) \\ &= -\frac{1}{12} \sin^5(2x) \cos(2x) - \frac{5}{48} \sin^3(2x) \cos(2x) \\ &\quad + \frac{15}{24} \left( -\frac{\sin(2x) \cos(2x)}{4} + \frac{1}{2} \int dx \right) \\ &= -\frac{1}{12} \sin^5(2x) \cos(2x) - \frac{5}{48} \sin^3(2x) \cos(2x) - \frac{15}{96} \sin(2x) \cos(2x) \\ &\quad + \frac{15}{48} x + c\end{aligned}$$

**Zadanie 2.** Obliczyć całki:

(a)  $\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx$

(c)  $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-6x+8}} dx$

(b)  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+15}} dx$

### Rozwiązania:

(a)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \sqrt{2}t \\ dx = \sqrt{2}dt \\ x^2 = 2t^2 \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{2-2t^2}} \cdot \sqrt{2}dt = \int \frac{1}{\sqrt{2(1-t^2)}} \cdot \sqrt{2}dt \\ &= \int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-t^2}} dt = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arcsin t + c \\ &= \arcsin \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + c\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+15}} dx &= \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2-6x+15} = t-x \\ x^2-6x+15 = (t-x)^2 \\ x^2-6x+15 = t^2-2xt+x^2 \\ 2xt-6x = t^2-15 \\ x(2t-6) = t^2-15 \\ x = \frac{t^2-15}{2t-6} \\ dx = \frac{2t(2t-6)-2(t^2-15)}{(2t-6)^2} dt \\ dx = \frac{4t^2-12t-2t^2+30}{(2t-6)^2} dt \\ dx = \frac{2t^2-12t+30}{(2t-6)^2} dt \\ \sqrt{x^2-6x+15} = t - \frac{t^2-15}{2t-6} \\ \sqrt{x^2-6x+15} = \frac{2t^2-6t-t^2+15}{2t-6} \\ \sqrt{x^2-6x+15} = \frac{t^2-6t+15}{2t-6} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2t^2-12t+30}{(2t-6)^2}}{\frac{t^2-6t+15}{2t-6}} dt \\ &= \int \frac{2(t^2-6t+15)}{(2t-6)^2} \cdot \frac{2t-6}{t^2-6t+15} dt = \int \frac{2}{2t-6} dt \\ &= \int \frac{2}{2(t-3)} dt = \int \frac{1}{t-3} dt = \left| \begin{array}{l} t-3 = u \\ dt = du \end{array} \right| = \int \frac{1}{u} du \\ &= \ln |u| + c = \ln |t-3| + c \\ &= \ln |\sqrt{x^2-6x+15} + x-3| + c\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 6x + 8}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{-(x+3)^2 + 17}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{17 - (x+3)^2}} dx \\ &= \left| \begin{array}{l} x+3 = t \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{17 - t^2}} dt = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{17}u \\ dt = \sqrt{17}du \end{array} \right| \\ &= \int \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17 - 17u^2}} du = \int \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{1 - u^2}} du = \int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du \\ &= \arcsin u + c = \arcsin \left( \frac{t}{\sqrt{17}} \right) + c = \arcsin \left( \frac{x+3}{\sqrt{17}} \right) + c\end{aligned}$$

## Zadania do samodzielnego rozwiązywania

**Zadanie 3.** Obliczyć całki:

(a)  $\int \frac{1}{3 \sin x + 4 \cos x} dx$

(e)  $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$

(b)  $\int \sin(2x) \sin(5x) dx$

(f)  $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin(2x)} dx$

(c)  $\int \cos x \cos(3x) dx$

(g)  $\int \cos^5 x dx$

(d)  $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 2} dx$

(h)  $\int \sin^3 x \cos^5 x dx$

**Zadanie 4.** Obliczyć całki:

(a)  $\int \frac{1}{\sqrt{3 - x^2}} dx$

(c)  $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$

(b)  $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 4x + 5}} dx$

(d)  $\int x \sqrt{2 + 3x} dx$

(e)  $\int \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} dx$

(g)  $\int \frac{1}{x\sqrt{-x^2+x+2}} dx$

(f)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$

(h)  $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4x+3}} dx$

## Literatura

- [1] Gewert, Marian, i in. *Analiza matematyczna 1 : przykłady i zadania*. Wyd. 17 powiększ., Oficyna Wydawnicza GiS, 2008.
- [2] Gewert, Marian, i in. *Analiza matematyczna 1 : definicje, twierdzenia, wzory*. Wydanie XXX powiększone., Oficyna Wydawnicza GIS, 2023.
- [3] Krysicki Włodzimierz, i Włodarski Lech. *Analiza matematyczna w zadaniach. Część I*. 29. wyd., Wydawnictwo Naukowe PWN, 2013.

**Materiały do przedmiotu:**

**MATEMATYKA**

**Ćwiczenia nr 9**

Autor:

dr inż. Anna Futa

mgr inż. Michał Błaszczkowski

mgr inż. Magdalena Piłat-Rożek



Fundusze Europejskie  
dla Rozwoju Społecznego



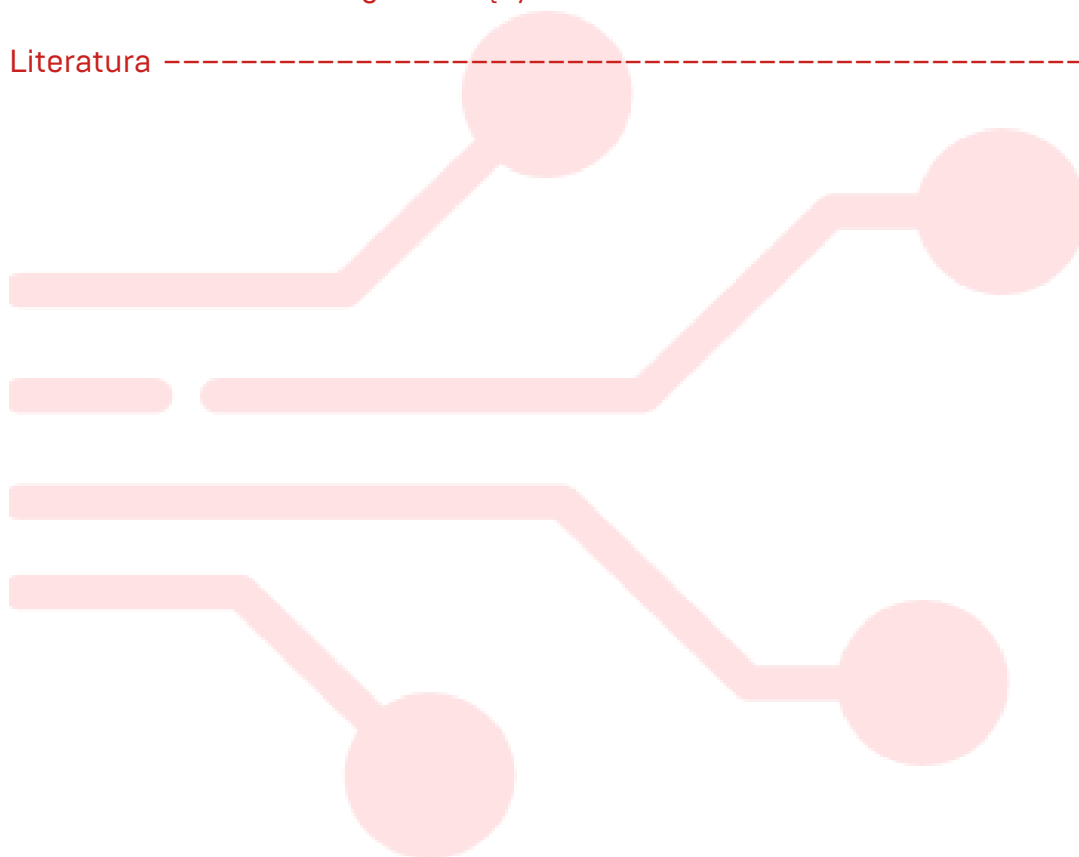
Rzeczpospolita  
Polska

Dofinansowane przez  
Unię Europejską



## Spis treści

|                                        |    |
|----------------------------------------|----|
| Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń         | 3  |
| Przykłady zadań z rozwiązaniami        | 5  |
| Zadania do samodzielnego rozwiązywania | 15 |
| Literatura                             | 18 |





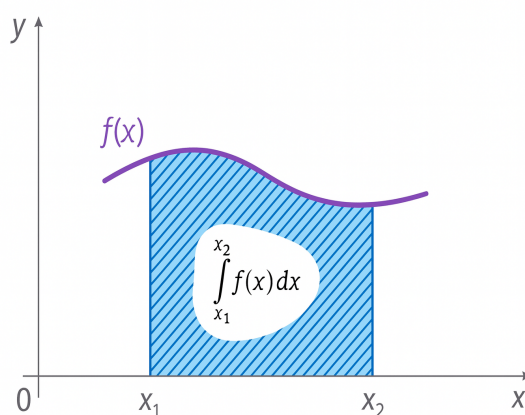
## Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń

Tematem ćwiczeń jest rozwiązywanie zadań związanych z zastosowaniem całek oznaczonych. Podczas zajęć omówione zostaną wybrane metody obliczania całek oznaczonych oraz sposoby ich wykorzystania do wyznaczania pól obszarów ograniczonych wykresami funkcji, długości łuków i objętości brył obrotowych.

Całka oznaczona jest jednym z podstawowych pojęć analizy matematycznej i opiera się na granicy sum Riemanna. Dla funkcji  $f(x)$  określonej oraz ograniczonej na przedziale  $[a, b]$ , definiuje się ją jako granicę:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i,$$

gdzie przedział  $[a, b]$  został podzielony na  $n$  części  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ , a  $c_i$  jest dowolnym punktem należącym do  $i$ -tego podprzedziału. Jeżeli ta granica istnieje i nie zależy od wyboru punktów  $c_i$ , to nazywamy ją całką oznaczoną funkcji  $f(x)$  na przedziale  $[a, b]$ . Interpretacja geometryczna całki oznaczonej została przedstawiona na rysunku 1.



**Rysunek 1.** Interpretacja geometryczna całki oznaczonej

Geometrycznie wartość całki oznaczonej

$$\int_a^b f(x) dx$$

odpowiada polu obszaru zawartego między wykresem funkcji  $f(x)$ , osią  $OX$  oraz prostymi  $x = a$  i  $x = b$ . Jeżeli  $f(x) > 0$ , całka oznacza pole obszaru nad osią  $OX$ , natomiast dla  $f(x) < 0$  przyjmuje wartość ujemną, odpowiadając polu obszaru pod osią. Całkowite pole ograniczone wykresem funkcji wyraża się wzorem:

$$\int_a^b |f(x)| dx.$$

W przypadku, gdy obszar jest ograniczony przez dwie funkcje – górną  $f_g(x)$  i dolną  $f_d(x)$  – w przedziale  $[a, b]$ , pole  $P$  obliczamy, całkując różnicę tych funkcji:

$$P = \int_a^b [f_g(x) - f_d(x)] dx.$$

Długość łuku  $L$  (lub długość krzywej) jest wyznaczana przez sumowanie nieskończenie małych przyrostów długości  $ds$  wzdłuż krzywej. Konceptyjnie,  $ds$  jest przyrostem opartym na twierdzeniu Pitagorasa:  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ .

Długość łuku  $L$  funkcji różniczkowalnej  $y = f(x)$  w przedziale  $[a, b]$  oblicza się według następującego wzoru:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Długość łuku  $L$  krzywej parametrycznej  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  w przedziale parametru  $t \in [t_1, t_2]$  oblicza się według następującego wzoru:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Całka oznaczona pozwala również na precyzyjne wyznaczanie objętości i powierzchni brył powstałych przez obrót krzywej  $y = f(x)$  wokół osi  $OX$  w przedziale  $[a, b]$ . Objętość bryły oblicza się przez sumowanie objętości nieskończenie cienkich krążków, których promień jest równy wartości funkcji  $f(x)$ :

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Pole powierzchni bocznej  $A$  bryły obrotowej wyznaczamy, sumując pola powierzchni nieskończenie wąskich pierścieni, gdzie  $f(x)$  jest promieniem, a  $\sqrt{1 + (y')^2} dx$  jest elementarną długością łuku:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

## Przykłady zadań z rozwiązaniami

**Zadanie 1.** Obliczyć podane całki oznaczone.

(a)  $\int_1^3 \left(4x^2 - 3x - \frac{6}{x^2}\right) dx$

(e)  $\int_6^8 \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx$

(b)  $\int_0^1 x \sin(3x^2 + 2) dx$

(f)  $\int_0^1 \frac{x - 3}{x^2 - 6x + 10} dx$

(c)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x) dx$

(g)  $\int_1^2 \frac{2x + 3}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$

(d)  $\int_{\pi}^{2\pi} \sin(2x) \cos(x) dx$

(h)  $\int_1^5 \frac{dx}{3x^2 - 9x + 15}$

$$(i) \int_1^3 \frac{dx}{x^2 - 6x + 18}$$

$$(j) \int_1^3 \frac{2}{\sqrt{-9x^2 + 24x + 9}} dx$$

### Rozwiązania:

(a)

$$\begin{aligned} \int_1^3 \left( 4x^2 - 3x - \frac{6}{x^2} \right) dx &= \int_1^3 4x^2 dx - \int_1^3 3x dx - \int_1^3 \frac{6}{x^2} dx = \left[ \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{6}{x} \right]_1^3 = \\ &= \left( \frac{4}{3} \cdot 27 - \frac{3}{2} \cdot 9 + \frac{6}{3} \right) - \left( \frac{4}{3} \cdot 1 - \frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{6}{1} \right) = \left( 36 - \frac{27}{2} + 2 \right) - \left( \frac{4}{3} - \frac{3}{2} + 6 \right) = \\ &= \frac{49}{2} - \frac{35}{6} = \frac{147-35}{6} = \frac{56}{3} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sin(3x^2 + 2) dx &= \left| \begin{array}{l} u = 3x^2 + 2 \\ du = 6x dx \\ x dx = \frac{1}{6} du \\ x = 0 \Rightarrow u = 2 \\ x = 1 \Rightarrow u = 5 \end{array} \right| = \frac{1}{6} \int_2^5 \sin(u) du = \\ &= \frac{1}{6} [-\cos(u)]_2^5 = \frac{1}{6} [-\cos(5) - (-\cos(2))] = \frac{1}{6} [\cos(2) - \cos(5)] \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx &= \left| \begin{array}{ll} f(x) = x^2 & g'(x) = \sin x \\ f'(x) = 2x & g(x) = -\cos x \end{array} \right| = [-x^2 \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos x dx = \\ &= [-x^2 \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} f(x) = 2x & g'(x) = \cos x \\ f'(x) = 2 & g(x) = \sin x \end{array} \right| = \\ &= [-x^2 \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2[x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx = \\ &= [-x^2 \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2[x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2[\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = [-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \end{aligned}$$

$$= \left( -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + 2 \cos \frac{\pi}{2} \right) - \left( -(0)^2 \cos 0 + 2 \cdot 0 \cdot \sin 0 + 2 \cos 0 \right) =$$

$$= (0 + \pi + 0) - (0 + 0 + 2) = \pi - 2$$

[d]

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin(2x) \cos x \, dx = \left| \sin(2x) = 2 \sin x \cos x \right| = \int_{\pi}^{2\pi} 2 \sin x \cos^2 x \, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin x \, dx \\ x = \pi \Rightarrow u = -1 \\ x = 2\pi \Rightarrow u = 1 \end{array} \right| = -2 \int_{-1}^1 u^2 \, du = -2 \left[ \frac{u^3}{3} \right]_{-1}^1 = -2 \left( \frac{1}{3} - \left( -\frac{1}{3} \right) \right) = -\frac{4}{3}$$

[e]

$$\int_6^8 \frac{1}{x^2 + 3x + 2} \, dx = \left| x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) \right| = \int_6^8 \frac{1}{(x+1)(x+2)} \, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \\ 1 = A(x+2) + B(x+1) \\ 1 = (A+B)x + (2A+B) \\ \begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases} \end{array} \right| = \int_6^8 \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) \, dx =$$

$$= \left[ \ln |x+1| - \ln |x+2| \right]_6^8 = (\ln 9 - \ln 10) - (\ln 7 - \ln 8) = \ln \frac{9}{10} - \ln \frac{7}{8} =$$

$$= \ln \frac{9 \cdot 8}{10 \cdot 7} = \ln \frac{36}{35}$$

$$[f] \int_0^1 \frac{x-3}{x^2-6x+10} \, dx = \left| \begin{array}{l} x^2-6x+10 = (x-3)^2 + 1 \\ u = (x-3)^2 + 1, \quad du = 2(x-3) \, dx \\ (x-3) \, dx = \frac{1}{2} \, du \\ x=0 \Rightarrow u=10, \quad x=1 \Rightarrow u=5 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_{10}^5 \frac{1}{u} \, du =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_5^{10} \frac{1}{u} \, du = -\frac{1}{2} \ln(u) \Big|_5^{10} = -\frac{1}{2} (\ln 10 - \ln 5) = -\frac{1}{2} \ln \frac{10}{5} = -\frac{1}{2} \ln 2$$

$$\begin{aligned}
 \text{(g)} \quad \int_2^3 \frac{2x+3}{x^3-x^2+x-1} dx &= \left| x^3-x^2+x-1 = (x-1)(x^2+1) \right| = \int_2^3 \frac{(2x+3)dx}{(x-1)(x^2+1)} = \\
 &= \left| \begin{aligned} \frac{2x+3}{(x-1)(x^2+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\ 2x+3 &= A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1) \\ 2x+3 &= (A+B)x^2 + (-B+C)x + (A-C) \end{aligned} \right| = \\
 &= \left| \begin{aligned} \begin{cases} A+B=0, \\ -A+C=3, \\ A+C=2 \end{cases} &\quad \begin{cases} A=\frac{5}{2}, \\ B=-\frac{5}{2}, \\ C=-\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned} \right| = \\
 &= \int_2^3 \frac{2x+3}{(x-1)(x^2+1)} dx = \int_2^3 \left( \frac{\frac{5}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1} \right) dx = \int_2^3 \frac{\frac{5}{2}}{x-1} dx + \int_2^3 \frac{-\frac{5}{2}x}{x^2+1} dx + \\
 &+ \int_2^3 \frac{-\frac{1}{2}}{x^2+1} dx = \frac{5}{2} \left[ \ln|x-1| \right]_2^3 - \frac{5}{2} \int_2^3 \frac{x}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \left[ \arctan x \right]_2^3 = \\
 &= \frac{5}{2} \left[ \ln|x-1| \right]_2^3 - \frac{5}{2} \left[ \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_2^3 - \frac{1}{2} \left[ \arctan x \right]_2^3 = \\
 &= \left[ \frac{5}{2} \ln|x-1| \right]_2^3 - \left[ \frac{5}{4} \ln(x^2+1) \right]_2^3 - \left[ \frac{1}{2} \arctan x \right]_2^3 = \\
 &= \left( \frac{5}{2} \ln 2 \right) - \left( \frac{5}{4} \ln 10 \right) - \left( \frac{1}{2} \arctan 3 \right) - \left( 0 - \frac{5}{4} \ln 5 - \frac{1}{2} \arctan 2 \right) = \\
 &= \frac{5}{2} \ln 2 - \frac{5}{4} \ln 10 + \frac{5}{4} \ln 5 + \frac{1}{2} \arctan 2 - \frac{1}{2} \arctan 3 = \frac{5}{4} \ln 2 - \frac{1}{2} \arctan 3 + \\
 &+ \frac{1}{2} \arctan 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(h)} \quad \int_1^5 \frac{dx}{3x^2-9x+15} &= \frac{1}{3} \int_1^5 \frac{dx}{x^2-3x+5} = \left| \begin{aligned} x^2-3x+5 &= \left[ \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2 \right] \\ u &= x - \frac{3}{2} \\ du &= dx \\ x=1 &\Rightarrow u = -\frac{1}{2} \\ x=5 &\Rightarrow u = \frac{7}{2} \end{aligned} \right| =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} \frac{du}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2} = \frac{2}{3\sqrt{11}} \left[ \arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{11}}\right) \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} = \frac{2}{3\sqrt{11}} \left[ \arctan\left(\frac{7}{\sqrt{11}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right) \right]$$

$$(i) \int_1^3 \frac{dx}{x^2 - 6x + 18} = \left| \begin{array}{l} x^2 - 6x + 18 = (x-3)^2 + 9 \\ u = x-3, \quad du = dx \\ x=1 \Rightarrow u=-2, \quad x=3 \Rightarrow u=0 \end{array} \right| = \int_{-2}^0 \frac{du}{u^2 + 9} =$$

$$= \frac{1}{3} \left[ \arctan\left(\frac{u}{3}\right) \right]_{-2}^0 = \frac{1}{3} (\arctan 0 - \arctan(-\frac{2}{3})) = \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$(j) \int_1^3 \frac{2}{\sqrt{-9x^2 + 24x + 9}} dx = \int_1^3 \frac{2}{\sqrt{25 - (9x^2 - 24x + 16)}} dx = \int_1^3 \frac{2}{\sqrt{25 - (3x-4)^2}} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = 3x-4 \\ du = 3 dx \\ x=1 \Rightarrow u=-1 \\ x=3 \Rightarrow u=5 \end{array} \right| = \frac{2}{3} \int_{-1}^5 \frac{du}{\sqrt{25 - u^2}} = \frac{2}{3} \left[ \arcsin\left(\frac{u}{5}\right) \right]_{-1}^5 =$$

$$= \frac{2}{3} (\arcsin 1 - \arcsin(-\frac{1}{5})) = \frac{2}{3} \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{5} \right)$$

**Zadanie 2.** Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi:

(a)  $y = x^2, \quad y = x - x^2$

(b)  $y = 4 - x^2, \quad y = x + 1, \quad x = 0$

**Rozwiązania:**

(a) Wyznaczamy punkty przecięcia krzywych  $y = x^2$  oraz  $y = x - x^2$ , rozwiązując poniższy układ równań

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x - x^2. \end{cases} \Rightarrow x^2 = x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - x = 0 \Rightarrow x(2x - 1) = 0.$$

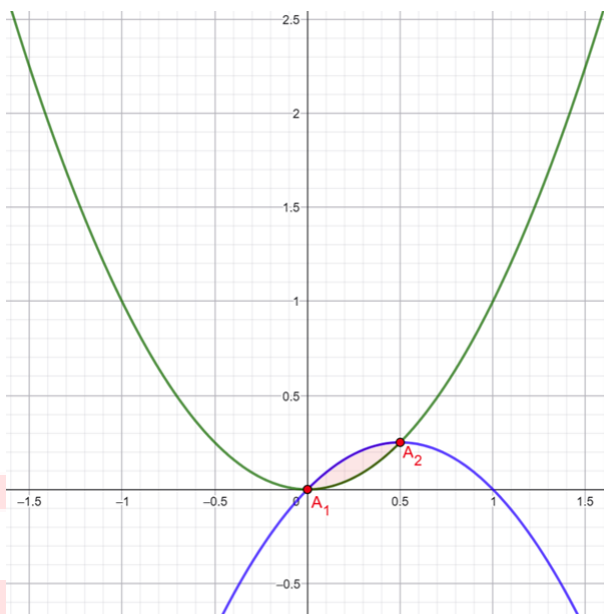
Stąd  $x = 0$  lub  $x = \frac{1}{2}$ . Podstawiając do równania  $y = x^2$  otrzymujemy, że

$$x = 0 \Rightarrow y = 0, \quad x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{4}.$$

Zatem punkty przecięcia dwóch krzywych to

$$A_1 = (0, 0), \quad A_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

Analizowany obszar został przedstawiony na rysunku 2.



**Rysunek 2.** Obszar ograniczony krzywymi  $y = x^2$  oraz  $y = x - x^2$

Na przedziale  $[0, \frac{1}{2}]$  obszar jest ograniczony od góry przez krzywą  $y = x - x^2$ , a od dołu przez krzywą  $y = x^2$ . Zatem pole obszaru można wyrazić następująco

$$P = \int_0^{\frac{1}{2}} [(x - x^2) - x^2] dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (x - 2x^2) dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24}.$$

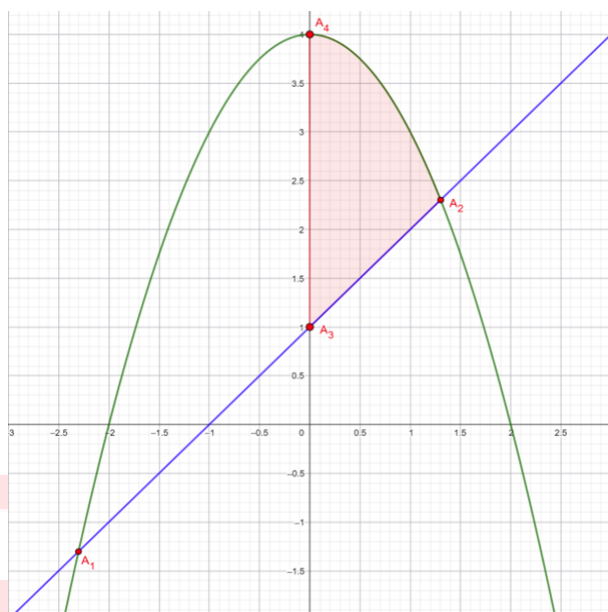
- (b) Wyznaczamy punkty przecięcia krzywych  $y = 4 - x^2$  oraz  $y = x + 1$ , rozwiązując układ

$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = x + 1. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 4 - x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 + x - 3 = 0.$$

Stąd  $x_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$  oraz  $x_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ . Ponieważ obszar ogranicza również prosta  $x = 0$ , rozpatrujemy część w półpłaszczyźnie  $x \geq 0$ , czyli uwzględniamy jedynie dodatni pierwiastek  $x_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ .



Analizowany obszar został przedstawiony na rysunku 3.



**Rysunek 3.** Obszar ograniczony krzywymi  $y = 4 - x^2$ ,  $y = x + 1$  oraz prostą  $x = 0$

Odpowiadający punkt przecięcia krzywych to

$$A_2 = (x_2, x_2 + 1) = \left( \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right).$$

Dodatkowo prosta  $x = 0$  przecina krzywe w punktach

$$A_3 = (0, 1) \quad \text{oraz} \quad A_4 = (0, 4).$$

Na przedziale  $\left[0, \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}\right]$  obszar jest ograniczony od góry przez  $y = 4 - x^2$ , a od dołu przez  $y = x + 1$ . Zatem pole obszaru wynosi

$$P = \int_0^{\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}} [(4 - x^2) - (x + 1)] dx = \int_0^{\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}} (3 - x - x^2) dx = \left[ 3x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}}.$$

Po wykonaniu obliczeń otrzymujemy

$$P = \frac{13\sqrt{13} - 19}{12}.$$

**Zadanie 3.** Oblicz długość łuku krzywej na podanym przedziale.

(a)  $y = \sqrt{x^3}, \quad x \in [0, 1]$

(b)  $y = \ln(\cos x), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

**Rozwiązania:**

(a)  $y = \sqrt{x^3}, \quad x \in [0, 1]$

W celu obliczenia długości łuku krzywej skorzystamy z następującego wzoru:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Najpierw obliczamy pochodną funkcji:

$$(\sqrt{x^3})' = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Wówczas:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx.$$

Zastosujemy podstawienie:

$$\left| \begin{array}{l} t = 1 + \frac{9}{4}x \\ dt = \frac{9}{4} dx \Rightarrow dx = \frac{4}{9} dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{13}{4} \end{array} \right| \Rightarrow L = \int_1^{\frac{13}{4}} \sqrt{t} \frac{4}{9} dt.$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$L = \frac{4}{9} \int_1^{\frac{13}{4}} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{4}{9} \left[ \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_1^{\frac{13}{4}} = \frac{8}{27} \left[ \left( \frac{13}{4} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] = \frac{8}{27} \left( \frac{13\sqrt{13}}{8} - 1 \right).$$

(b)  $y = \ln(\cos x), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Najpierw obliczamy pochodną funkcji:

$$(\ln(\cos x))' = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Wówczas:

$$L = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}} dx.$$

Na przedziale  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  mamy  $\cos x > 0$ , zatem

$$\sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\cos x},$$

czyli

$$L = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x} dx.$$

Ponieważ  $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x}$ , to

$$L = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \left. \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1 - t^2} dt.$$

Rozkład na ułamki proste:

$$\frac{1}{1 - t^2} = \frac{A}{1 - t} + \frac{B}{1 + t} \implies 1 = A(1 + t) + B(1 - t) = (A + B) + (A - B)t,$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = 0 \end{cases} \quad \text{stąd} \quad A = B = \frac{1}{2}.$$

Zatem:

$$L = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( \frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)} \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1-t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1+t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ -\ln(1-t) \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{2} \left[ \ln(1+t) \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \right) = \frac{1}{2} \ln(3 + 2\sqrt{2}).$$

**Zadanie 4.** Oblicz pole powierzchni oraz objętość bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej  $y = f(x)$  wokół osi  $Ox$  w podanym przedziale.

[a]  $y = 2\sqrt{2}x, \quad x \in [0, 1]$

[b]  $y = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [0, 1]$

**Rozwiązania:**

[a]  $y = 2\sqrt{2}x, \quad x \in [0, 1]$

Wzory ogólne na pole powierzchni i objętość bryły obrotowej względem osi  $Ox$  mają postać:

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Ponieważ

$$y = 2\sqrt{2}x,$$

to pochodna wynosi

$$y' = 2\sqrt{2}.$$

Podstawiając do wzoru na pole powierzchni, otrzymujemy:

$$S = 2\pi \int_0^1 (2\sqrt{2}x) \sqrt{1 + (2\sqrt{2})^2} dx = 2\pi \int_0^1 (2\sqrt{2}x) \sqrt{9} dx = 2\pi \int_0^1 (2\sqrt{2}x) \cdot 3 dx.$$

Zatem

$$S = 12\sqrt{2}\pi \int_0^1 x dx = 12\sqrt{2}\pi \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 6\sqrt{2}\pi.$$

Pole powierzchni bryły obrotowej wynosi:

$$S = 6\sqrt{2}\pi.$$

Objętość bryły obliczamy ze wzoru:

$$V = \pi \int_0^1 (2\sqrt{2}x)^2 dx = \pi \int_0^1 8x^2 dx = 8\pi \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8\pi}{3}.$$

(b) Niech  $y = \sqrt{1-x^2}$  dla  $x \in [0, 1]$ . Wtedy

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pole powierzchni:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^1 y \sqrt{1+(y')^2} dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}} dx = \\ &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2\pi \int_0^1 1 dx = 2\pi. \end{aligned}$$

Zatem

$$S = 2\pi.$$

Objętość:

$$V = \pi \int_0^1 y^2 dx = \pi \int_0^1 (1-x^2) dx = \pi \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \pi \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2\pi}{3}.$$

## Zadania do samodzielnego rozwiązywania

**Zadanie 5.** Obliczyć podane całki oznaczone.

(a)  $\int_1^5 (5x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 9x + 16) dx$

(h)  $\int_0^1 x^2 \arctan x dx$

(b)  $\int_{-1}^1 (2x^3 - 8x^3 + 5x - 3) dx$

(i)  $\int_4^8 \frac{11x - 1}{2x^2 + 9x - 5} dx$

(c)  $\int_1^3 \frac{x}{x^2 + 7} dx$

(j)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \sin x}$

(d)  $\int_0^2 x \sqrt[3]{3x + 2} dx$

(k)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}} dx$

(e)  $\int_1^3 x^2 e^{-x} dx$

(l)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4x dx}{\cos^2 x}$

(f)  $\int_1^e x \ln^2(x) dx$

(m)  $\int_1^5 \frac{dx}{x^2 - 2x + 17}$

(g)  $\int_0^2 \frac{e^{3x}}{1 + e^x} dx$

(n)  $\int_0^2 \frac{4 dx}{\sqrt{15 - 4x^2 + 4x}}$

**Zadanie 6.** Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi i przedstaw go graficznie.

(a)  $y = x^3, \quad y = 3x$

(e)  $x = y^2 - 4, \quad x = y + 2$

(b)  $y = 2x^2, \quad y^2 = 4x$

(f)  $y = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad y = \frac{1}{2}$

(c)  $y = x^2, \quad y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = x$

(g)  $y = xe^{-x}, \quad y = 0, \quad x = 2$

(d)  $y = \ln(x), \quad y = 0, \quad x = e^2$

(h)  $y = \sin(x), \quad y = \cos(x),$   
 $x \in [0, 2\pi]$

**Zadanie 7.** Oblicz długość łuku krzywej na podanym przedziale.

[a]  $y = 2x + 1, \quad x \in [0, 3]$

[b]  $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\ln x, \quad x \in [3, 4]$

[c]  $y = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}, \quad x \in [1, 2]$

[d]  $y = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right), \quad x \in [4, 5]$

[e]  $x(t) = \cos^3 t, \quad y(t) = \sin^3 t,$   
 $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

[f]  $x(t) = t - \sin t, \quad y(t) = 1 - \cos t,$   
 $t \in [0, 2\pi]$

[g]  $y = \ln(\sin x), \quad x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$

[h]  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in [0, 1]$

**Zadanie 8.** Oblicz pole powierzchni oraz objętość bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej  $y = f(x)$  wokół osi  $Ox$  w podanym przedziale.

[a]  $y = 3x, \quad x \in [0, 1]$

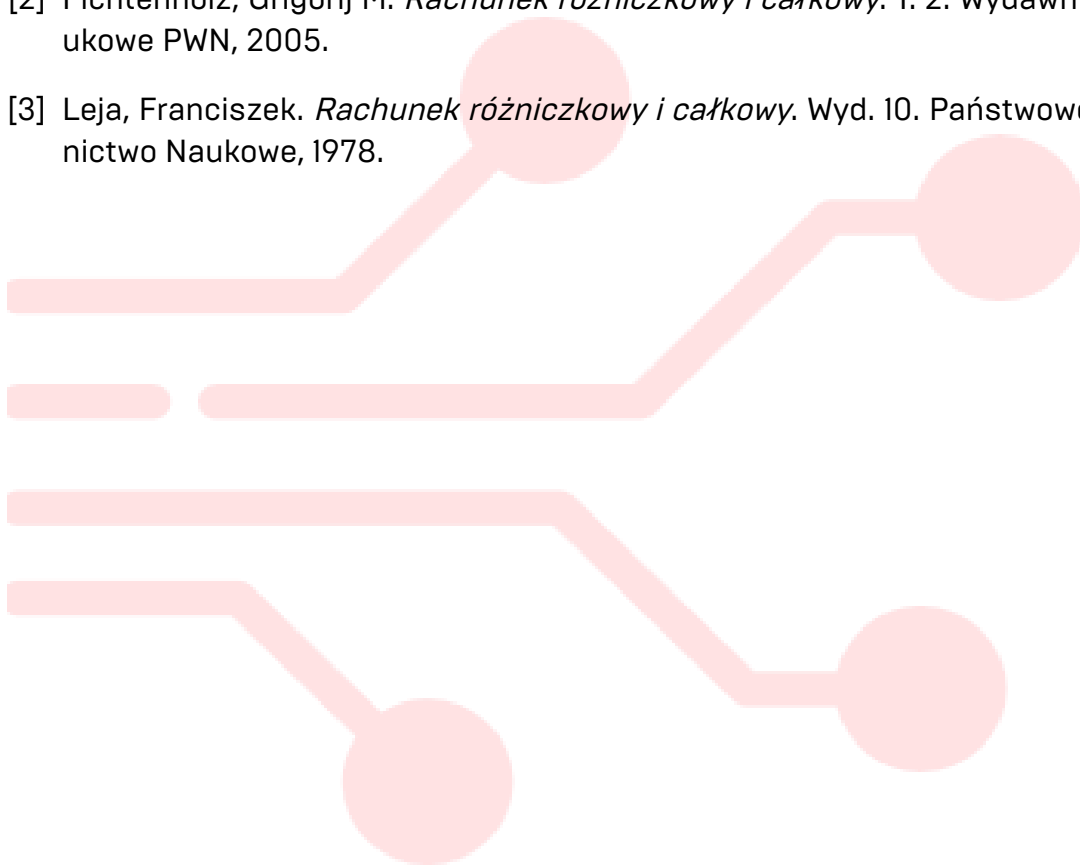
[c]  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in [-1, 1]$

[b]  $y = e^x, \quad x \in [0, 2]$

[d]  $y = \sin(x), \quad x \in [0, \pi]$

## Literatura

- [1] Krysicki, Włodzimierz, i Lech Włodarski. *Analiza matematyczna w zadaniach*. Cz. 1. Wyd. 20. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2018.
- [2] Fichtenholz, Grigorij M. *Rachunek różniczkowy i całkowy*. T. 2. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2005.
- [3] Leja, Franciszek. *Rachunek różniczkowy i całkowy*. Wyd. 10. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1978.





**Materiały do przedmiotu:**

**MATEMATYKA**

**Ćwiczenia nr 10**

Autor:

dr inż. Anna Futa

mgr inż. Michał Błaszczkowski

mgr inż. Magdalena Piłat-Rożek



Fundusze Europejskie  
dla Rozwoju Społecznego



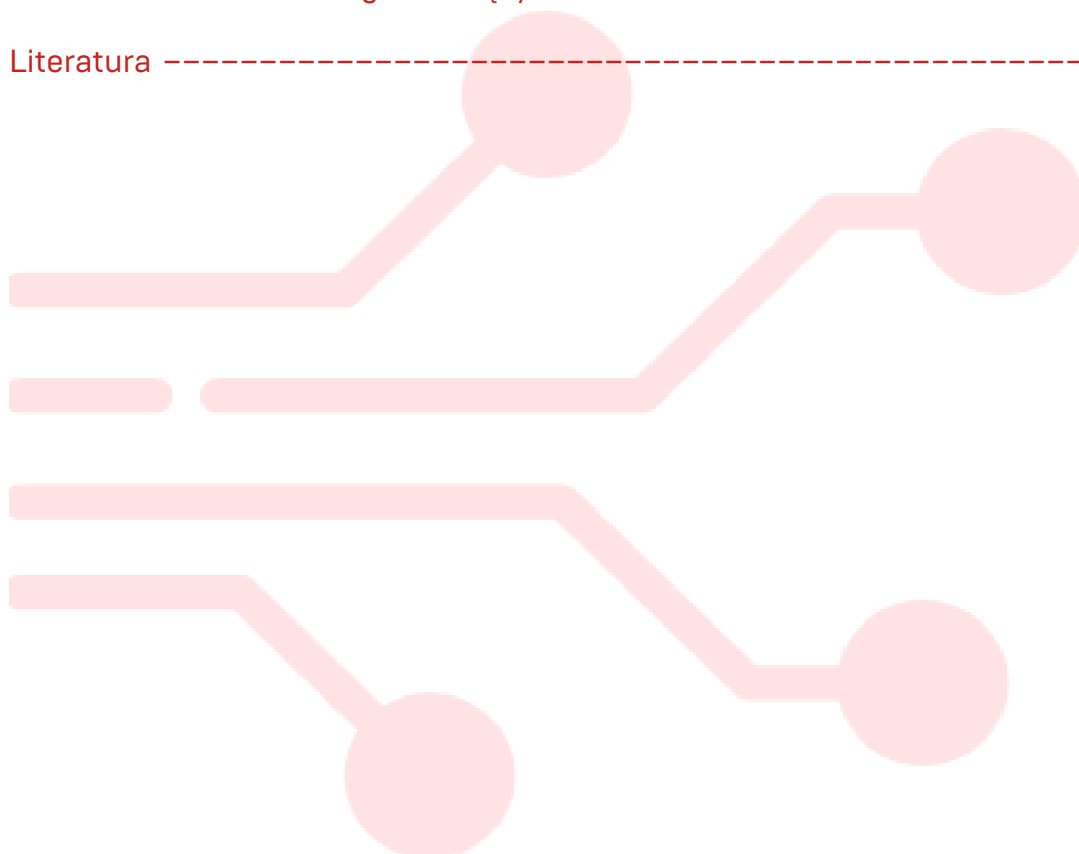
Rzeczpospolita  
Polska

Dofinansowane przez  
Unię Europejską



## Spis treści

|                                        |    |
|----------------------------------------|----|
| Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń         | 3  |
| Przykłady zadań z rozwiązaniami        | 4  |
| Zadania do samodzielnego rozwiązywania | 12 |
| Literatura                             | 15 |



## Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń

Tematem ćwiczeń jest wprowadzenie do algebry macierzy oraz praktyczne wykonywanie podstawowych działań na macierzach, które stanowią fundamentalne narzędzie w wielu dziedzinach nauki i inżynierii.

Macierz jest prostokątną tablicą liczb lub funkcji, ułożonych w wierszach i kolumnach, która jest określana przez swój wymiar  $m \times n$ . Dwie macierze  $A$  i  $B$  są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam wymiar i wszystkie odpowiadające sobie elementy są sobie równe. Do najważniejszych rodzajów macierzy należą:

- **macierz zerowa (0):** macierz dowolnego wymiaru, której wszystkie elementy są równe zero (wykorzystywana jako element neutralny w dodawaniu macierzy).
- **macierz kwadratowa:** macierz, w której liczba wierszy  $m$  jest równa liczbie kolumn  $n$  ( $m = n$ ). Macierze tego typu stanowią podstawę do definiowania pojęć takich jak wyznacznik, macierz odwrotna czy wartości własne.
- **macierz jednostkowa (I):** macierz kwadratowa, w której elementy na głównej przekątnej są równe jeden, a pozostałe elementy są równe zero, to jest:  $I_{ij} = \delta_{ij}$ , gdzie  $\delta_{ij}$  to delta Kroneckera.
- **macierz transponowana ( $A^T$ ):** macierz, która powstaje z macierzy  $A = [a_{ij}]$  wymiaru  $m \times n$  przez zamianę wierszy na kolumny. Jej wymiar to  $n \times m$ , a elementy  $a_{ij}^T$  są równe  $a_{ji}$ .

Podstawowe operacje na macierzach obejmują:

- **dodawanie i odejmowanie macierzy** — możliwe wyłącznie dla macierzy o identycznych wymiarach. Działania te wykonuje się przez dodawanie (lub odejmowanie) odpowiadających sobie elementów.
- **mnożenie przez skalar** — polega na pomnożeniu każdego elementu macierzy przez stałą liczbę rzeczywistą (skalar).
- **mnożenie macierzy** — iloczyn  $A_{m \times n} \cdot B_{n \times p}$  jest określony tylko wtedy, gdy liczba kolumn macierzy  $A$  jest równa liczbie wierszy macierzy  $B$ . Macierz wynikowa  $C = A \cdot B$  ma wymiar  $m \times p$ , a jej element  $c_{ij}$  oblicza się jako:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

## Przykłady zadań z rozwiązaniami

**Zadanie 1.** Wykonaj następujące operacje arytmetyczne dla podanych macierzy.

(a)  $A - 2B$ , gdzie  $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

(b)  $2A - B + 3C$ , gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)  $\pi A + e B - 2C$ , gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

(d)  $A + 2B^T - 3C$ , gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

(e)  $2A^T + 3B - C^T$ , gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(f)  $A \cdot B$ , gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(g)  $(A + B) \cdot C^T$ , gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

### Rozwiązania:

(a)

$$A - 2B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -7 & 3 \\ -8 & 2 & -15 \end{bmatrix}$$

(b)

$$2A - B + 3C = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & -9 \\ -6 & 12 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -9 & -11 \\ 0 & 17 & 10 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\pi A = \begin{bmatrix} \pi & -\pi \\ 2\pi & 0 \end{bmatrix}, \quad eB = \begin{bmatrix} 0 & 3e \\ -4e & e \end{bmatrix}, \quad -2C = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\pi A + eB - 2C = \begin{bmatrix} \pi & -\pi \\ 2\pi & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3e \\ -4e & e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi - 4 & -\pi + 3e - 2 \\ 2\pi - 4e + 2 & e - 10 \end{bmatrix}$$

(d)

$$B^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad 2B^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ -2 & 10 & 4 \end{bmatrix}, \quad -3C = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -12 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A + 2B^T - 3C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ -2 & 10 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -12 & 9 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 4 \\ -11 & 20 & 5 \end{bmatrix}$$

(e)

$$2A^T = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -4 \\ -2 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 14 \end{bmatrix}, \quad 3B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -9 \\ 6 & -3 & 15 \\ 12 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2A^T + 3B - C^T = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -4 \\ -2 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & -9 \\ 6 & -3 & 15 \\ 12 & 6 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 & -18 \\ 2 & 2 & 27 \\ 11 & 2 & 13 \end{bmatrix}$$

[f]

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) + 3 \cdot 4 & 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 5 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 0 \\ 0 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + 5 \cdot 4 & 0 \cdot 0 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 5 + (-1) \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & -13 & -3 \\ 8 & 15 & 8 \\ -3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

[g]

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & -2+1 \\ 3+(-1) & 0+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(A + B) \cdot C^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 & 3 \cdot 5 + (-1) \cdot (-2) \\ 2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 & 2 \cdot 5 + 4 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 17 \\ 12 & 2 \end{bmatrix}$$

**Zadanie 2.** Wyznacz macierz  $X$ .

(a)  $A \cdot B - X = C^T$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)  $2X - 3A = B \cdot C^T$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(c)  $X^T - 2A = C \cdot B^T$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

**Rozwiązania:**

(a)

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 14 \end{bmatrix} \\ C^T &= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A \cdot B - X = C^T \Rightarrow -X = C^T - A \cdot B \Rightarrow X = A \cdot B - C^T$$

$$X = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 14 \end{bmatrix}$$

(b)

$$C^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}$$

$$3A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$$

$$2X - 3A = B \cdot C^T \Rightarrow 2X = B \cdot C^T + 3A \Rightarrow X = \frac{1}{2}(B \cdot C^T + 3A)$$

$$X = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 9 & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 21 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{7}{2} \\ \frac{21}{2} & 10 \end{bmatrix}$$

(c)

$$B^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C \cdot B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot 5 + 1 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) & 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 0 \\ (-1) \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & (-1) \cdot 5 + 4 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 10 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$



$$X^T - 2A = C \cdot B^T \implies X^T = C \cdot B^T + 2A$$

$$X^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 10 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 7 & 16 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$X = (X^T)^T = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ -4 & 16 & -3 \end{bmatrix}$$

**Zadanie 3.** Oblicz wskazaną potęgę danej macierzy.

(a)  $A^4$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)  $B^3$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Rozwiązania:**

(a)

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \\ A^4 &= A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 7 \cdot 7 + 4 \cdot 6 & 7 \cdot 4 + 4 \cdot 7 \\ 6 \cdot 7 + 7 \cdot 6 & 6 \cdot 4 + 7 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 73 & 56 \\ 84 & 73 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(b)

$$B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 & (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 4 & -1 & 6 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 4 & -1 & 6 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (-1) \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 & (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 0 & (-1) \cdot 0 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 6 \cdot 2 & 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 6 \cdot 0 & 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 + 6 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 4 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 2 & 18 \\ 17 & 7 & 3 \\ 2 & 12 & 13 \end{bmatrix}$$

**Zadanie 4.** Sprawdzić, czy macierz  $B$  jest odwrotna do macierzy  $A$ .

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

### Rozwiązania:

(a)

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \cdot A &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \\ (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 3 & (-3) \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Odpowiedź: Macierz  $B$  jest odwrotna do macierzy  $A$ .

(b)

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \cdot A &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \\ (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 3 & (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Odpowiedź: Macierz  $B$  nie jest odwrotna do macierzy  $A$ .

[c]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Odpowiedź: Macierz  $B$  jest odwrotna do macierzy  $A$ .

## Zadania do samodzielnego rozwiązywania

**Zadanie 5.** Wykonaj następujące operacje arytmetyczne dla podanych macierzy.

[a]  $A - 3B$ , gdzie  $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

[b]  $3A - 2B + C$ , gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

[c]  $eA - \pi B + 2C$ , gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

[d]  $A + 3B^T - 2C$ , gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

[e]  $2A^T - B + 4C^T$ , gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

[f]  $A \cdot B$ , gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

[g]  $(A - B) \cdot C^T$ , gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

**Zadanie 6.** Wyznacz macierz X.

[a]  $A \cdot B + X = 2C^T$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(b)  $3X + A = B \cdot C^T - 2A$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

(c)  $X^T + 2A = 3C \cdot B^T$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(d)  $X - 2A^T = B \cdot C$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(e)  $X^T - 3A = 2C - B$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

**Zadanie 7.** Oblicz wskazaną potęgę danej macierzy.

(a)  $A^3$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(b)  $B^4$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(c)  $C^3$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(d)  $D^5$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**Zadanie 8.** Sprawdź, czy macierz  $B$  jest odwrotna do macierzy  $A$ .

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

## Literatura

- [1] Żółtowska, Elżbieta. *Algebra liniowa*. Wyd. 2. Wydawnictwo Absolwent, Łódź, 2007.
- [2] Kostrikin, A. I. *Algebra liniowa i geometria*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2003.
- [3] Topp, Jerzy. *Algebra liniowa*. Wyd. 2. Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk, 2019.

**Materiały do przedmiotu:**

**MATEMATYKA**

**Ćwiczenia nr 11**

Autor:

dr inż. Anna Futa

mgr inż. Michał Błaszczukowski

mgr inż. Magdalena Piłat-Rożek



Fundusze Europejskie  
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita  
Polska

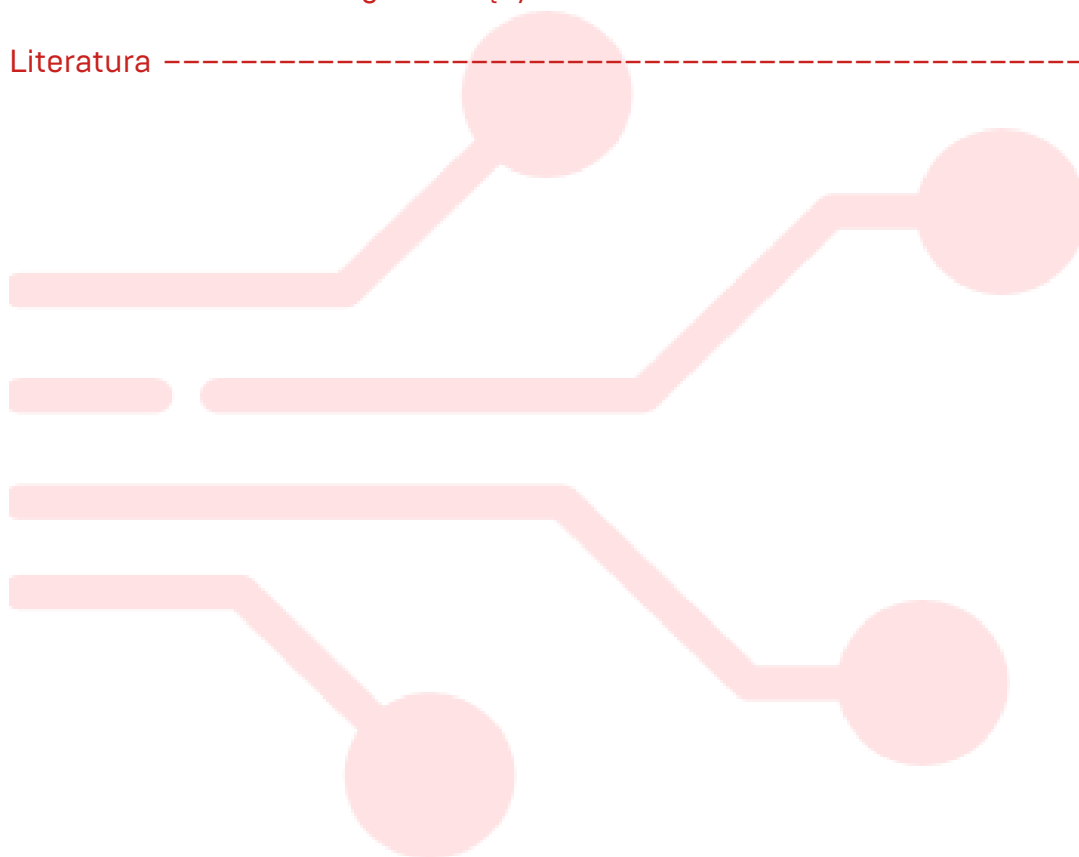
Dofinansowane przez  
Unię Europejską





## Spis treści

|                                        |    |
|----------------------------------------|----|
| Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń         | 3  |
| Przykłady zadań z rozwiązaniami        | 6  |
| Zadania do samodzielnego rozwiązywania | 19 |
| Literatura                             | 22 |



## Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń

Tematem ćwiczeń jest opanowanie kluczowych pojęć algebry macierzy: wyznacznika, macierzy odwrotnej oraz rzędu macierzy. Zrozumienie tych elementów jest niezbędne do kompleksowej analizy własności macierzy oraz rozwiązywania układów równań liniowych.

Wyznacznik to liczba przyporządkowana wyłącznie macierzom kwadratowym wymiaru  $n \times n$ . Jest fundamentalnym kryterium do określenia odwracalności macierzy (macierz  $A$  jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy  $\det(A) \neq 0$ ). Poniżej przedstawiono najczęściej stosowane sposoby jego obliczania:

### (a) Macierz $2 \times 2$ — metoda bezpośrednia

Najprostszy przypadek, w którym wyznacznik oblicza się jako różnicę iloczynów elementów przekątnych.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = ad - bc$$

### (b) Macierz $3 \times 3$ — reguła Sarrusa

Metoda graficzna polegająca na sumowaniu iloczynów elementów przekątnych głównych i pobocznych. Wzór można łatwo zastosować, dopisując po prawej stronie macierzy jej dwie pierwsze kolumny (lub analogicznie dwa pierwsze wiersze), co ułatwia identyfikację odpowiednich przekątnych.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

### (c) Rozwinięcie Laplace'a

Metoda oparta na rozwinięciu wyznacznika względem wybranego wiersza lub kolumny, z wykorzystaniem dopełnień algebraicznych. Metoda ta jest szczególnie przydatna dla macierzy większych rozmiarów lub zawierających wiele zer, ponie-

waż umożliwia stopniowe sprowadzanie obliczeń do mniejszych wyznaczników.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j})$$

#### (d) **Metoda eliminacji Gaussa**

Polega na sprowadzeniu macierzy do postaci trójkątnej za pomocą operacji elementarnych, a następnie obliczeniu wyznacznika jako iloczynu elementów przekątnej głównej:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n u_{ii}$$

**Podczas stosowania operacji elementarnych należy uwzględnić następujące własności wyznacznika:**

- Zamiana dwóch wierszy lub kolumn **zmienia znak** wyznacznika.
- Pomnożenie wiersza lub kolumny przez skalar  $\lambda$  **mnoży** wyznacznik przez  $\lambda$ .
- Dodanie wielokrotności jednego wiersza lub kolumny do innego **nie zmienia** wartości wyznacznika.

#### (e) **Własności pomocnicze**

Zależności ułatwiające obliczenia i analizę wyznaczników:

$$\det(A^T) = \det(A), \quad \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A), \quad \det(AB) = \det(A) \det(B)$$

$\det(A) = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy wiersze (lub kolumny) macierzy są liniowo zależne.

**Macierz odwrotna** to taka macierz, która pomnożona przez macierz pierwotną daje macierz jednostkową. Istnieje wyłącznie dla macierzy kwadratowej  $A$ , której wyznacznik jest różny od zera:

$$\det(A) \neq 0$$

Macierz taka nazywana jest **odwracalną** lub **nieosobliwą**. Spełnia warunek:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

gdzie  $I$  oznacza macierz jednostkową o wymiarze zgodnym z  $A$ .

### Własności macierzy odwrotnej:

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

### Metody wyznaczania macierzy odwrotnej:

#### (a) Metoda dopełnień algebraicznych

Macierz odwrotną można zapisać jako:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (A^*)^T$$

gdzie  $(A^*)^T$  to transponowana macierz dopełnień algebraicznych (tzw. macierz dołączona). Metoda ta jest stosowana głównie dla macierzy o niewielkich wymiarach  $[2 \times 2, 3 \times 3]$ .

#### (b) Metoda eliminacji Gaussa–Jordana

Polega na utworzeniu macierzy rozszerzonej:

$$[A \mid I]$$

i wykonywaniu operacji elementarnych na wierszach do momentu, gdy lewa część przyjmie postać macierzy jednostkowej. Wówczas prawa część stanowi macierz odwrotną:

$$[I \mid A^{-1}]$$

Metoda ta jest szeroko stosowana w obliczeniach numerycznych oraz w programach komputerowych.

**Rzęd macierzy** to liczba określająca maksymalną liczbę liniowo niezależnych wierszy lub kolumn danej macierzy. Stanowi jedną z najważniejszych cech macierzy, pozwalającą ocenić jej strukturę oraz możliwość rozwiązywania układów równań liniowych. Własności rzędu macierzy:

$$\text{rank}(A) \leq \min(\text{liczba wierszy}, \text{liczba kolumn})$$

$$\det(A) \neq 0 \iff \text{rank}(A) = n \quad (\text{dla macierzy kwadratowych pełnego rzędu})$$

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$$

**Metoda wyznaczania rzędu:** Najczęściej stosowaną metodą jest **eliminacja Gaussa**, polegająca na sprowadzeniu macierzy do postaci schodkowej za pomocą operacji elementarnych na wierszach. Rząd macierzy jest równy liczbie niezerowych wierszy w tej postaci:

$$\text{rank}(A) = \text{liczba niezerowych wierszy w postaci schodkowej}$$

**Interpretacja:** Rząd macierzy informuje o liczbie niezależnych równań w układzie liniowym. Dla macierzy pełnego rzędu  $\{\text{rank}(A) = n\}$  układ równań liniowych ma jednoznaczne rozwiązanie, natomiast jeśli  $\text{rank}(A) < n$ , to układ jest sprzeczny lub posiada nieskończenie wiele rozwiązań.

## Przykłady zadań z rozwiązaniami

**Zadanie 1.** Oblicz wyznacznik macierzy, wykorzystując podstawowe wzory oraz regułę Sarrusa.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

(d)

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

**Rozwiązania:**

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = 2 \cdot 1 - 5 \cdot (-3) = 2 - (-15) = 17$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \det(B) = 0 \cdot 3 - 4 \cdot (-2) = 0 - (-8) = 8$$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\det(C) = (1 \cdot (-1) \cdot 0) + (2 \cdot 4 \cdot 2) + (3 \cdot 0 \cdot 1) - (3 \cdot (-1) \cdot 2) - (2 \cdot 0 \cdot 0) - (1 \cdot 4 \cdot 1)$$

$$\det(C) = 0 + 16 + 0 - (-6) - 0 - 4 = 16 + 6 - 4 = 18$$

(d)

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 & 4 & 1 \end{array}$$

$$\det(D) = (2 \cdot 3 \cdot (-2)) + (0 \cdot 2 \cdot 4) + (1 \cdot (-1) \cdot 1) - (1 \cdot 3 \cdot 4) - (0 \cdot (-1) \cdot (-2)) - (2 \cdot 2 \cdot 1)$$

$$\det(D) = -12 + 0 - 1 - 12 - 0 - 4 = -29$$

**Zadanie 2.** Oblicz wyznacznik macierzy, stosując metodę rozwinięcia Laplace'a.

(a)

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(c)

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$F = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(d)

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Rozwiązania:**

(a) Rozwinięcie wzdłuż pierwszego wiersza:

$$\det(E) = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 - 4 \cdot 1 = -7, \quad \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = -8$$

$$\Rightarrow \det(E) = 1 \cdot (-7) - 2 \cdot (-8) + 0 = -7 + 16 = 9.$$

(b) Rozwinięcie wzdłuż drugiego wiersza:

$$\det(F) = 1 \cdot C_{21} + 0 \cdot C_{22} + 2 \cdot C_{23}, \quad C_{2j} = (-1)^{2+j} M_{2j}$$

Minory i kofaktory:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) - 3 \cdot 1 = -1, \quad C_{21} = (-1)^3 \cdot (-1) = 1$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 4 = 6, \quad C_{23} = (-1)^5 \cdot 6 = -6$$

$$\Rightarrow \det(F) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-6) = 1 - 12 = -11.$$

(c) Wygodnie rozwinąć wzdłuż kolumny drugiej (wiele zer):

$$\det(G) = 0 \cdot C_{12} + 3 \cdot C_{22} + 1 \cdot C_{32} + 0 \cdot C_{42} = 3 M_{22} - M_{32}.$$

Minory:

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Liczmy:

$$M_{22} = 1 \cdot (0 \cdot 2 - 1 \cdot 4) - 2 \cdot (2 \cdot 2 - 1 \cdot 0) + 0 \cdot (2 \cdot 4 - 0 \cdot 0) = -4 - 8 = -12,$$

$$M_{32} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 - 0 \cdot 4 = -2.$$

Wniosek:

$$\det(G) = 3 \cdot (-12) - (-2) = -36 + 2 = -34.$$

(d) Wygodnie rozwinąć wzdłuż kolumny czwartej (dwa zera):

$$\det(H) = 0 \cdot C_{14} + 0 \cdot C_{24} + 1 \cdot C_{34} + 1 \cdot C_{44} = -M_{34} + M_{44}.$$

Minory:

$$M_{34} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad M_{44} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Liczymy:

$$M_{34} = 0 \cdot (0 \cdot 0 - 3 \cdot 0) - 2 \cdot (1 \cdot 0 - 3 \cdot 2) + 1 \cdot (1 \cdot 0 - 0 \cdot 2) = -2 \cdot (-6) = 12,$$

$$M_{44} = 0 \cdot (0 \cdot 2 - 3 \cdot 4) - 2 \cdot (1 \cdot 2 - 3 \cdot 0) + 1 \cdot (1 \cdot 4 - 0 \cdot 0) = 0 - 2 \cdot 2 + 4 = 0.$$

$$\det(H) = -M_{34} + M_{44} = -12 + 0 = -12.$$

**Zadanie 3.** Oblicz wyznacznik macierzy, stosując metodę eliminacji Gaussa.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(d)

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Rozwiązania:**

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Eliminacja względem pierwszego elementu głównego:

$$W_3 \leftarrow W_3 - \frac{1}{2}W_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$



Macierz sprowadzono do postaci trójkątnej górnej, bez zamian wierszy:

$$\det(A) = 2 \cdot 3 \cdot \frac{9}{2} = 27.$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Eliminacje w kolumnie pierwszej:

$$W_2 \leftarrow W_2 - 3W_1, \quad W_3 \leftarrow W_3 - 2W_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Eliminacja w kolumnie drugiej:

$$W_3 \leftarrow W_3 - \frac{4}{7}W_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{19}{7} \end{bmatrix}$$

Brak zamian wierszy:

$$\det(B) = 1 \cdot 7 \cdot \frac{19}{7} = 19.$$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Eliminacje w kolumnie pierwszej:

$$W_3 \leftarrow W_3 - 3W_1, \quad W_4 \leftarrow W_4 - 2W_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 2 & -8 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Eliminacje w kolumnie drugiej:

$$W_3 \leftarrow W_3 + 6W_2, \quad W_4 \leftarrow W_4 + 3W_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Eliminacja w kolumnie trzeciej:

$$W_4 \leftarrow W_4 - \frac{3}{4}W_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Brak zamian wierszy:

$$\det(C) = 1 \cdot 1 \cdot (-4) \cdot 1 = -4.$$

(d)

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zamiana wierszy w celu uzyskania niezerowego elementu głównego:

$$W_1 \leftrightarrow W_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{[zmiana znaku wyznacznika]}$$

Eliminacje w kolumnie pierwszej:

$$W_3 \leftarrow W_3 - 4W_1, \quad W_4 \leftarrow W_4 - 2W_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -8 & -13 \\ 0 & 2 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

Eliminacje w kolumnie drugiej:

$$W_3 \leftarrow W_3 - \frac{1}{3}W_2, \quad W_4 \leftarrow W_4 - \frac{2}{3}W_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{25}{3} & -\frac{41}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{11}{3} & -\frac{22}{3} \end{bmatrix}$$

Eliminacja w kolumnie trzeciej:

$$W_4 \leftarrow W_4 - \frac{11}{25}W_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{25}{3} & -\frac{41}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{33}{25} \end{bmatrix}$$

Jedna zamiana wierszy na początku:

$$\det(D) = (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{25}{3}\right) \cdot \left(-\frac{33}{25}\right) = (-1) \cdot 33 = -33.$$

**Zadanie 4.** Wyznacz macierz odwrotną, jeżeli istnieje.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(d)

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Rozwiązania:**

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 8 - 3 = 5 \neq 0$$

Macierz odwrotna:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = 5 \cdot 1 - (-2) \cdot 3 = 5 + 6 = 11 \neq 0$$

Macierz odwrotna:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Krok 1. Wyznacznik (wzdłuż pierwszego wiersza):

$$\det(C) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1(12 - 2) + 0 + 2(-2) = 10 - 4 = 6.$$

Krok 2. Dopełnienia algebraiczne  $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ij})$ :

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad C_{12} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -(-4) = 4, \quad C_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$C_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(-4) = 4, \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad C_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad C_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

Krok 3. Macierz dopełnień  $[C_{ij}]$  i jej transpozycja:

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} 10 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad [C_{ij}]^T = \begin{bmatrix} 10 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Krok 4. Macierz odwrotna:

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} [C_{ij}]^T = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 10 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(d)

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Krok 1. Wyznacznik (wzdłuż pierwszego wiersza):

$$\det(D) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 2(3) - ((-1) - 8) + 0 = 6 - (-9) = 15.$$

Krok 2. Dopełnienia algebraiczne  $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ij})$ :

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad C_{12} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(-9) = 9, \quad C_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12,$$

$$C_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad C_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -(-4) = 4,$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad C_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

Krok 3. Macierz dopełnień  $[C_{ij}]$  i jej transpozycja:

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & 9 & -12 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 7 \end{bmatrix}, \quad [C_{ij}]^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 9 & 2 & -4 \\ -12 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Krok 4. Macierz odwrotna:

$$D^{-1} = \frac{1}{\det(D)} [C_{ij}]^T = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 9 & 2 & -4 \\ -12 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

**Zadanie 5.** Sprawdź, czy istnieją wartości parametru  $p$ , dla których poniższa macierz jest odwracalna. Jeśli tak, wyznacz ten zbiór wartości  $p$ .

$$A = \begin{bmatrix} p & 1 & 2 \\ 0 & p-1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Rozwiązania:**

(a) Liczymy wyznacznik i sprawdzamy, dla jakich wartości parametru  $p$  jest on niezerowy.

$$A = \begin{bmatrix} p & 1 & 2 \\ 0 & p-1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwinięcie wzdłuż pierwszego wiersza:

$$\det(A) = p \cdot \begin{vmatrix} p-1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & p-1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Obliczamy minory  $2 \times 2$ :

$$\begin{vmatrix} p-1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (p-1) \cdot 1 - 3 \cdot 0 = p-1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -6,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & p-1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - (p-1) \cdot 2 = -2(p-1).$$

Podstawiamy:

$$\det(A) = p(p-1) - 1 \cdot (-6) + 2 \cdot (-2(p-1)) = p^2 - p + 6 - 4(p-1) = p^2 - 5p + 10.$$

Dyskryminanta trójmianu  $p^2 - 5p + 10$  wynosi

$$\Delta = 25 - 40 = -15 < 0.$$

Zatem dla  $p \in \mathbb{R}$  wyznacznik jest zawsze dodatni, w szczególności  $\det(A) \neq 0$ .

**Wniosek:** macierz jest odwracalna dla wszystkich  $p \in \mathbb{R}$ .

**Zadanie 6.** Oblicz rząd macierzy.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(d)

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Rozwiązania:**

Wyznaczamy rząd każdej macierzy metodą eliminacji Gaussa, licząc liczbę niezerowych wierszy po sprowadzeniu do postaci schodkowej.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Eliminacja:  $W_2 \leftarrow W_2 - 2W_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Zatem  $\text{rz}(A) = 1$ .

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Eliminacje:  $W_3 \leftarrow W_3 - 2W_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}, W_3 \leftarrow W_3 + 3W_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}.$

Zatem  $\text{rz}(B) = 3.$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Eliminacje:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{W_3 \leftarrow W_3 - 2W_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{W_3 \leftarrow W_3 - W_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{W_4 \leftarrow W_4 + \frac{4}{3}W_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

Zatem  $\text{rz}(C) = 4.$

(d)

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Eliminacje:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{W_4 \leftarrow W_4 - W_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} W_4 \leftarrow W_4 + 2W_2 \\ W_5 \leftarrow W_5 - 2W_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} W_4 \leftarrow W_4 - 6W_3 \\ W_5 \leftarrow W_5 + 5W_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_5 \leftarrow W_5 + \frac{1}{2}W_4 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Usuujemy zerowy wiersz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Zatem  $\text{rz}(D) = 4$ .

## Zadania do samodzielnego rozwiązywania

**Zadanie 7.** Oblicz wyznacznik macierzy, wykorzystując podstawowe wzory oraz regułę Sarrusa.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

(d)

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

(e)

$$E = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(f)

$$F = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

**Zadanie 8.** Oblicz wyznacznik macierzy, stosując metodę rozwinięcia Laplace'a.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

(d)

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(e)

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

**Zadanie 9.** Oblicz wyznacznik macierzy, stosując metodę eliminacji Gaussa.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

(d)

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (e)$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Zadanie 10.** Wyznacz macierz odwrotną, jeżeli istnieje.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(d)

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(e)

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

(f)

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(g)

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(h)

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

**Zadanie 11.** Sprawdź, czy istnieją wartości parametru  $p$ , dla których poniższa macierz jest odwracalna. Jeśli tak, wyznacz zbiór tych wartości  $p$ .

(a)

$$A = \begin{bmatrix} p & 1 & 2 \\ 0 & p-1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} p & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & p-1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} p & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & p-2 \end{bmatrix}$$

(d)

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & p & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & p-3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

**Zadanie 12.** Oblicz rząd macierzy.

(a)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(d)

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(e)

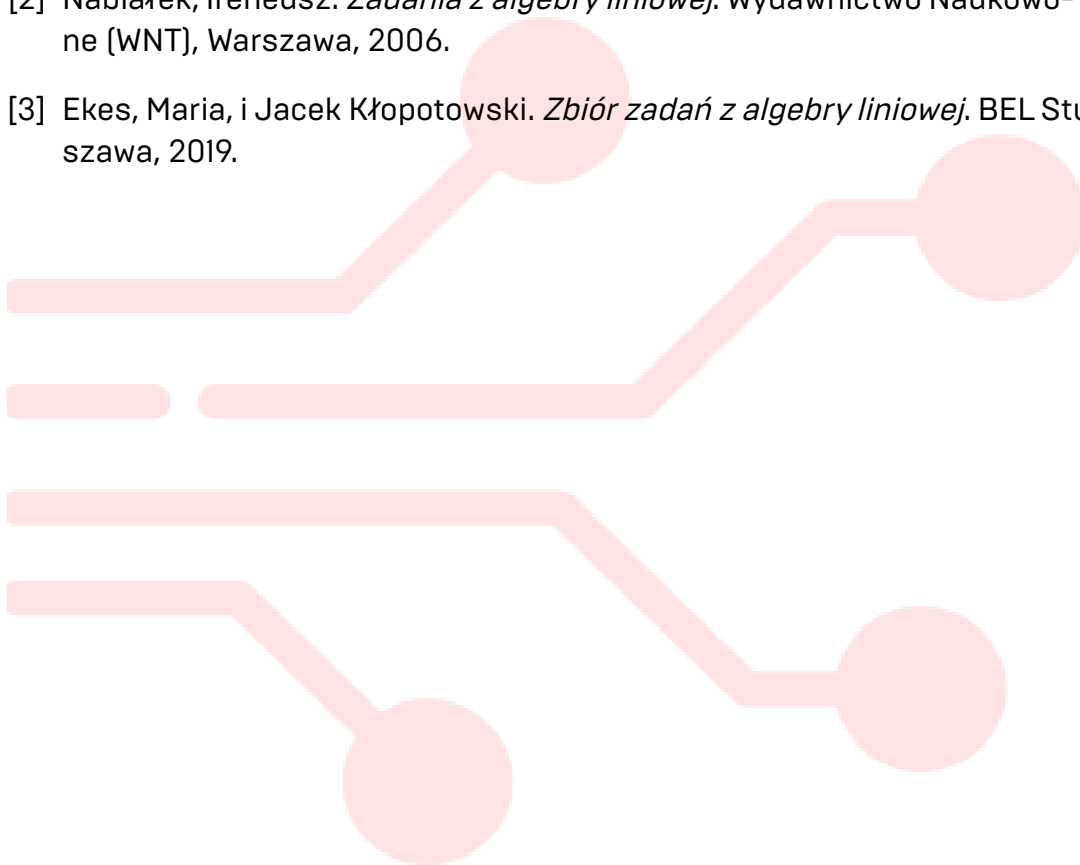
$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Literatura

- [1] Jurlewicz, Teresa, i Zbigniew Skoczylas. *Algebra liniowa. Przykłady i zadania*. Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław, 2022.
- [2] Napiórek, Ireneusz. *Zadania z algebry liniowej*. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne (WNT), Warszawa, 2006.
- [3] Ekes, Maria, i Jacek Kłopotowski. *Zbiór zadań z algebry liniowej*. BEL Studio, Warszawa, 2019.



**Materiały do przedmiotu:**

**MATEMATYKA**

**Ćwiczenia nr 12**

Autor:

dr inż. Anna Futa

mgr inż. Michał Błaszczukowski

mgr inż. Magdalena Piłat-Rożek



Fundusze Europejskie  
dla Rozwoju Społecznego



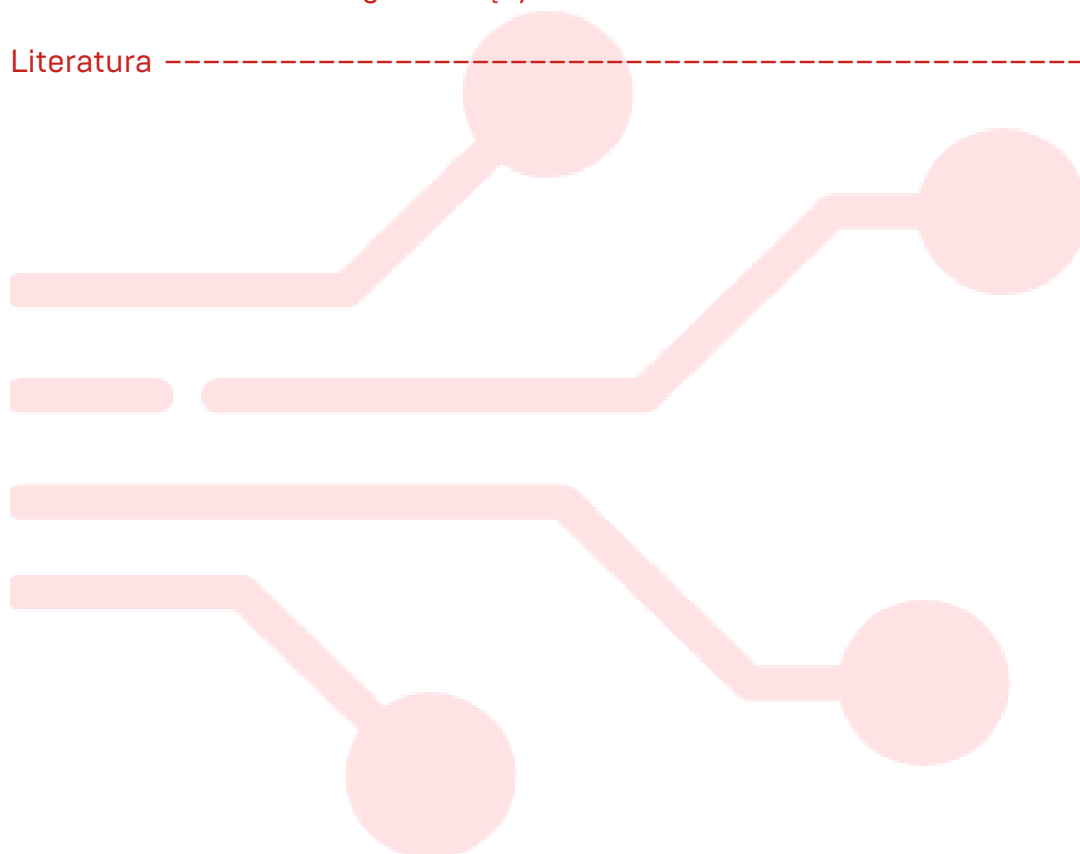
Rzeczpospolita  
Polska

Dofinansowane przez  
Unię Europejską



## Spis treści

|                                        |    |
|----------------------------------------|----|
| Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń         | 3  |
| Przykłady zadań z rozwiązaniami        | 5  |
| Zadania do samodzielnego rozwiązywania | 15 |
| Literatura                             | 17 |



## Wprowadzenie, tematyka ćwiczeń

Celem ćwiczeń jest opanowanie metod rozwiązywania układów równań liniowych, które stanowią fundament algebry liniowej i analizy numerycznej.

Układ równań liniowych można zapisać w postaci macierzowej:

$$A \cdot x = b$$

gdzie  $A$  jest macierzą współczynników,  $x$  – wektorem niewiadomych, a  $b$  – wektorem wyrazów wolnych. Rozwiązanie układu polega na znalezieniu takiego wektora  $x$ , który spełnia powyższe równanie. W zależności od własności macierzy  $A$ , układ może mieć jedno rozwiązanie, nieskończenie wiele rozwiązań lub nie mieć go wcale. Poniżej przedstawiono podstawowe metody i twierdzenia wykorzystywane do rozwiązywania układów równań liniowych.

**Metoda Cramera** umożliwia rozwiązanie układu  $n$  równań z  $n$  niewiadomymi, pod warunkiem, że wyznacznik macierzy współczynników jest różny od zera:

$$\det(A) \neq 0$$

Układ równań liniowych można zapisać w postaci:

$$A \cdot x = b$$

gdzie  $A$  jest macierzą współczynników,  $x$  – wektorem niewiadomych, a  $b$  – wektorem wyrazów wolnych. Wówczas rozwiązanie układu wyraża się wzorami Cramera:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

gdzie  $A_i$  oznacza macierz powstałą przez zastąpienie  $i$ -tej kolumny macierzy  $A$  wektorem wyrazów wolnych  $b$ . Metoda Cramera jest prosta i przejrzysta, ponieważ bezpośrednio wykorzystuje własności wyznaczników. Stosuje się ją jednak głównie dla układów o niewielkich wymiarach ( $2 \times 2$  lub  $3 \times 3$ ), gdyż dla większych macierzy obliczenia stają się czasochłonne i nieefektywne.



**Metoda eliminacji Gaussa** polega na przekształceniu macierzy rozszerzonej układu równań:

$$[A | b]$$

za pomocą operacji elementarnych na wierszach w taki sposób, aby sprowadzić ją do postaci trójkątnej górnej (tzw. postaci schodkowej). Następnie, rozpoczynając od ostatniego równania, oblicza się kolejne niewiadome, stosując podstawianie wsteczne. Operacje elementarne wykonywane na wierszach obejmują:

- zamianę dwóch wierszy miejscami,
- pomnożenie wiersza przez niezerowy skalar,
- dodanie wielokrotności jednego wiersza do innego.

Metoda eliminacji Gaussa jest uniwersalna i może być stosowana do układów o dowolnym rozmiarze. W praktyce jest podstawą większości algorytmów numerycznych wykorzystywanych w programach komputerowych do rozwiązywania układów równań liniowych. Jej rozszerzeniem jest **metoda Gaussa–Jordana**, w której przekształcenia prowadzą do uzyskania macierzy jednostkowej po lewej stronie, co pozwala bezpośrednio odczytać rozwiązanie po stronie prawej.

**Twierdzenie Kroneckera–Capellego** określa warunek istnienia rozwiązań układu równań liniowych:

$$A \cdot x = b$$

Związek między rzędem macierzy współczynników  $A$  a rzędem macierzy rozszerzonej  $[A | b]$  decyduje o liczbie rozwiązań układu:

$$\begin{cases} \text{rank}(A) = \text{rank}([A | b]) = n & \Rightarrow \text{układ ma jedno rozwiązanie (oznaczony)} \\ \text{rank}(A) = \text{rank}([A | b]) < n & \Rightarrow \text{układ ma nieskończenie wiele rozwiązań (nieoznaczony)} \\ \text{rank}(A) \neq \text{rank}([A | b]) & \Rightarrow \text{układ sprzeczny, brak rozwiązań} \end{cases}$$

Twierdzenie to ma zasadnicze znaczenie teoretyczne, ponieważ pozwala określić, czy układ jest rozwiązywalny, zanim przystąpi się do właściwych obliczeń, i stanowi podstawę analizy zgodności układów równań liniowych.

## Przykłady zadań z rozwiązaniami

**Zadanie 1.** Korzystając ze wzorów Cramera rozwiązać układ równań.

(a)

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} x + 2y + z + w = 5 \\ 2x - y + 3z + w = 11 \\ -x + 4y + 2z + 5w = 22 \\ 3x + y - z + 2w = 20 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 4x + 3y - 2z = 5 \\ -2x + y + 3z = -7 \\ x + 5y + z = 4 \end{cases}$$

**Rozwiązania:**

(a)

$$W = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det(W) = (2 \cdot (-1) \cdot 2) + (1 \cdot 1 \cdot 3) + ((-1) \cdot 1 \cdot (-1)) - ((-1) \cdot (-1) \cdot 3) - (1 \cdot 1 \cdot 2) - (2 \cdot 1 \cdot (-1))$$

$$\det(W) = -4 + 3 + 1 - 3 - 2 - (-2) = 0 - 3 = -3$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det(W_x) = (2 \cdot (-1) \cdot 2) + (1 \cdot 1 \cdot 5) + ((-1) \cdot 1 \cdot (-1)) - ((-1) \cdot (-1) \cdot 5) - (1 \cdot 1 \cdot 2) - (2 \cdot 1 \cdot (-1))$$

$$\det(W_x) = -4 + 5 + 1 - 5 - 2 - (-2) = 2 - 5 = -3$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\det(W_y) = (2 \cdot 1 \cdot 2) + (2 \cdot 1 \cdot 3) + ((-1) \cdot 1 \cdot 5) - ((-1) \cdot 1 \cdot 3) - (2 \cdot 1 \cdot 2) - (2 \cdot 1 \cdot 5)$$

$$\det(W_y) = 4 + 6 - 5 - (-3) - 4 - 10 = 5 - 11 = -6$$

$$W_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det(W_z) = (2 \cdot (-1) \cdot 5) + (1 \cdot 1 \cdot 3) + (2 \cdot 1 \cdot (-1)) - (2 \cdot (-1) \cdot 3) - (1 \cdot 1 \cdot 5) - (2 \cdot 1 \cdot (-1))$$

$$\det(W_z) = -10 + 3 - 2 - (-6) - 5 - (-2) = -9 - (-3) = -6$$

Ze wzorów Cramera:

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{-3}{-3} = 1, \quad y = \frac{W_y}{W} = \frac{-6}{-3} = 2, \quad z = \frac{W_z}{W} = \frac{-6}{-3} = 2.$$

Ostatecznie:

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 2.$$

(b)

$$W = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\det(W) = (4 \cdot 1 \cdot 1) + (3 \cdot 3 \cdot 1) + ((-2) \cdot (-2) \cdot 5) - ((-2) \cdot 1 \cdot 1) - (4 \cdot 3 \cdot 5) - (3 \cdot (-2) \cdot 1)$$

$$\det(W) = 4 + 9 + 20 - (-2) - 60 - (-6) = 33 - 52 = -19$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -7 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -7 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\det(W_x) = (5 \cdot 1 \cdot 1) + (3 \cdot 3 \cdot 4) + ((-2) \cdot (-7) \cdot 5) - ((-2) \cdot 1 \cdot 4) - (5 \cdot 3 \cdot 5) - (3 \cdot (-7) \cdot 1)$$

$$\det(W_x) = 5 + 36 + 70 - (-8) - 75 - (-21) = 111 - 46 = 65$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -7 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -7 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\det(W_y) = (4 \cdot (-7) \cdot 1) + (5 \cdot 3 \cdot 1) + ((-2) \cdot (-2) \cdot 4) - ((-2) \cdot (-7) \cdot 1) - (4 \cdot 3 \cdot 4) - (5 \cdot (-2) \cdot 1)$$

$$\det(W_y) = -28 + 15 + 16 - 14 - 48 - (-10) = 3 - 52 = -49$$

$$W_z = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & -7 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & -7 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\det(W_z) = (4 \cdot 1 \cdot 4) + (3 \cdot (-7) \cdot 1) + (5 \cdot (-2) \cdot 5) - (5 \cdot 1 \cdot 1) - (4 \cdot (-7) \cdot 5) - (3 \cdot (-2) \cdot 4)$$

$$\det(W_z) = 16 - 21 - 50 - 5 - (-140) - (-24) = -55 - (-159) = 104$$

Ze wzorów Cramera:

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{65}{-19} = -\frac{65}{19}, \quad y = \frac{W_y}{W} = \frac{-49}{-19} = \frac{49}{19}, \quad z = \frac{W_z}{W} = \frac{104}{-19} = -\frac{104}{19}.$$

Ostatecznie:

$$x = -\frac{65}{19}, \quad y = \frac{49}{19}, \quad z = -\frac{104}{19}.$$

(c)

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot M_{11} - 2 \cdot M_{12} + 1 \cdot M_{13} - 1 \cdot M_{14},$$

gdzie  $M_{1j}$  to wyznaczniki  $3 \times 3$  (liczone regułą Sarrusa):

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det(M_{11}) = ((-1) \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot (-1)) - (1 \cdot 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \cdot 2)$$

$$\det(M_{11}) = (-4 + 15 - 4) - (2 + 5 + 24) = -24$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det(M_{12}) = (2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1)) - (1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) \cdot 2)$$

$$\det(M_{12}) = (8 + 45 + 1) - (6 + 30 - 6) = 64$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(M_{13}) = (2 \cdot 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 1) - (1 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \cdot 2)$$

$$\det(M_{13}) = (16 - 15 - 1) - (12 + 10 + 2) = -24$$

$$M_{14} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(M_{14}) = (2 \cdot 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) \cdot 1) - (3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \cdot (-1))$$

$$\det(M_{14}) = (-8 - 6 - 3) - (36 + 4 - 1) = -56$$

Zatem:

$$\det(W) = 1 \cdot (-24) - 2 \cdot 64 + 1 \cdot (-24) - 1 \cdot (-56) = -120$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 11 & -1 & 3 & 1 \\ 22 & 4 & 2 & 5 \\ 20 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot M_{11}^{(x)} - 2 \cdot M_{12}^{(x)} + 1 \cdot M_{13}^{(x)} - 1 \cdot M_{14}^{(x)}.$$

Wyznaczniki minorów [liczone Sarrusem, analogicznie jak wyżej]:

$$\det(M_{11}^{(x)}) = -56, \quad \det(M_{12}^{(x)}) = -302, \quad \det(M_{13}^{(x)}) = 327, \quad \det(M_{14}^{(x)}) = -113.$$

Zatem:

$$\det(W_x) = 5 \cdot (-56) - 2 \cdot (-302) + 1 \cdot 327 - 1 \cdot (-113) = -280 + 604 + 327 + 113 = -309.$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 11 & 3 & 1 \\ -1 & 22 & 2 & 5 \\ 3 & 20 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot M_{11}^{(y)} - 5 \cdot M_{12}^{(y)} + 1 \cdot M_{13}^{(y)} - 1 \cdot M_{14}^{(y)}.$$

$$\det(M_{11}^{(y)}) = -302, \quad \det(M_{12}^{(y)}) = -56, \quad \det(M_{13}^{(y)}) = -327, \quad \det(M_{14}^{(y)}) = 113.$$

$$\det(W_y) = 1 \cdot (-302) - 5 \cdot (-56) + 1 \cdot (-327) - 1 \cdot 113 = -302 + 280 - 327 - 113 = 201.$$

$$W_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 11 & 1 \\ -1 & 4 & 22 & 5 \\ 3 & 1 & 20 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot M_{11}^{(z)} - 2 \cdot M_{12}^{(z)} + 5 \cdot M_{13}^{(z)} - 1 \cdot M_{14}^{(z)}.$$

$$\det(M_{11}^{(z)}) = 302, \quad \det(M_{12}^{(z)}) = -327, \quad \det(M_{13}^{(z)}) = -56, \quad \det(M_{14}^{(z)}) = -113.$$

$$\det(W_z) = 1 \cdot 302 - 2 \cdot (-327) + 5 \cdot (-56) - 1 \cdot (-113) = 302 + 654 - 280 + 113 = 96.$$

$$W_w = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 11 \\ -1 & 4 & 2 & 22 \\ 3 & 1 & -1 & 20 \end{vmatrix} = 1 \cdot M_{11}^{(w)} - 2 \cdot M_{12}^{(w)} + 1 \cdot M_{13}^{(w)} - 5 \cdot M_{14}^{(w)}.$$

$$\det(M_{11}^{(w)}) = -302, \quad \det(M_{12}^{(w)}) = 327, \quad \det(M_{13}^{(w)}) = -113, \quad \det(M_{14}^{(w)}) = -56.$$

$$\det(W_w) = 1 \cdot (-302) - 2 \cdot 327 + 1 \cdot (-113) - 5 \cdot (-56) = -302 - 654 - 113 + 280 = -789.$$

Ze wzorów Cramera:

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{-309}{-120} = \frac{103}{40}, \quad y = \frac{W_y}{W} = \frac{201}{-120} = -\frac{67}{40},$$

$$z = \frac{W_z}{W} = \frac{96}{-120} = -\frac{4}{5}, \quad w = \frac{W_w}{W} = \frac{-789}{-120} = \frac{263}{40}.$$

Ostatecznie:

$$x = \frac{103}{40}, \quad y = -\frac{67}{40}, \quad z = -\frac{4}{5}, \quad w = \frac{263}{40}.$$

**Zadanie 2.** Korzystając z metody eliminacji Gaussa rozwiązać układ równań.

(a)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ -x + 3y + 2z = 4 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} 2x + 3y - 3z = 4 \\ 3x - y + z = 17 \\ x + y - 2z = 1 \\ 3x + 2y - 2z = 11 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x - y + z + 2t = 2 \\ 2x - 3y + 2z + t = 1 \\ x - 2y + z - t = -1 \end{cases}$$

**Rozwiązania:**

(a)

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \end{array} \right] \quad \begin{matrix} W_2 - 2W_1 \\ W_3 + W_1 \end{matrix} = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 7 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

$$W_3 + W_2 = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{array} \right] \quad W_2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right), \quad W_3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

$$\begin{matrix} W_2 + W_3 \\ W_1 + W_3 \end{matrix} = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{5} + 2 = \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \quad W_1 - 2W_2 = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 - 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Stąd:

$$x = \frac{9}{5}, \quad y = \frac{3}{5}, \quad z = 2.$$

(b)

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow[W_2 - 2W_1]{W_3 - W_1} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{W_2 \cdot (-1)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{W_3 + W_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{W_1 + W_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right]$$

Stąd układ równań po odczytaniu z macierzy zredukowanej:

$$\begin{cases} y + 3t = 3 \\ x + z + 5t = 5 \end{cases}$$

Ostatecznie układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od dwóch parametrów. Wybierając parametry  $z, t \in \mathbb{R}$ , otrzymujemy:

$$x = 5 - z - 5t, \quad y = 3 - 3t, \quad z = z, \quad t = t.$$

(c)

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 17 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 11 \end{array} \right] \xrightarrow{W_1 \leftrightarrow W_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 17 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 & 11 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[W_4 - 3W_1]{W_2 - 3W_1, W_3 - 2W_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{W_2 \leftrightarrow W_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 7 & 14 \\ 0 & -1 & 4 & 8 \end{array} \right]$$



$$\begin{array}{l} W_3 + 4W_2 \\ W_4 + W_2 \\ W_1 - W_2 \\ = \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 11 & | & 22 \\ 0 & 0 & 5 & | & 10 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} W_3 \cdot \frac{1}{11} \\ W_4 - 5W_3 \\ = \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} W_1 + 3W_3 \\ W_2 - W_3 \\ = \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Stąd:

$$x = 5, \quad y = 0, \quad z = 2.$$

**Zadanie 3.** Za pomocą twierdzenia Kroneckera–Capellego określić liczbę rozwiązań układu równań.

(a)

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 4x + 2y - 2z = 5 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y - z = 4 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x + y + z + t = 3 \\ 2x - y + 3z - t = 1 \\ -x + 2y + 3z + 2t = 4 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ 3x + 4y + 2z = 7 \end{cases}$$

**Rozwiązania:**

(a) Wyznaczamy rząd macierzy  $A$  oraz rząd macierzy rozszerzonej  $[A|B]$ :

$$rz[A|B] = rz \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 3 \\ 4 & 2 & -2 & | & 5 \\ 1 & -1 & 2 & | & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} W_2 - 2W_1 \\ W_3 - \frac{1}{2}W_1 \\ = \end{array} \quad rz \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & | & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Widzimy, że wiersz  $W_2$  w macierzy rozszerzonej jest postaci  $[0 \ 0 \ 0 \ | \ -1]$ , więc:

$$rz[A|B] = 3 \quad \text{oraz} \quad rz(A) = 2.$$

Ponieważ  $rz[A|B] \neq rz(A)$ , z twierdzenia Kroneckera–Capellego wnioskujemy, że układ jest sprzeczny i nie ma rozwiązań.

(b) Wyznaczamy rząd macierzy  $A$  oraz rząd macierzy rozszerzonej  $[A|B]$ :

$$\begin{aligned}
 rz[A|B] &= rz \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & | & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 & | & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[W_3 + W_1]{W_2 - 2W_1} rz \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & | & -5 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & | & 7 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{W_3 + W_2} rz \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & | & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & | & 2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ponieważ w zredukowanej postaci mamy trzy niezerowe wiersze, to

$$rz[A|B] = 3.$$

Te same operacje wierszowe zastosowane do macierzy  $A$  (bez kolumny wolnych wyrazów) dają

$$rz(A) = rz \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} = 3.$$

Mamy więc  $rz[A|B] = rz(A) = r = 3$  oraz liczbę niewiadomych  $n = 4$ . Zatem  $r < n$ , więc układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od  $n - r = 1$  parametru.

(c) Wyznaczamy rząd macierzy  $A$  oraz rząd macierzy rozszerzonej  $[A|B]$ :

$$\begin{aligned}
 [A|B] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 2 & -1 & 1 & | & 3 \\ 3 & 1 & -1 & | & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[W_3 - 3W_1]{W_2 - 2W_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & -3 & -1 & | & -9 \\ 0 & -2 & -4 & | & -14 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$W_3 \leftarrow \underset{=}{3W_3 - 2W_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & -3 & -1 & | & -9 \\ 0 & 0 & -10 & | & -24 \end{bmatrix}$$

Widzimy trzy niezerowe wiersze, więc

$$rz[A|B] = 3.$$

Te same operacje wykonane na macierzy  $A$  (bez kolumny wolnych wyrazów) dają postać schodkową o trzech niezerowych wierszach, zatem

$$rz(A) = 3.$$

Mamy więc  $rz[A|B] = rz(A) = r = 3$  oraz liczbę niewiadomych  $n = 3$ . Ponieważ  $r = n$ , układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Dla pełności odczytujemy je metodą Gaussa z powyższych przekształceń:

$$\begin{aligned} -10z &= -24 \Rightarrow z = \frac{12}{5}, \\ -3y - z &= -9 \Rightarrow y = \frac{11}{5}, \\ x + y + z &= 6 \Rightarrow x = \frac{7}{5}. \end{aligned}$$

Ostatecznie:

$$x = \frac{7}{5}, \quad y = \frac{11}{5}, \quad z = \frac{12}{5}.$$

(d) Wyznaczamy rząd macierzy  $A$  oraz rząd macierzy rozszerzonej  $[A|B]$ :

$$rz[A|B] = rz \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 1 & | & 5 \\ 3 & 4 & 2 & | & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} W_2 - 2W_1 \\ W_3 - 3W_1 \\ = \end{matrix} rz \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{=}{W_3 - W_2} rz \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem  $rz[A|B] = 2$ . Te same operacje na macierzy  $A$  (bez kolumny wyrazów wolnych) dają

$$rz(A) = 2.$$

Mamy  $rz[A|B] = rz(A) = r = 2$  oraz liczbę niewiadomych  $n = 3$ , zatem dostajemy  $r < n$ . Wniosek: układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od  $n - r = 1$  parametru.

## Zadania do samodzielnego rozwiązywania

**Zadanie 4.** Korzystając ze wzorów Cramera rozwiązać układ równań.

(a)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = 7 \\ 3x + y + 2z = 10 \end{cases}$$

(e)

$$\begin{cases} 2x + 3y + z + w = 12 \\ 3x - 2y + 4z - w = 8 \\ x + y - z + 2w = 5 \\ 4x + y + 3z + w = 15 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 5 \\ 4x + y + z = 9 \\ x - 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

(f)

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 7 \\ 4x - 3y + 2z = 8 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y - z = 5 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases}$$

(g)

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 1 \\ 2x + y + 3z + 2t = 10 \\ 3x - y + 2z + t = 7 \\ x + y - z + 3t = 5 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases} x + 2y - z + t = 3 \\ 2x - y + 2z - t = 4 \\ 3x + y + z + 2t = 9 \\ x - y + 3z - 2t = 2 \end{cases}$$

(h)

$$\begin{cases} 2x + y + z = 8 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

**Zadanie 5.** Korzystając z metody eliminacji Gaussa rozwiązać układ równań.

(a)

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 7 \\ x - 2y + 3z = 4 \\ 3x + y + 2z = 10 \end{cases}$$

(e)

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 8 \\ 4x + y - 2z = 1 \\ x + 3y + 2z = 9 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x + 4y + z = 5 \\ 2x - y - 3z = -4 \\ -x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

(f)

$$\begin{cases} 2x + y - z + t = 4 \\ -x + 3y + 2z - 2t = 7 \\ 3x - y + z + t = 5 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} x + 2y - z + w = 3 \\ 2x - y + 2z - w = 1 \\ -x + 3y + z + 2w = 6 \\ 3x + y - 2z + w = 4 \end{cases}$$

(g)

$$\begin{cases} 2x + y + z + w = 12 \\ 3x - 2y + 4z - w = 3 \\ -x + 4y - z + 2w = 6 \\ x + y + 3z + w = 10 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases} x + y + z + t = 6 \\ 2x - y + 3z - t = 5 \\ -x + 2y - z + 2t = 1 \end{cases}$$

(h)

$$\begin{cases} x + y - 2z = -1 \\ 2x + 3y + z = 9 \\ -3x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

**Zadanie 6.** Za pomocą twierdzenia Kroneckera–Capellego określić liczbę rozwiązań układu równań.

(a)

$$\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x + 3y + 2z = 7 \\ 3x - y + z = 5 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

(g)

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases} x + y + z + t = 3 \\ 2x + 3y + z + t = 7 \\ -x + y + 2z + t = 2 \end{cases}$$

(h)

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y + z = 4 \\ x - 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

(e)

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x + 2y + 2z + 2t = 3 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

(i)

$$\begin{cases} 3x - 2y + z + 4t = 7 \\ -2x + 5y - 3z + 2t = -1 \\ 4x + y + 2z - t = 10 \\ x - 3y + 5z + 6t = 8 \end{cases}$$

(f)

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - y + 2z = 4 \\ 3x + y + z = 5 \end{cases}$$

(j)

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + t = 4 \\ -x + 4y + 2z - 3t = 1 \\ 5x - 2y + 3z + t = 9 \\ 3x + y - 4z + 2t = -2 \end{cases}$$

## Literatura

- [1] Regel, Wiesława. *100 układów równań liniowych z pełnymi rozwiązaniami krok po kroku*. Wydawnictwo Biła, Warszawa, 2016.
- [2] Plebaniak, Joanna. *Układy równań liniowych w ekonometrii a macierze brzegowe*. Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Warszawa, 2011.
- [3] Rutkowski, Jerzy. *Algebra liniowa w zadaniach*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2012.