

Ciągi liczbowe i ich granice

dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

Plan wykładu

Ciąg liczbowy

Definicja ciągu liczbowego

Ciąg arytmetyczny

Ciąg geometryczny

Granica ciągu liczbowego

Definicja i własności

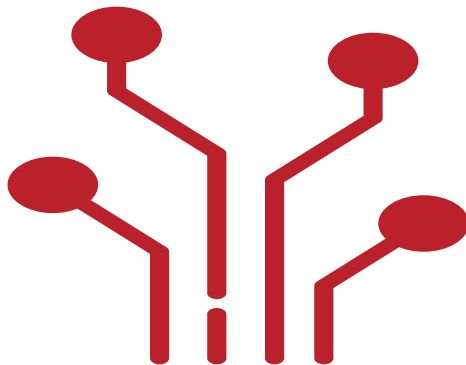
Symbole nieoznaczone

Twierdzenie o trzech ciągach

Liczba e

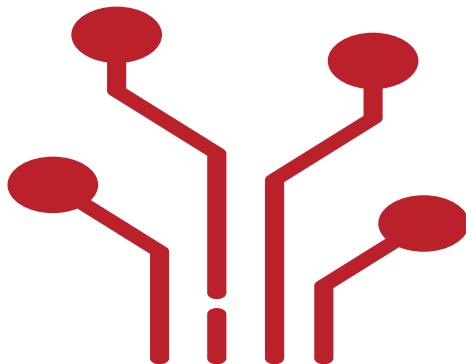


Ciąg liczbowy



3 / 29

Definicja ciągu liczbowego



4 / 29

Definicja

Nieskończonym ciągiem liczbowym nazywamy dowolną funkcję $f : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ określoną na zbiorze liczb naturalnych o wartościach rzeczywistych.

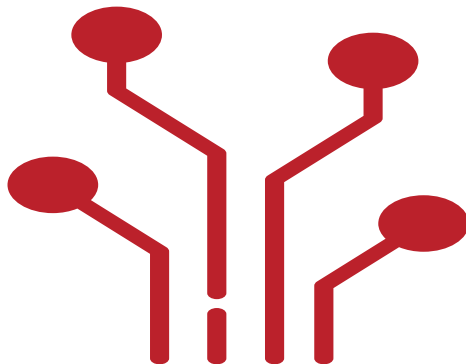
Zwyczajowo, zamiast $f(n)$ piszemy a_n .

a_n oznacza n -ty wyraz ciągu

(a_n) oznacza ciąg liczbowy

5 / 29

Ciąg arytmetyczny



6 / 29

Ciąg arytmetyczny – definicja

Definicja

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **arytmetycznym**, jeżeli istnieje taka liczba r , że dla każdego n spełniony jest warunek

$$a_{n+1} - a_n = r.$$

Liczbę r nazywamy **różnicą** ciągu arytmetycznego.

7 / 29

Ciąg arytmetyczny – najważniejsze wzory

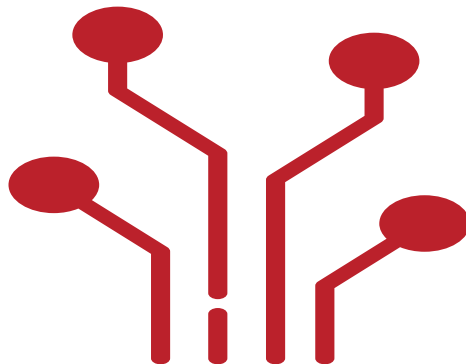
Wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Ciąg geometryczny



9 / 29

Ciąg geometryczny – definicja

Definicja

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **geometrycznym**, jeżeli istnieje taka liczba q , że dla każdego n spełniony jest warunek

$$a_{n+1} = q \cdot a_n.$$

Liczbę q nazywamy **ilorazem** ciągu geometrycznego.

10 / 29

Ciąg geometryczny – najważniejsze wzory

Wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego:

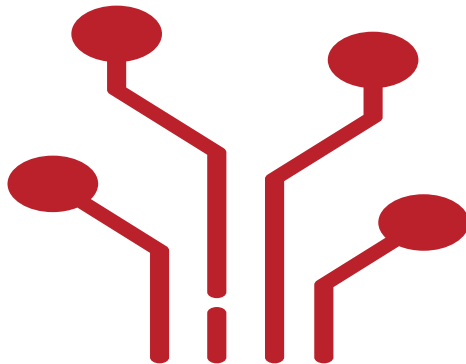
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, & \text{gdy } q \neq 1 \\ na_1, & \text{gdy } q = 1 \end{cases}$$

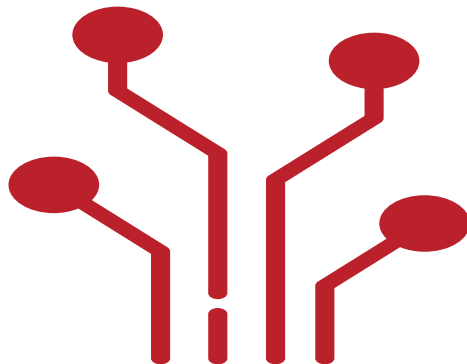
11 / 29

Granica ciągu liczbowego



12 / 29

Definicja i własności



13 / 29

Zbieżność ciągu liczbowego do granicy skończonej

Definicja

Mówimy, że ciąg liczbowy (a_n) jest **zbieżny** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista g taka, że

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall n > \delta |a_n - g| < \varepsilon.$$

Liczbę g nazywamy **granica** ciągu (a_n) .

Fakt ten wyrażamy symbolicznie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$.

Ważna granica

Twierdzenie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Jednoznaczność granicy ciągu

Twierdzenie

Jeżeli ciąg jest zbieżny, to posiada dokładnie jedną granicę.

Twierdzenie

Każdy podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy.

Działania arytmetyczne na granicach ciągów zbieżnych

Twierdzenie

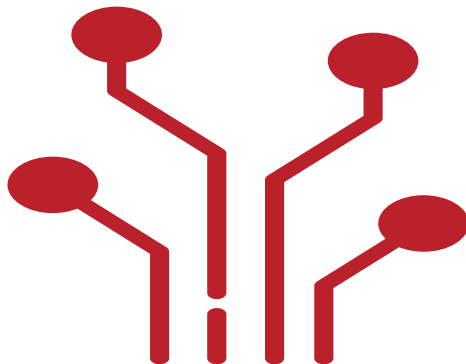
Niech dane będą dwa ciągi zbieżne do granic skończonych: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Wówczas

► $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$;

► $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$;

► jeżeli ponadto $b_n \neq 0$ oraz $b \neq 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Symbole nieoznaczone



18 / 29

▶ $\frac{\infty}{\infty}$

▶ $\frac{0}{0}$

▶ $\infty - \infty$

▶ $0 \cdot \infty$

▶ 1^∞

▶ 0^0

▶ ∞^0

Zbieżność ciągu liczbowego do nieskończoności

Definicja

Mówimy, że ciąg liczbowy (a_n) jest *zbieżny do $+\infty$* wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 \forall n > \delta \quad a_n > M.$$

Fakt ten wyrażamy symbolicznie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

Zbieżność ciągu liczbowego do nieskończoności

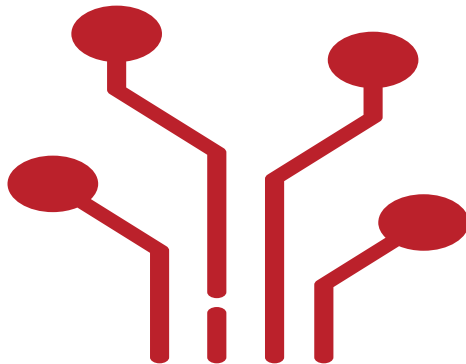
Definicja

Mówimy, że ciąg liczbowy (a_n) jest *zbieżny do $-\infty$* wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 \forall n > \delta \quad a_n < -M.$$

Fakt ten wyrażamy symbolicznie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Twierdzenie o trzech ciągach



22 / 29

Twierdzenie

Niech (a_n) , (b_n) , (c_n) będą ciągami liczbowymi takimi, że

► $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g,$

► $a_n \leq b_n \leq c_n$, dla $n \geq k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}_+$.

Wtedy ciąg liczbowy (b_n) jest zbieżny oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$.

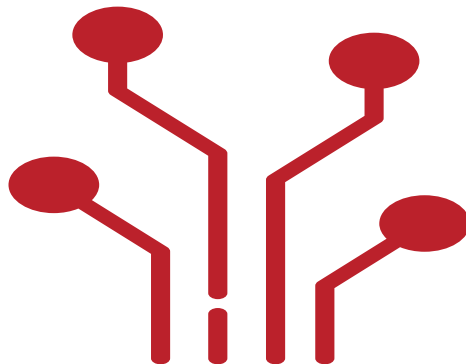
Wniosek

Iloczyn ciągu zbieżnego do 0 i ciągu ograniczonego jest ciągiem zbieżnym do 0.

Twierdzenie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Liczba e



25 / 29

Twierdzenie

Ciąg liczbowy o wyrazie ogólnym $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ jest zbieżny.

Definicja

*Granice ciągu liczbowego o wyrazie ogólnym $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ nazywamy **stałą Eulera** i oznaczamy symbolem e .*

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

26 / 29

Twierdzenia o ciągach zbieżnych do e

Twierdzenie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

Twierdzenia o ciągach zbieżnych do e

Twierdzenie

Niech (a_n) i (b_n) będą ciągami takimi, że

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ oraz istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n$.

Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{b_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)}.$$

Dziękuję za uwagę

Granica funkcji Ciągłość funkcji Asymptoty wykresu funkcji

dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

Plan wykładu

Granica funkcji

Punkt skupienia zbioru

Definicja granicy funkcji w punkcie (wg Heinego)

Działania arytmetyczne na granicach funkcji

Twierdzenie o trzech granicach

Ciągłość funkcji

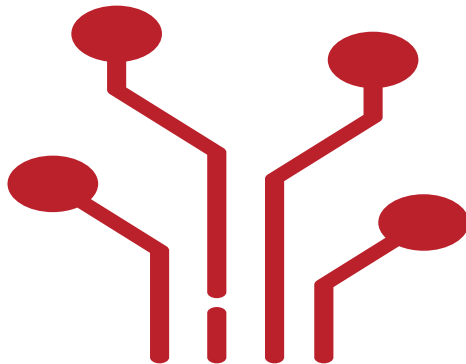
Funkcja ciągła w punkcie i na zbiorze

Własności funkcji ciągłych

Asymptoty wykresu funkcji

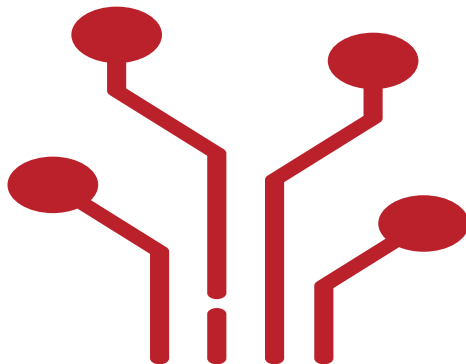


Granica funkcji



3 / 35

Punkt skupienia zbioru



4 / 35

Definicja

Otoczeniem punktu x_0 o promieniu $r > 0$ nazywamy przedział otwarty $(x_0 - r, x_0 + r)$.

Definicja

Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym zbiorem.

*Mówimy, że punkt x_0 jest **punktem skupienia** zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym otoczeniu o środku w punkcie x_0 istnieją elementy zbioru A różne od x_0 .*

5/35

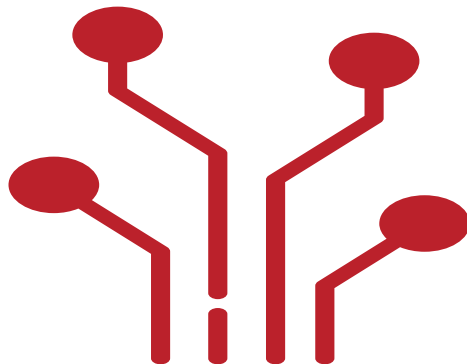
Uwaga

Punkt x_0 może, lecz nie musi należeć do zbioru A .

Przykład

Punktami skupienia zbioru $A = (-\infty, -5) \cup [-1, 2) \cup \{3\}$ są wszystkie punkty należące do zbioru $(-\infty, -5] \cup [-1, 2]$.

Definicja granicy funkcji w punkcie (wg Heinego)



7 / 35

Definicja

Niech $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ i niech x_0 będzie punktem skupienia zbioru D_f .
Mówimy, że liczba g jest **granicą** funkcji f w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu punktów (x_n) takiego, że $x_n \in D_f$, $x_n \neq x_0$, $x_n \rightarrow x_0$, ciąg liczbowy $(f(x_n))$ jest zbieżny do liczby g .

Piszemy wówczas:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g.$$

Analogicznie definiujemy granice niewłaściwe funkcji,

$$\text{tzn. } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ oraz } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty,$$

granice jednostronne funkcji,

$$\text{tzn. } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = g \text{ oraz } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = g,$$

oraz granice funkcji w nieskończoności,

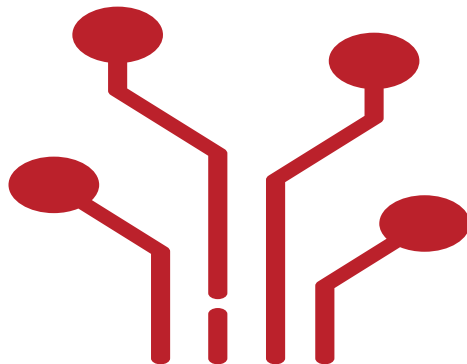
$$\text{tzn. } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g \text{ oraz } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g.$$

Twierdzenie

Granica funkcji f w punkcie x_0 istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice jednostronne funkcji f w tym punkcie i są sobie równe.

10 / 35

Działania arytmetyczne na granicach funkcji



11 / 35

Twierdzenie

Niech $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g_1$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g_2$.

Wówczas

► $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = g_1 \pm g_2,$

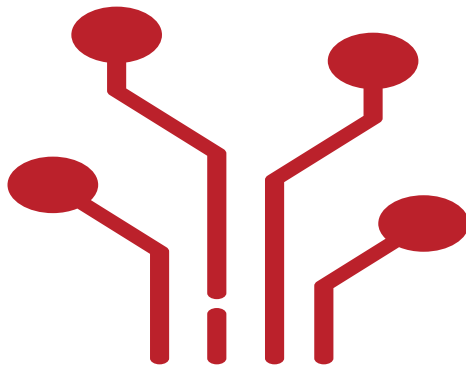
► $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = g_1g_2,$

► jeżeli ponadto $g(x) \neq 0$ w pewnym otoczeniu punktu x_0 oraz $g_2 \neq 0$, to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g_1}{g_2}.$$

12 / 35

Twierdzenie o trzech granicach



13 / 35

Twierdzenie

Niech f_1 , f_2 oraz f_3 będą funkcjami takimi, że

- ▶ $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_3(x) = g$,
- ▶ $f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x)$ w pewnym otoczeniu punktu x_0 .

Wtedy $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = g$.

Ważne granice

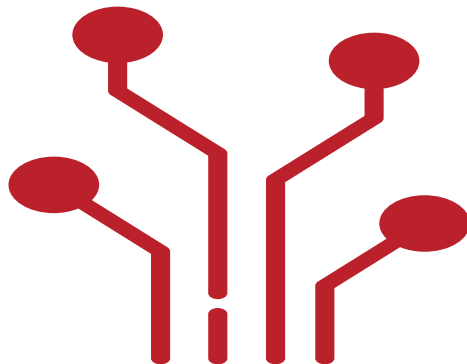
$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

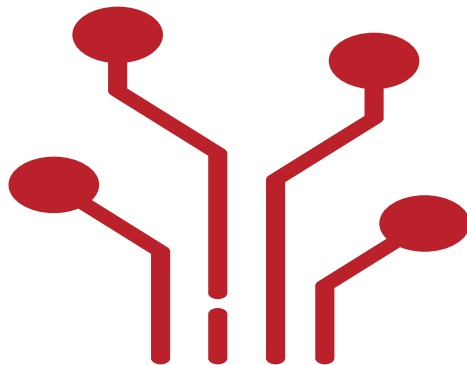
$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Ciągłość funkcji



16 / 35

Funkcja ciągła w punkcie i na zbiorze



17 / 35

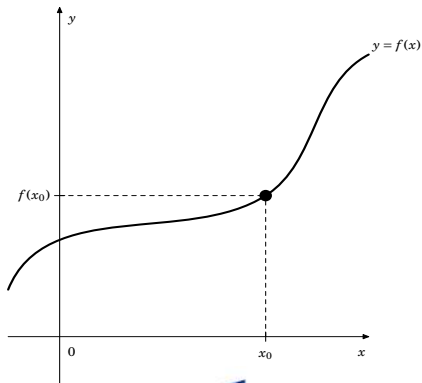
Funkcja ciągła w punkcie

Definicja

Jeżeli punkt x_0 jest punktem skupienia zbioru D_f , to funkcja f jest *ciągła w punkcie x_0* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona granica funkcji w punkcie x_0 i granica ta jest równa wartości funkcji w tym punkcie, tzn. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

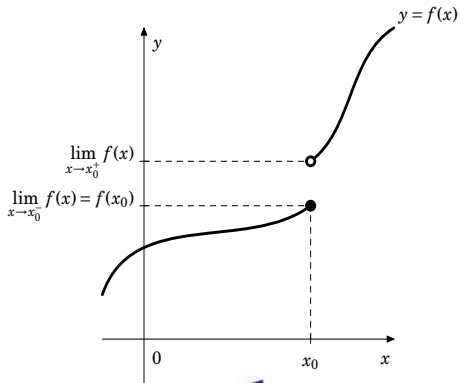
Analogicznie definiujemy ciągłość jednostronną funkcji w punkcie.

Funkcja ciągła w punkcie x_0



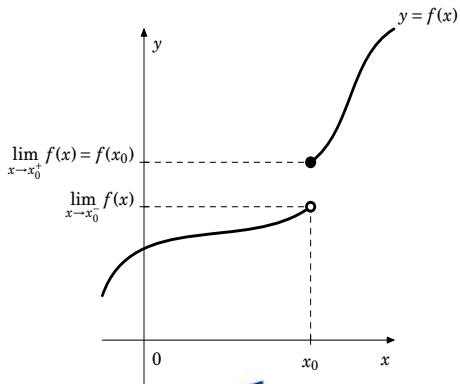
19 / 35

Funkcja lewostronnie ciągła w punkcie x_0



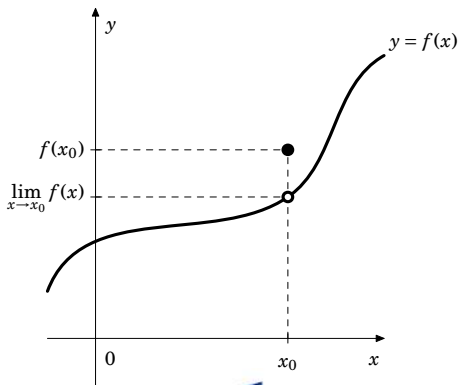
20 / 35

Funkcja prawostronnie ciągła w punkcie x_0



21 / 35

Funkcja nieciągła w punkcie x_0



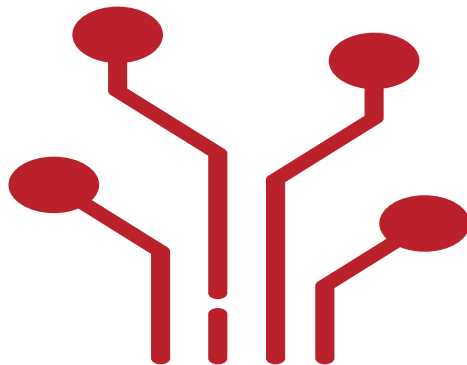
22 / 35

Funkcja ciągła na zbiorze

Definicja

Mówimy, że funkcja jest *ciągła na zbiorze* A , jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Własności funkcji ciągłych



24 / 35

Twierdzenie

Funkcje wielomianowe, wymierne, potęgowe, trygonometryczne, logarytmiczne i wykładnicze są ciągłe w swoich dziedzinach.

25 / 35

Twierdzenie

Niech dane będą dwie funkcje $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłe w punkcie x_0 .

Wówczas funkcje $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ oraz $\frac{f}{g}$ (jeżeli $g(x_0) \neq 0$) są ciągłe w punkcie x_0 .

Twierdzenie

Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

Definicja

Mówimy, że funkcja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ma w zbiorze A *własność Darboux*, jeżeli wraz z dwiema swoimi wartościami przyjmuje w zbiorze A każdą wartość leżącą między nimi.

27 / 35

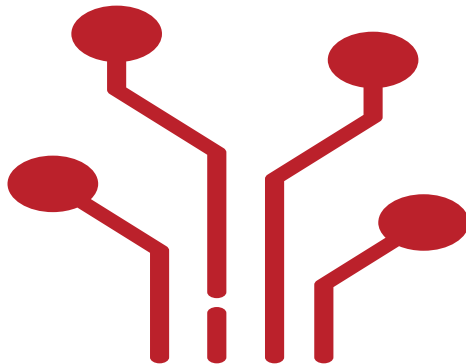
Twierdzenie

Funkcja ciągła na przedziale $[x_1, x_2]$ ma w nim własność Darboux.

Wniosek

Jeżeli f jest funkcją ciągłą na przedziale $[x_1, x_2]$ oraz $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, to funkcja f ma w przedziale (x_1, x_2) miejsce zerowe.

Asymptoty wykresu funkcji



29 / 35

Asymptoty pionowe wykresu funkcji

Definicja

Prostą o równaniu $x = c$ nazywamy *asymptotą pionową lewostronną (prawostronną)* wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty \right)$$

Jeżeli prosta jest asymptotą pionową lewo- i prawostronną, to nazywamy ją asymptotą pionową obustronną.

30 / 35

Asymptoty poziome wykresu funkcji

Definicja

Prostą o równaniu $y = b$ nazywamy *asymptotą poziomą lewostronną (prawostronną) wykresu funkcji f* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$
$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \right)$$

Jeżeli prosta jest asymptotą poziomą lewo- i prawostronną, to nazywamy ją asymptotą poziomą obustronną.

31 / 35

Asymptoty ukośne wykresu funkcji

Definicja

Prostą o równaniu $y = ax + b$ nazywamy *asymptotą ukośną lewostronną* (*prawostronną*) wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$
$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \right)$$

Jeżeli prosta jest asymptotą ukośną lewo- i prawostronną, to nazywamy ją asymptotą ukośną obustronną.

32 / 35

Asymptoty ukośne wykresu funkcji

Twierdzenie

Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną lewostronną wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją skończone granice

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = b.$$

Asymptoty ukośne wykresu funkcji

Twierdzenie

Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną prawostronną wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją skończone granice

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b.$$

Dziękuję za uwagę

Pochodna funkcji Podstawowe wzory na pochodne

dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

Plan wykładu

Definicja pochodnej

Iloraz różnicowy

Pochodna funkcji w punkcie

Pochodna funkcji na przedziale

Podstawowe wzory na pochodne

Pochodne ważniejszych funkcji elementarnych

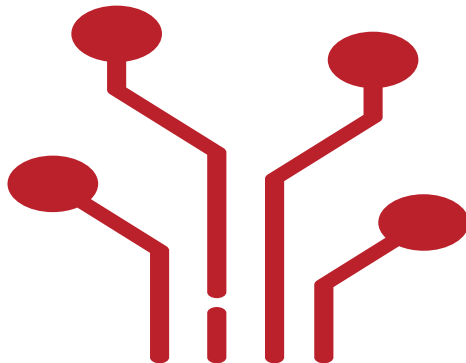
Działania arytmetyczne na pochodnych funkcji

Twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej

Postać logarytmiczno-wykładnicza funkcji

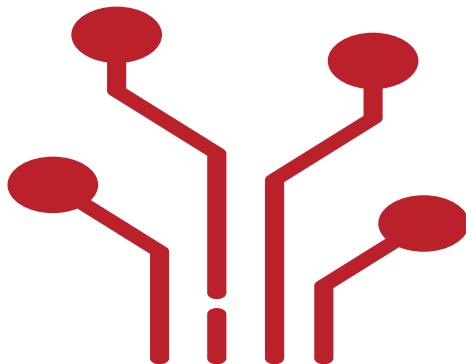


Definicja pochodnej



3 / 27

Iloraz różnicowy



4 / 27

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na przedziale $(x_0 - r, x_0 + r)$, gdzie $r > 0$.

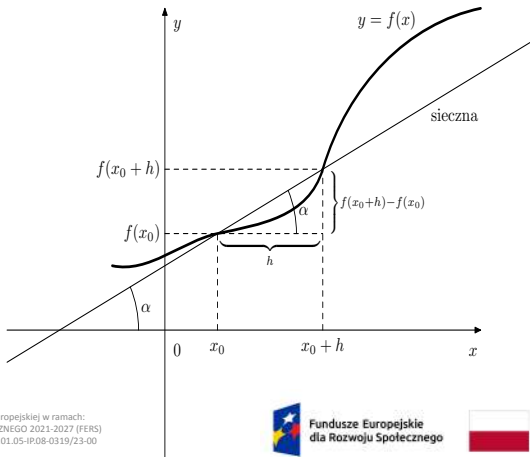
Definicja

Ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0 odpowiadającym przyrostowi h , gdzie $0 < |h| < r$, nazywamy liczbę

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

5 / 27

Interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego

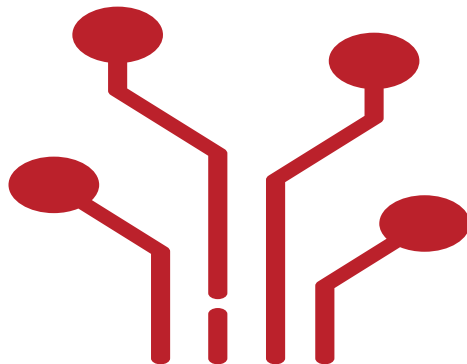


6 / 27

Interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego

Iloraz różnicowy jest równy tangensowi kąta nachylenia siecznej przechodzącej przez punkty $(x_0, f(x_0))$ oraz $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ do dodatniej półosi Ox .

Pochodna funkcji w punkcie



8 / 27

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na przedziale $(x_0 - r, x_0 + r)$, gdzie $r > 0$.

Definicja

Jeśli istnieje skończona granica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

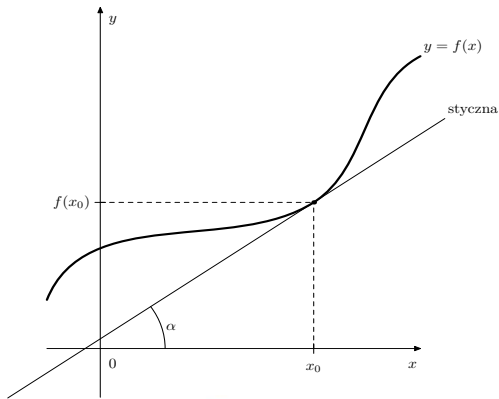
to nazywamy ją **pochodną funkcji f w punkcie x_0** i oznaczamy symbolem $f'(x_0)$.

9 / 27

Mówimy wtedy, że funkcja f jest **różniczkowalna** w punkcie x_0 .

Jeżeli granica ilorazu różnicowego w punkcie x_0 nie istnieje lub jest nieskończona, to mówimy, że funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie x_0 .

Interpretacja geometryczna pochodnej



11 / 27

Interpretacja geometryczna pochodnej

Pochodna funkcji w punkcie x_0 jest równa tangensowi kąta nachylenia stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ do dodatniej półosi Ox .

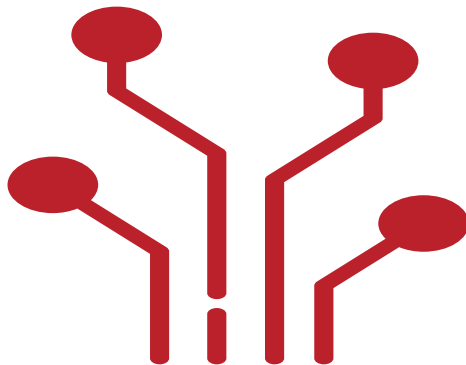
12 / 27

Równanie stycznej do wykresu funkcji

Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Pochodna funkcji na przedziale



14 / 27

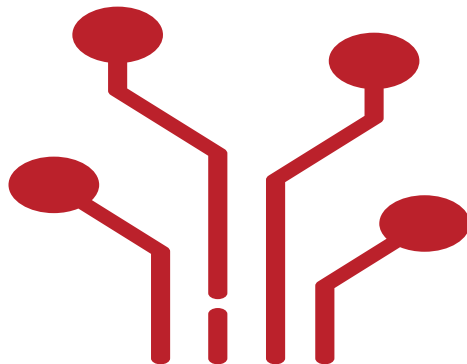
Funkcja ma pochodną na przedziale otwartym P wtedy i tylko wtedy, gdy ma pochodną w każdym punkcie tego przedziału.

Definicja

Funkcję określoną na przedziale P , której wartości w punktach x tego przedziału są równe $f'(x)$ nazywamy *pochodną funkcji f na przedziale P* i oznaczamy symbolem f' .

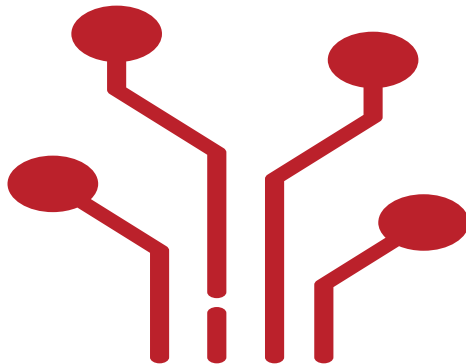
$$f' : x \mapsto f'(x), \quad x \in P$$

Podstawowe wzory na pochodne



16 / 27

Pochodne ważniejszych funkcji elementarnych



17 / 27

- ▶ $(c)' = 0, \quad c \in \mathbb{R}$
- ▶ $(x^p)' = px^{p-1}, \quad p \in \mathbb{R}, \text{ zakres zmienności } x \text{ zależy od } p$
- ▶ $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$
- ▶ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x \in \mathbb{R}_+$
- ▶ $(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$
- ▶ $(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}$

$$\blacktriangleright (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\blacktriangleright (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\blacktriangleright (a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

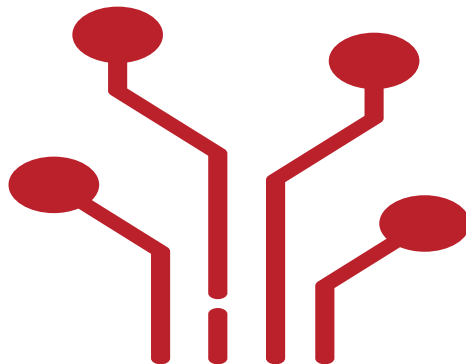
$$\blacktriangleright (e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\blacktriangleright (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0$$

$$\blacktriangleright (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

19 / 27

Działania arytmetyczne na pochodnych funkcji



20 / 27

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie x , to:

- ▶ $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x);$
- ▶ $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x);$
- ▶ $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$
- ▶ $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},$ o ile $g(x) \neq 0.$

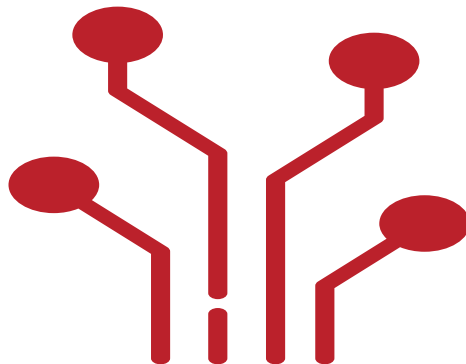
21 / 27

Wniosek

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x , zaś $c \in \mathbb{R}$, to $(cf)'(x) = cf'(x)$.

22 / 27

Twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej



23 / 27

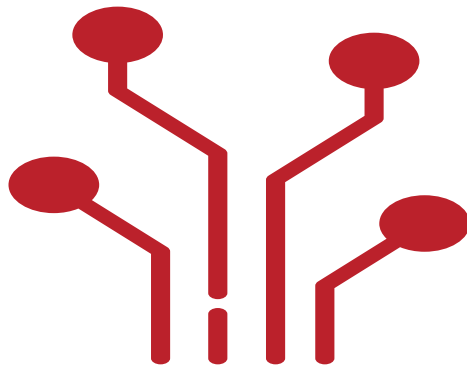
Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x oraz funkcja g jest różniczkowalna w punkcie $f(x)$, to funkcja $g \circ f$ jest różniczkowalna w punkcie x oraz

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x),$$

gdzie $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Postać logarytmiczno- -wykładnicza funkcji



25 / 27

Każdą funkcję złożoną postaci $[f(x)]^{g(x)}$ można przedstawić w postaci logarytmiczno-wykładniczej:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

Postać logarytmiczno-wykładniczą stosujemy do obliczania pochodnych funkcji danych w postaci $[f(x)]^{g(x)}$.

26 / 27

Dziękuję za uwagę

Monotoniczność i ekstrema funkcji

dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

Plan wykładu

Różniczkowalność funkcji

Związek różniczkowalności z ciągłością

Związek różniczkowalności z monotonicznością

Ekstrema lokalne funkcji

Definicja ekstremum lokalnego funkcji

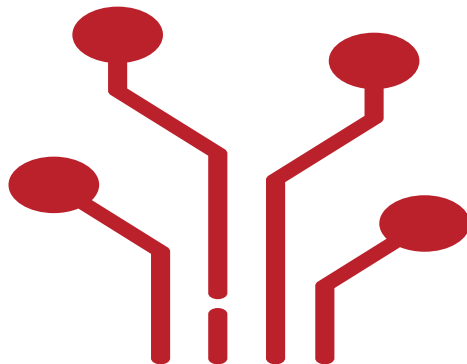
Warunki na istnienie ekstremum

Ekstrema globalne funkcji



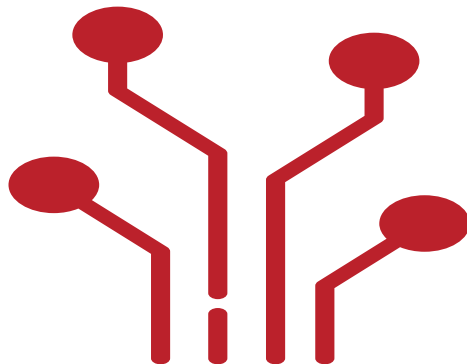
2 / 20

Różniczkowalność funkcji



3 / 20

Związek różniczkowalności z ciągłością



4 / 20

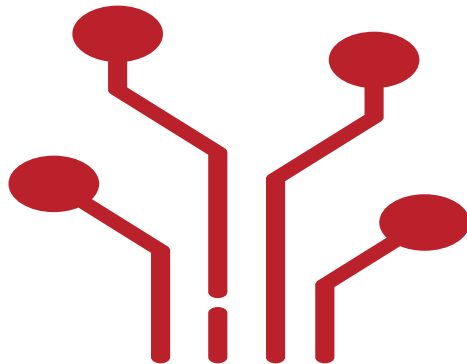
Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to jest w tym punkcie ciągła.

Uwaga

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

Związek różniczkowalności z monotonicznością



6 / 20

Twierdzenie

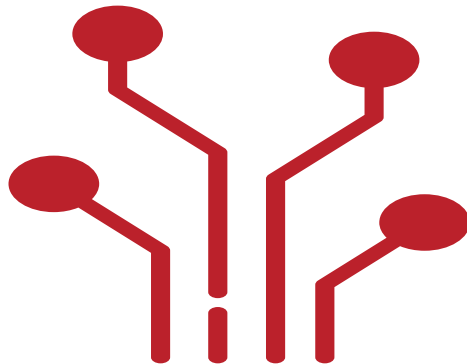
Niech P oznacza dowolny przedział.

Jeżeli dla każdego $x \in P$ funkcja f spełnia warunek:

- 1. $f'(x) = 0$, to funkcja f jest stała na P ;*
- 2. $f'(x) > 0$, to funkcja f jest rosnąca na P ;*
- 3. $f'(x) \geq 0$, to funkcja f jest niemalejąca na P ;*
- 4. $f'(x) < 0$, to funkcja f jest malejąca na P ;*
- 5. $f'(x) \leq 0$, to funkcja f jest nierosnąca na P .*

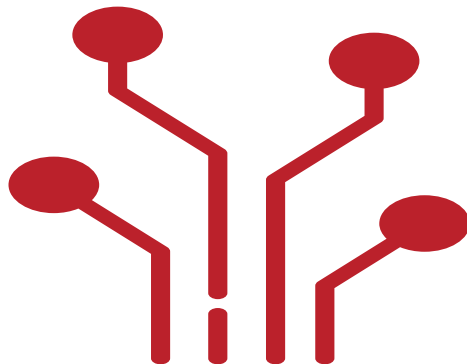
7/20

Ekstrema lokalne funkcji



8 / 20

Definicja ekstremum lokalnego funkcji



9 / 20

Minimum lokalne

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ i f będzie funkcją określoną przynajmniej w otoczeniu punktu x_0 , ciągłą w punkcie x_0 i różniczkowalną przynajmniej w sąsiedztwie $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ punktu x_0 .

Definicja

Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D_f$ **minimum lokalne**, jeżeli istnieje taka $\delta > 0$, że dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ zachodzi warunek $f(x) > f(x_0)$.

Maksimum lokalne

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ i f będzie funkcją określoną przynajmniej w otoczeniu punktu x_0 , ciągłą w punkcie x_0 i różniczkowalną przynajmniej w sąsiedztwie $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ punktu x_0 .

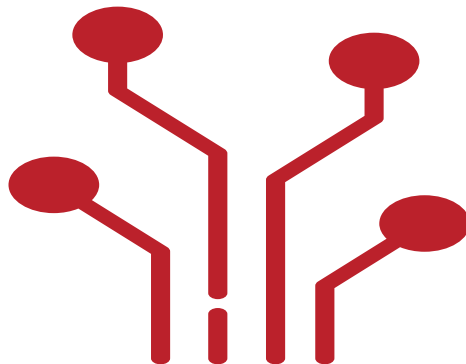
Definicja

Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D_f$ **maksimum lokalne**, jeżeli istnieje taka $\delta > 0$, że dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ zachodzi warunek $f(x) < f(x_0)$.

Minima i maksima lokalne funkcji nazywamy **ekstremami lokalnymi**.

11/20

Warunki na istnienie ekstremum



12 / 20

Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej

Twierdzenie

(Twierdzenie Fermata) Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz posiada ekstremum lokalne w tym punkcie, to $f'(x_0) = 0$.

Uwaga

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

13 / 20

I warunek dostateczny istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej

Twierdzenie

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ i f będzie funkcją określoną przynajmniej w otoczeniu punktu x_0 , ciągłą w punkcie x_0 i różniczkowalną przynajmniej w sąsiedztwie punktu x_0 .

Jeżeli istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$\begin{aligned} &\text{dla } x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ zachodzi } f'(x) > 0 \\ &\text{oraz dla } x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ zachodzi } f'(x) < 0, \end{aligned}$$

to w punkcie x_0 funkcja f ma **maksimum lokalne**.

14 / 20

I warunek dostateczny istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej

Twierdzenie

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ i f będzie funkcją określoną przynajmniej w otoczeniu punktu x_0 , ciągłą w punkcie x_0 i różniczkowalną przynajmniej w sąsiedztwie punktu x_0 .

Jeżeli istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$\begin{aligned} &\text{dla } x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ zachodzi } f'(x) < 0 \\ &\text{oraz dla } x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ zachodzi } f'(x) > 0, \end{aligned}$$

to w punkcie x_0 funkcja f ma **minimum lokalne**.

15 / 20

Pochodne wyższych rzędów

Definicja

Pochodną n -tego rzędu funkcji f w punkcie x_0 definiujemy rekurencyjnie

$$f^{(n)}(x_0) = [f^{(n-1)}]'(x_0) \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Przyjmujemy, że

$$f^{(0)}(x_0) = f(x_0), f^{(1)}(x_0) = f'(x_0), f^{(2)}(x_0) = f''(x_0), f^{(3)}(x_0) = f'''(x_0).$$

16 / 20

II warunek dostateczny istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej

Twierdzenie

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ i f będzie funkcją określoną przynajmniej w otoczeniu punktu x_0 .
Jeżeli

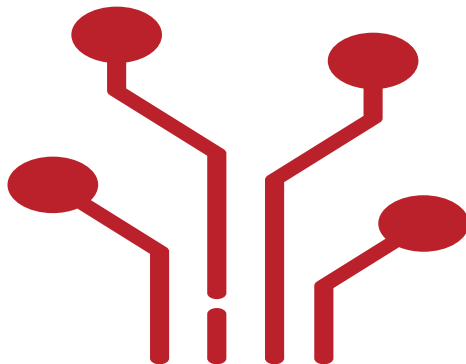
1. $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,
2. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$,

to, gdy $n \geq 2$ jest parzyste, funkcja f osiąga w punkcie x_0 ekstremum lokalne, przy czym jest to minimum, gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$, zaś maksimum gdy $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Gdy n jest nieparzyste, ekstremum nie występuje.

17 / 20

Ekstrema globalne funkcji



18 / 20

Wartość najmniejsza i największa funkcji na przedziale

- ▶ Funkcja ciągła osiąga na przedziale domkniętym wartość najmniejszą i największą.
- ▶ Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna poza skończoną liczbą punktów tego przedziału, to wartość najmniejsza i największa funkcji na tym przedziale może wystąpić:
 - ▶ na końcach a i b przedziału $[a, b]$
lub
 - ▶ w punktach z przedziału (a, b) , w których pochodna funkcji f zeruje się lub w których pochodna nie istnieje.

Wartość najmniejszą funkcji oraz wartość największą funkcji nazywamy *ekstremami globalnymi*.

19 / 20

Dziękuję za uwagę

Wklęsłość i wypukłość funkcji Reguła de l'Hospitala

dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

Plan wykładu

Wklęsłość i wypukłość funkcji

Funkcja wypukła

Funkcja wklęsła

Warunki wystarczające wypukłości i wklęsłości

Punkt przegięcia wykresu funkcji

Definicja punktu przegięcia

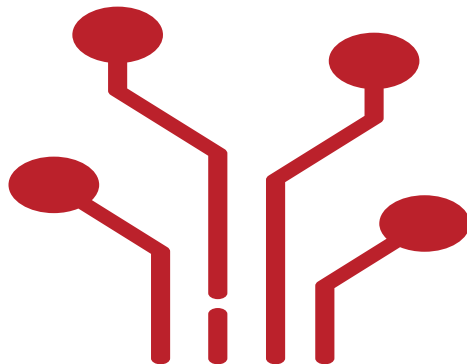
Warunki na istnienie punktu przegięcia

Reguła de l'Hospitala



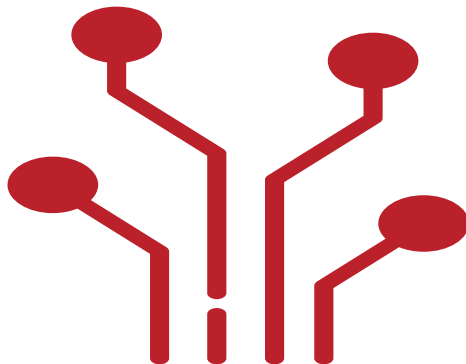
2 / 22

Wklęsłość i wypukłość funkcji



3 / 22

Funkcja wypukła



4 / 22

Twierdzenie

Funkcję f nazywamy *wypukłą* na przedziale $(a, b) \subset \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

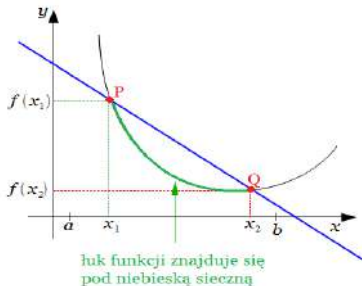
$$\forall_{a < x_1 < x_2 < b} \quad \forall_{0 < t < 1} \quad f(t \cdot x_1 + (1 - t) \cdot x_2) < t \cdot f(x_1) + (1 - t) \cdot f(x_2).$$

Uwaga

Geometrycznie funkcja jest wypukła, jeżeli każdy odcinek siecznej wykresu leży powyżej fragmentu wykresu położonego między punktami, przez które przechodzi sieczna.

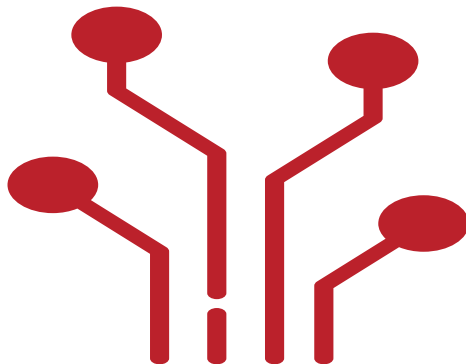
5 / 22

Funkcja wypukła



6 / 22

Funkcja wkłęśła



7 / 22

Twierdzenie

Funkcję f nazywamy *wklęsłą* na przedziale $(a, b) \subset \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

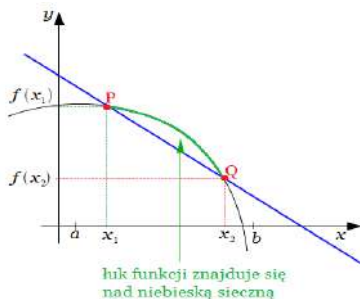
$$\forall_{a < x_1 < x_2 < b} \quad \forall_{0 < t < 1} \quad f(t \cdot x_1 + (1 - t) \cdot x_2) > t \cdot f(x_1) + (1 - t) \cdot f(x_2).$$

Uwaga

Geometrycznie funkcja jest wklęsła, jeżeli każdy odcinek siecznej wykresu leży poniżej fragmentu wykresu położonego między punktami, przez które przechodzi sieczna.

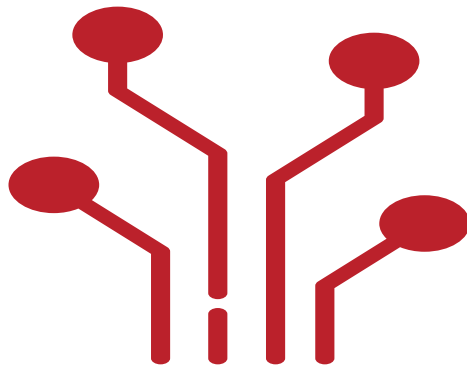
8 / 22

Funkcja wklęsła



9 / 22

Warunki wystarczające wypukłości i wklęsłości



10 / 22

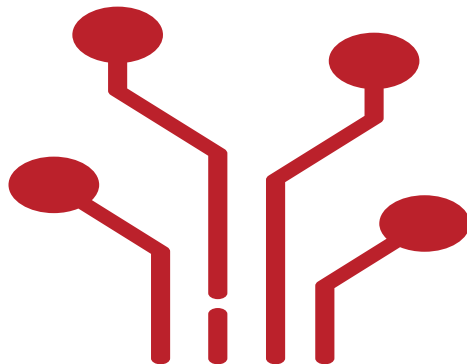
Twierdzenie

Jeżeli $f''(x) > 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest wypukła na (a, b) .

Twierdzenie

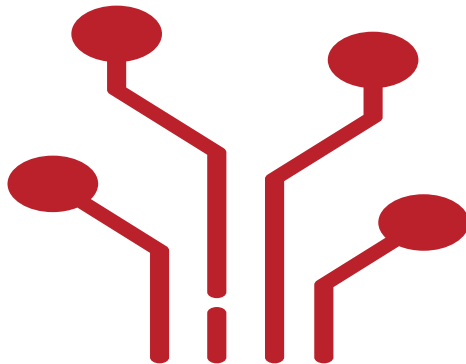
Jeżeli $f''(x) < 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest wklęsła na (a, b) .

Punkt przegięcia wykresu funkcji



12 / 22

Definicja punktu przełączenia

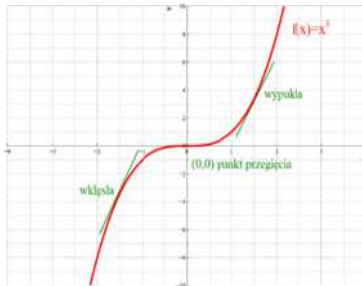


13 / 22

Definicja

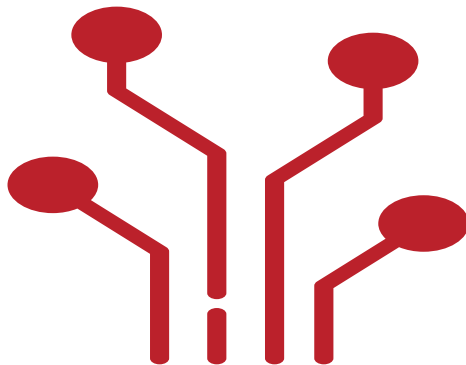
Niech funkcja f będzie określona i różniczkowalna przynajmniej w otoczeniu punktu x_0 . Punkt $(x_0, f(x_0))$ nazywamy **punktem przegięcia** wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że funkcja f jest wypukła na $(x_0 - \delta, x_0)$ oraz wklęsła na $(x_0, x_0 + \delta)$ lub odwrotnie.

Przykład



15 / 22

Warunki na istnienie punktu przegięcia



16 / 22

I warunek dostateczny istnienia punktu przegięcia

Twierdzenie

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ i f będzie funkcją określoną przynajmniej w otoczeniu punktu x_0 , ciągłą i różniczkowalną w punkcie x_0 .

Jeżeli istnieje $\delta > 0$ takie, że

dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f''(x) > 0$ oraz

dla każdego $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f''(x) < 0$

albo

dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f''(x) < 0$ oraz

dla każdego $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f''(x) > 0$,

to w punkcie $(x_0, f(x_0))$ funkcja f ma punkt przegięcia.

17 / 22

II warunek dostateczny istnienia punktu przegięcia

Twierdzenie

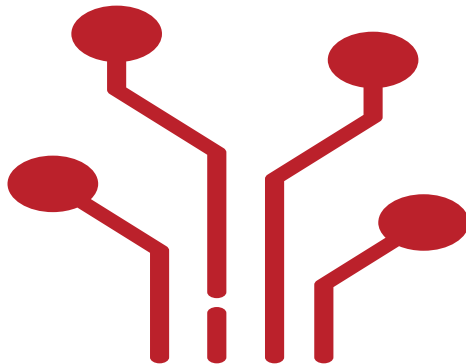
Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ i f będzie funkcją określoną przynajmniej w otoczeniu punktu x_0 .

Jeżeli

1. $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,
2. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$,

to, gdy $n \geq 3$ jest nieparzyste, funkcja f ma w punkcie $(x_0, f(x_0))$ punkt przegięcia.

Reguła de l'Hospitala



19 / 22

Twierdzenie

Niech funkcje f i g następujące spełniają warunki:

► funkcje $\frac{f}{g}$ i $\frac{f'}{g'}$ będą określone w sąsiedztwie punktu x_0 ;

► $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ albo
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$;

Twierdzenie cd.

► *istnieje granica* $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a.$

Wówczas istnieje granica $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *oraz* $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a.$

Powyższe twierdzenie jest prawdziwe również dla granic jednostronnych, niewłaściwych oraz dla granic w $+\infty$ lub w $-\infty$.

21 / 22

Dziękuję za uwagę

Badanie przebiegu zmienności funkcji Funkcje cyklometryczne

dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

Plan wykładu

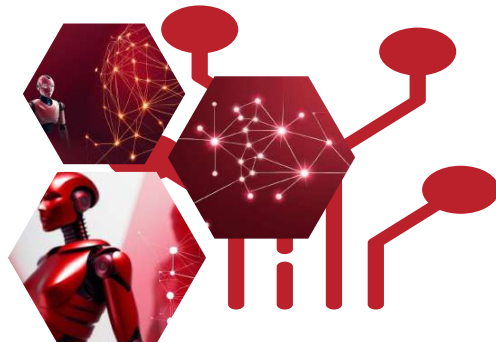
Badanie przebiegu zmienności funkcji

Funkcje cyklometryczne

Wybrane własności funkcji

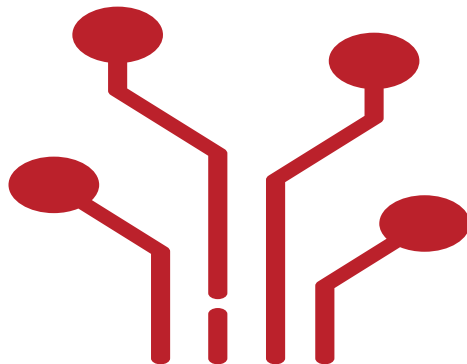
Definicje funkcji cyklometrycznych

Pochodne funkcji cyklometrycznych



2 / 27

Badanie przebiegu zmienności funkcji



3 / 27

Etapy sporządzania wykresu funkcji

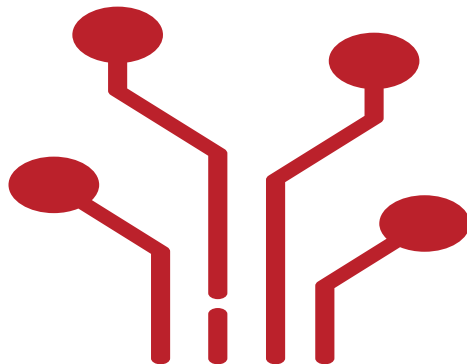
- ▶ Ustalenie dziedziny funkcji.
- ▶ Sprawdzenie własności specjalnych funkcji (parzystość, nieparzystość, okresowość, ciągłość).
- ▶ Obliczenie granic lub wartości funkcji na „krańcach” dziedziny.
- ▶ Wyznaczenie asymptot wykresu funkcji.
- ▶ Zbadanie pierwszej pochodnej funkcji:
 - ▶ obliczenie pochodnej i wyznaczenie jej dziedziny,
 - ▶ wyznaczenie punktów, w których funkcja może mieć ekstrema,
 - ▶ ustalenie przedziałów monotoniczności i ekstremów funkcji.

4 / 27

Etapy sporządzania wykresu funkcji cd.

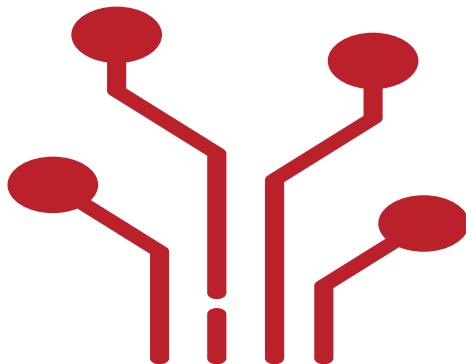
- ▶ Zbadanie drugiej pochodnej funkcji:
 - ▶ obliczenie drugiej pochodnej i wyznaczenie jej dziedziny,
 - ▶ wyznaczenie punktów, w których funkcja może mieć punkty przegięcia,
 - ▶ ustalenie przedziałów wklęsłości i wypukłości oraz punktów przegięcia.
- ▶ Sporządzenie tabelki.
- ▶ Sporządzenie wykresu funkcji.

Funkcje cyklometryczne



6 / 27

Wybrane własności funkcji



7 / 27

Funkcja różnowartościowa

Definicja

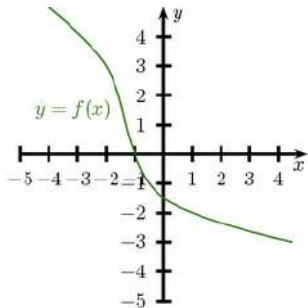
Funkcję $f: X \rightarrow Y$ nazywamy *różnowartościową* wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

$$\forall_{x_1 \in X} \forall_{x_2 \in X} (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Twierdzenie

Jeżeli funkcja jest monotoniczna, to jest różnowartościowa.

Funkcja różnowartościowa – przykład



9 / 27

Funkcja „na”

Definicja

O funkcji $f: X \rightarrow Y$ mówimy, że jest „na” wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

$$f(X) = Y.$$

Bijekcja

Definicja

O funkcji $f: X \rightarrow Y$ mówimy, że jest *bijekcją* wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona różnowartościowa i „na”.

Funkcja odwrotna

Definicja

Jeżeli funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest bijekcją, to funkcję $g: Y \rightarrow X$ nazywamy *funkcją odwrotną* do funkcji f , jeżeli

$$\forall_{x \in X} (g \circ f)(x) = x \quad \text{oraz} \quad \forall_{y \in Y} (f \circ g)(y) = y,$$

gdzie $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Funkcję g oznaczamy wówczas przez f^{-1} .

12 / 27

Funkcja odwrotna

Wniosek

Jeżeli funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, to wykres funkcji i funkcji odwrotnej są symetryczne względem prostej $y = x$.

Przykład

Funkcja $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ określona wzorem

$$f(x) = x^2$$

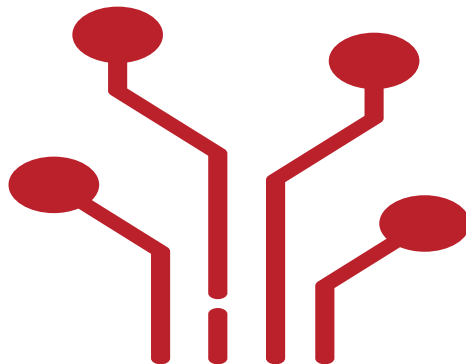
jest bijekcją.

Funkcja do niej odwrotna $f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ jest określona wzorem

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

14 / 27

Definicje funkcji cyklometrycznych



15 / 27

Funkcje cyklometryczne

Definicja

Funkcje cyklometryczne są to funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych na pewnych przedziałach, na których funkcje trygonometryczne są bijekcjami.

16 / 27

Funkcja arcus sinus

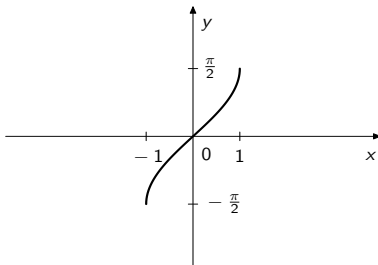
Definicja

Funkcja **arcsin** (*arcus sinus*) jest to funkcja odwrotna do funkcji sinus na przedziale $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Funkcja arcus sinus



Wykres funkcji $y = \arcsin x$

Jest to funkcja rosnąca, nieparzysta.

Funkcja arcus cosinus

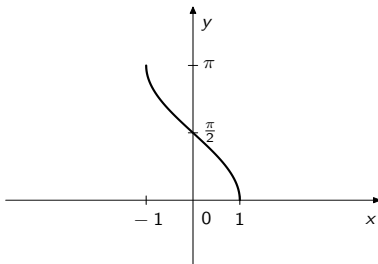
Definicja

Funkcja **arccos** (arcus cosinus) jest to funkcja odwrotna do funkcji cosinus na przedziale $[0, \pi]$.

$$\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

Funkcja arcus cosinus



Wykres funkcji $y = \arccos x$

Jest to funkcja malejąca.

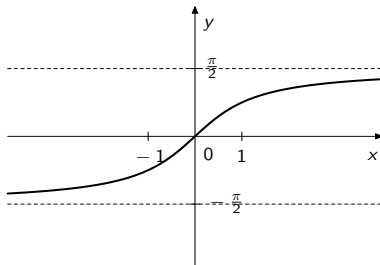
Funkcja arcus tangens

Definicja

Funkcja **arctg** (arcus tangens) jest to funkcja odwrotna do funkcji tangens na przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$$\begin{aligned} \text{tg} &: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{arctg} &: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

Funkcja arcus tangens



Wykres funkcji $y = \arctg x$

Jest to funkcja rosnąca, nieparzysta.

22 / 27

Funkcja arcus cotangens

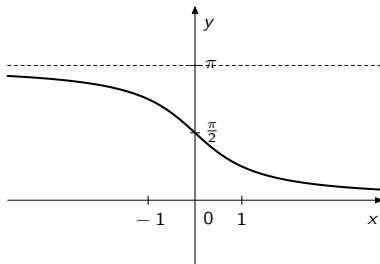
Definicja

Funkcja *arcctg* (arcus cotangens) jest to funkcja odwrotna do funkcji cotangens na przedziale $(0, \pi)$.

$$\text{ctg}: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{arcctg}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$$

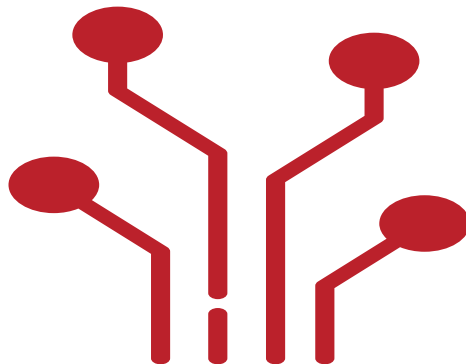
Funkcja arcus cotangens



Wykres funkcji $y = \text{arc ctg } x$

Jest to funkcja malejąca.

Pochodne funkcji cyklometrycznych



25 / 27

$$\blacktriangleright (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\blacktriangleright (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\blacktriangleright (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\blacktriangleright (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Dziękuję za uwagę

Całka nieoznaczona i jej własności

dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

Plan wykładu

Definicja całki nieoznaczonej

Funkcja pierwotna

Całka nieoznaczona

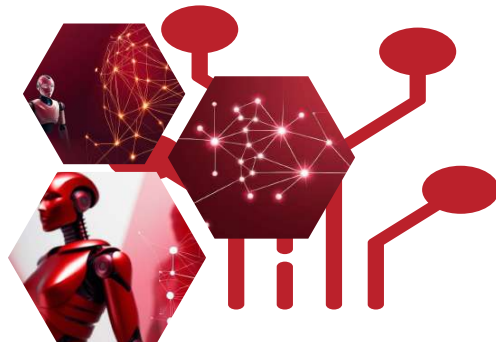
Podstawowe własności całki nieoznaczonej

Całki elementarne

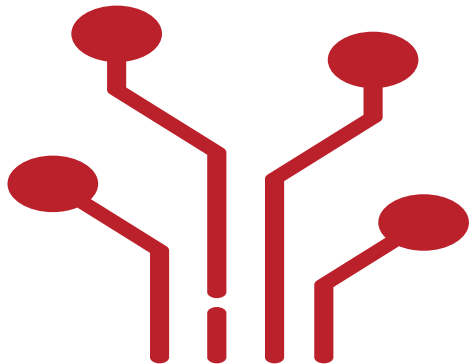
Tożsamości i wskazówki

Realia algebraiczne

Techniki całkowania

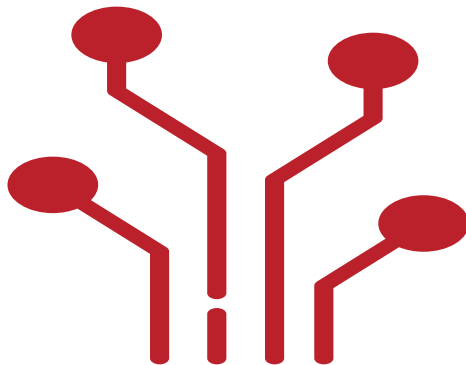


Definicja całki nieoznaczonej



3 / 22

Funkcja pierwotna



4 / 22

Definicja funkcji pierwotnej

Definicja

Funkcję F nazywamy funkcją pierwotną funkcji f na przedziale (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$F'(x) = f(x) \quad \text{dla każdego } x \in (a, b).$$

Definicja funkcji pierwotnej

Definicja

Funkcję F nazywamy funkcją pierwotną funkcji f na przedziale (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$F'(x) = f(x) \quad \text{dla każdego } x \in (a, b).$$

Uwaga

Funkcja pierwotna nie jest wyznaczona jednoznacznie.

Własności funkcji pierwotnej

Twierdzenie

Jeżeli funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale (a, b) , to:

6 / 22

Własności funkcji pierwotnej

Twierdzenie

Jeżeli funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale (a, b) , to:

- ▶ $G(x) = F(x) + c$, dla dowolnej stałej $c \in \mathbb{R}$, jest także funkcją pierwotną f na (a, b) ;

Własności funkcji pierwotnej

Twierdzenie

Jeżeli funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale (a, b) , to:

- ▶ $G(x) = F(x) + c$, dla dowolnej stałej $c \in \mathbb{R}$, jest także funkcją pierwotną f na (a, b) ;
- ▶ każdą funkcję pierwotną funkcji f na (a, b) można zapisać w postaci $F(x) + c$ dla pewnej stałej $c \in \mathbb{R}$.

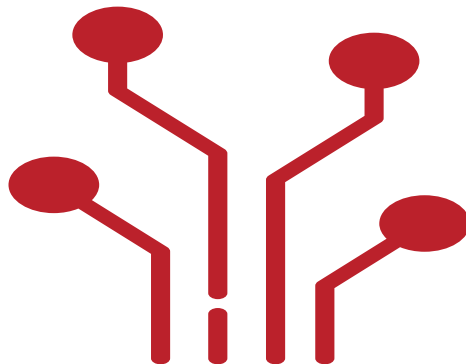
Własności funkcji pierwotnej

Twierdzenie (warunek dostateczny istnienia)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na pewnym przedziale, to ma na tym przedziale funkcję pierwotną.

7 / 22

Całka nieoznaczona



8 / 22

Definicja całki nieoznaczonej

Definicja

Całką nieoznaczoną z funkcji f na przedziale (a, b) nazywamy zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f .

Definicja całki nieoznaczonej

Definicja

Całką nieoznaczoną z funkcji f na przedziale (a, b) nazywamy zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f .

Oznaczenie:

$$\int f(x) dx = F(x) + c.$$

Podstawowe fakty

Z definicji wynika, że:

10 / 22

Podstawowe fakty

Z definicji wynika, że:

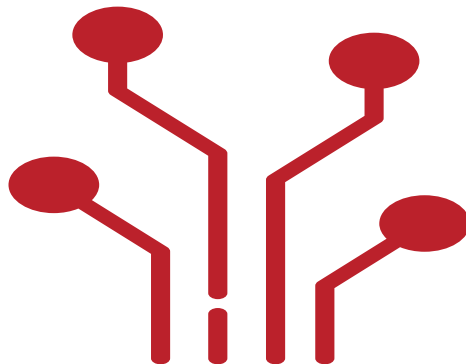
$$\blacktriangleright \left(\int f(x) dx \right)' = f(x),$$

Podstawowe fakty

Z definicji wynika, że:

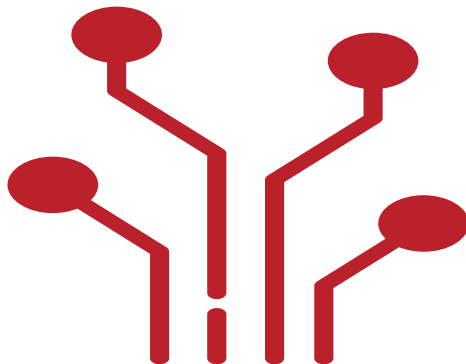
- ▶ $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x),$
- ▶ $\int f'(x) dx = f(x) + c.$

Podstawowe własności całki nieoznaczonej



11 / 22

Całki elementarne



12 / 22

► $\int 0 dx = c$

► $\int 0 \, dx = c$

► $\int dx = x + c$

► $\int 0 \, dx = c$

► $\int dx = x + c$

► $\int x^p \, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c, \, p \neq -1$

$$\blacktriangleright \int 0 \, dx = c$$

$$\blacktriangleright \int dx = x + c$$

$$\blacktriangleright \int x^p \, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c, \, p \neq -1$$

$$\blacktriangleright \int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c$$

$$\blacktriangleright \int 0 \, dx = c$$

$$\blacktriangleright \int dx = x + c$$

$$\blacktriangleright \int x^p \, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c, \, p \neq -1$$

$$\blacktriangleright \int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c$$

$$\blacktriangleright \int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\blacktriangleright \int 0 \, dx = c$$

$$\blacktriangleright \int dx = x + c$$

$$\blacktriangleright \int x^p \, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c, \, p \neq -1$$

$$\blacktriangleright \int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c$$

$$\blacktriangleright \int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\blacktriangleright \int \cos x \, dx = \sin x + c$$

► $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$

► $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$

► $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$

► $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$

► $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$

► $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$

$$\blacktriangleright \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$$

$$\blacktriangleright \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$$

$$\blacktriangleright \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$$

$$\blacktriangleright \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

$$\blacktriangleright \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$$

$$\blacktriangleright \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$$

$$\blacktriangleright \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$$

$$\blacktriangleright \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

$$\blacktriangleright \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\blacktriangleright \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$$

$$\blacktriangleright \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$$

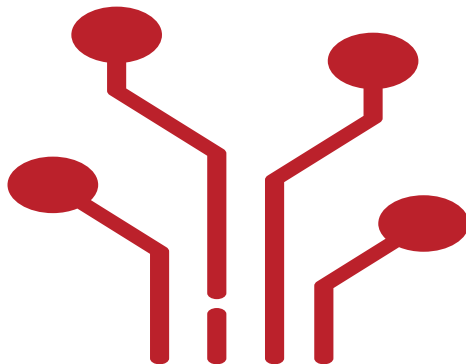
$$\blacktriangleright \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$$

$$\blacktriangleright \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

$$\blacktriangleright \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\blacktriangleright \int e^x dx = e^x + c$$

Tożsamości i wskazówki



15 / 22

Warto pamiętać

16 / 22

Warto pamiętać

► Jeśli $\int f(x) dx = F(x) + c$, to dla $a \neq 0$:

$$\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + c.$$

Warto pamiętać

► Jeśli $\int f(x) dx = F(x) + c$, to dla $a \neq 0$:

$$\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + c.$$

► $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c.$

Warto pamiętać

► Jeśli $\int f(x) dx = F(x) + c$, to dla $a \neq 0$:

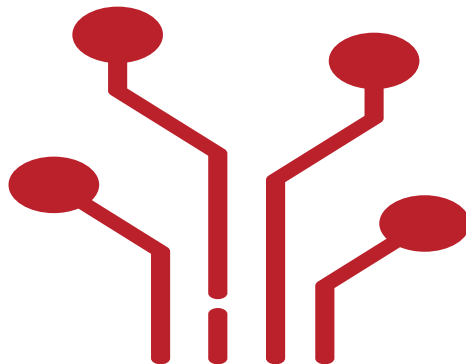
$$\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + c.$$

► $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c.$

► $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c.$

16 / 22

Realia algebraiczne



17 / 22

Działania arytmetyczne na całkach

18 / 22

Działania arytmetyczne na całkach

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g mają funkcje pierwotne, to:

Działania arytmetyczne na całkach

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g mają funkcje pierwotne, to:

$$\blacktriangleright \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx,$$

Działania arytmetyczne na całkach

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g mają funkcje pierwotne, to:

$$\blacktriangleright \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx,$$

$$\blacktriangleright \int c f(x) dx = c \int f(x) dx, c \in \mathbb{R}.$$

Działania arytmetyczne na całkach

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g mają funkcje pierwotne, to:

$$\blacktriangleright \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx,$$

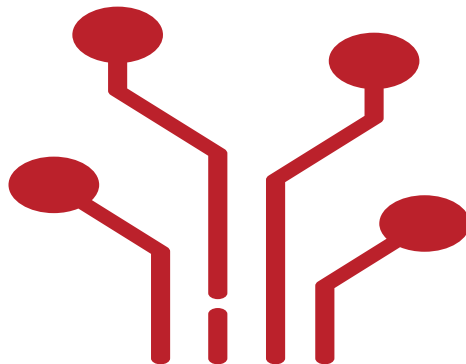
$$\blacktriangleright \int c f(x) dx = c \int f(x) dx, c \in \mathbb{R}.$$

Uwaga

Nie ma analogicznych twierdzeń dla całek z iloczynu ani ilorazu funkcji.

18 / 22

Techniki całkowania



19 / 22

Całkowanie przez części

20 / 22

Całkowanie przez części

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne na przedziale $\langle a, b \rangle$, to

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx.$$

Całkowanie przez podstawienie

21 / 22

Całkowanie przez podstawienie

Twierdzenie

Niech:

21 / 22

Całkowanie przez podstawienie

Twierdzenie

Niech:

1. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła na I ,

21 / 22

Całkowanie przez podstawienie

Twierdzenie

Niech:

1. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła na I ,
2. $g: J \rightarrow I$ ma ciągłą pochodną na J .

21 / 22

Całkowanie przez podstawienie

Twierdzenie

Niech:

1. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła na I ,
2. $g: J \rightarrow I$ ma ciągłą pochodną na J .

Wówczas

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(t) dt = F(g(x)) + C,$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f .

21 / 22

Dziękuję za uwagę

Całkowanie funkcji wymiernych

dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

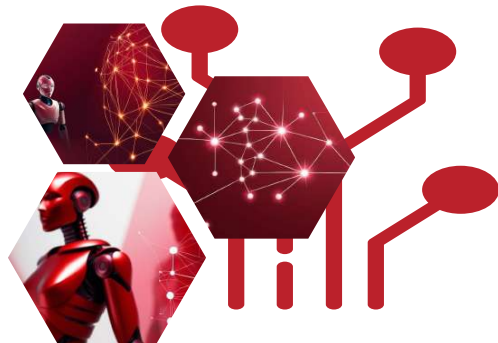
Plan wykładu

Ułamki proste pierwszego rodzaju

Ułamki proste drugiego rodzaju

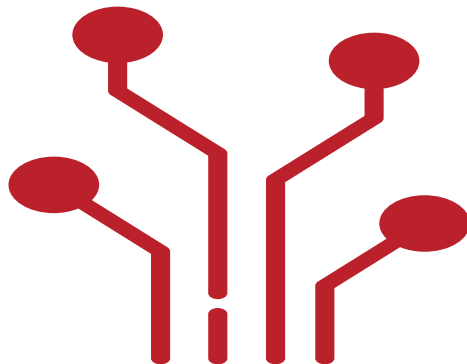
Funkcje wymierne i ich rozkłady

Algorytm całkowania



2 / 18

Ułamki proste pierwszego rodzaju



3 / 18

Ułamki proste pierwszego rodzaju

Definicja

Funkcją wymierną nazywamy funkcję postaci $w(x) = \frac{l(x)}{m(x)}$, gdzie l oraz m są wielomianami.

Definicja

Funkcję wymierną postaci $\frac{A}{(x+a)^n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $a, A \in \mathbb{R}$, nazywamy *ułamkiem prostym pierwszego rodzaju*.

4 / 18

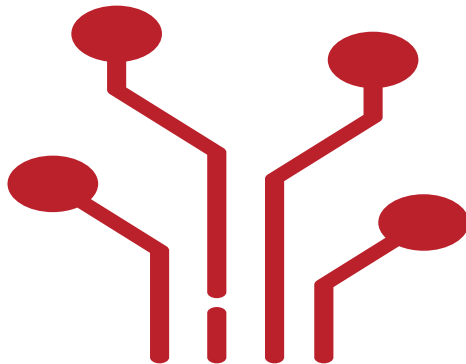
Obliczanie całek z ułamków prostych pierwszego rodzaju

Do obliczania całek z ułamków prostych pierwszego rodzaju stosujemy podstawienie $x + a = t$ i otrzymujemy:

$$\int \frac{A}{x + a} dx = A \ln |x + a| + c,$$

$$\int \frac{A}{(x + a)^n} dx = \frac{-A}{(n - 1)(x + a)^{n-1}} + c, \text{ gdzie } n \geq 2.$$

Ułamki proste drugiego rodzaju



6 / 18

Definicja

Funkcję wymierną postaci $\frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $b, c, B, C \in \mathbb{R}$, przy czym $\Delta < 0$, gdzie Δ jest wyróżnikiem trójmianu $x^2 + bx + c$, nazywamy *ułamkiem prostym drugiego rodzaju*.

Obliczanie całek z ułamków prostych drugiego rodzaju

Gdy $B = 0$, obliczamy całkę $\int \frac{dx}{(x^2 + bx + c)^n}$.

► Sprowadzamy trójmian $x^2 + bx + c$ do postaci kanonicznej $(x - p)^2 + q$ i stosujemy podstawienie $x - p = \sqrt{q} \cdot t$.

► Dla $n = 1$ korzystamy ze wzoru $\int \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t + c$.

► Dla $n \geq 2$ stosujemy wzór rekurencyjny

$$\int \frac{dt}{(t^2 + 1)^n} = \frac{t}{(2n - 2)(t^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n - 3}{2n - 2} \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^{n-1}}.$$

8 / 18

Ułamki proste drugiego rodzaju

Gdy $B \neq 0$:

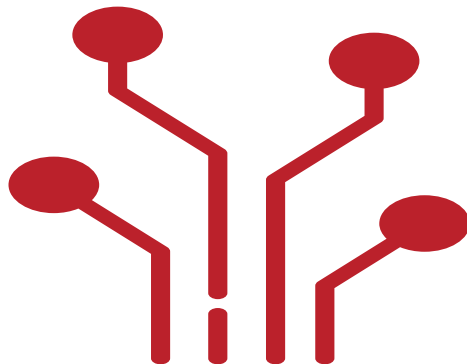
- Licznik zapisujemy w postaci $Bx + C = P(2x + b) + Q$,
gdzie P i Q są odpowiednio dobranymi stałymi.

- Całkę zapisujemy następująco:

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^n} dx = P \int \frac{2x + b}{(x^2 + bx + c)^n} dx + Q \int \frac{dx}{(x^2 + bx + c)^n}.$$

- Do całki $\int \frac{2x + b}{(x^2 + bx + c)^n} dx$
stosujemy podstawienie $t = x^2 + bx + c$.

Funkcje wymierne i ich rozkłady



10 / 18

Funkcja wymierna

Definicja

Jeżeli w jest funkcją wymierną postaci $w(x) = \frac{l(x)}{m(x)}$, natomiast stopnie wielomianów l i m spełniają warunek $st.l(x) < st.m(x)$, to funkcję wymierną $w(x) = \frac{l(x)}{m(x)}$ nazywamy **właściwą**, w przeciwnym razie **niewłaściwą**.

Twierdzenie

Każdą funkcję wymierną niewłaściwą można przedstawić w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

11 / 18

Funkcja wymierna

Wystarczy skorzystać z twierdzenia o rozkładzie wielomianów i zapisać $l(x)$ w postaci:

$$l(x) = m(x)q(x) + r(x), \text{ gdzie } st.r(x) < st.m(x).$$

Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste

Twierdzenie

Każda funkcja wymierna właściwa rzeczywista daje się w sposób jednoznaczny przedstawić w postaci sumy ułamków prostych.

Funkcja wymierna właściwa

$$\frac{p(x)}{a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_r)^{k_r}(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}(x^2+b_2x+c_2)\dots(x^2+b_sx+c_s)^{l_s}}$$

jest sumą $k_1 + k_2 + \dots + k_r$ ułamków prostych pierwszego rodzaju oraz $l_1 + l_2 + \dots + l_s$ ułamków prostych drugiego rodzaju, przy czym

13 / 18

Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste

Twierdzenie cd.

- czynnikowi $(x - x_i)^{k_i}$ odpowiada suma k_i ułamków prostych pierwszego rodzaju postaci:

$$\frac{A_{i1}}{x - x_i} + \frac{A_{i2}}{(x - x_i)^2} + \dots + \frac{A_{ik_i}}{(x - x_i)^{k_i}},$$

gdzie $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ik_i} \in \mathbb{R}$ dla $i \in \{1, 2, \dots, r\}$;

Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste

Twierdzenie cd.

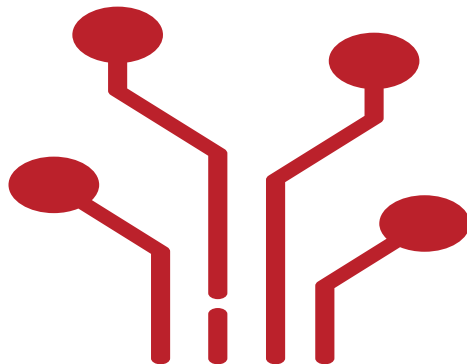
- czynnikowi $(x^2 + b_j x + c_j)^{l_j}$ odpowiada suma l_j ułamków prostych drugiego rodzaju postaci:

$$\frac{B_{j1}x + C_{j1}}{x^2 + b_j x + c_j} + \frac{B_{j2}x + C_{j2}}{(x^2 + b_j x + c_j)^2} + \dots + \frac{B_{jl_j}x + C_{jl_j}}{(x^2 + b_j x + c_j)^{l_j}},$$

gdzie $B_{j1}, B_{j2}, \dots, B_{jl_j}, C_{j1}, C_{j2}, \dots, C_{jl_j} \in \mathbb{R}$ dla $j \in \{1, 2, \dots, s\}$.

15/18

Algorytm całkowania



16 / 18

Algorytm całkowania funkcji wymiernych

1. Jeżeli stopień licznika jest większy lub równy stopniowi mianownika, to funkcję wymierną niewłaściwą zapisujemy w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.
2. Mianownik funkcji wymiernej właściwej rozkładamy na czynniki liniowe i nierozkładalne kwadratowe.
3. Zapisujemy teoretyczny rozkład funkcji wymiernej właściwej na ułamki proste pierwszego i drugiego rodzaju.
4. Znajdujemy nieznane współczynniki tego rozkładu.
5. Obliczamy całki poszczególnych składników rozkładu funkcji, tzn. wielomianu i ułamków prostych.

17 / 18

Dziękuję za uwagę

Całkowanie funkcji niewymiernych i trygonometrycznych

dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

Plan wykładu

Całkowanie funkcji trygonometrycznych

Całkowanie funkcji niewymiernych

Podstawienia Eulera

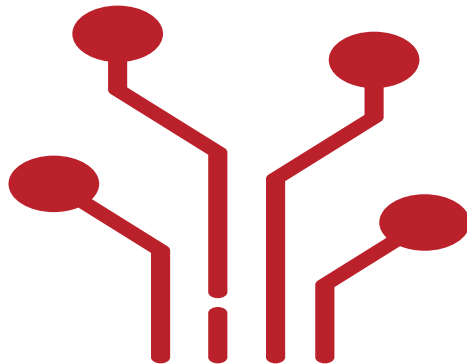
Funkcje zawierające pierwiastki

Funkcje zawierające funkcję wykładniczą



2 / 18

Całkowanie funkcji trygonometrycznych



3 / 18

Dla całek niektórych typów funkcji trygonometrycznych i niewymiernych opracowano podstawienia, które pozwalają zamienić je na całki z funkcji wymiernych, do których można już zastosować algorytm całkowania.

Dla obliczania całek z funkcji postaci: $\sin^n x \cdot \cos^m x$, gdzie $n, m \in \mathbb{N}$ stosujemy następujące podstawienia:

- ▶ $n = 2k + 1$ (nieparzyste): wykorzystujemy tożsamość $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, wtedy $\sin^{2k+1} x = (1 - \cos^2 x)^k \sin x$, podstawienie $t = \cos x$
- ▶ $m = 2k + 1$ (nieparzyste): wykorzystujemy tożsamość $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, wtedy $\cos^{2k+1} x = (1 - \sin^2 x)^k \cos x$, podstawienie $t = \sin x$
- ▶ n, m parzyste: wykorzystujemy tożsamości $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$,

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Niech $R(u, v)$ będzie funkcją wymierną dwóch zmiennych. Dla obliczania całek z funkcji postaci $R(\sin x, \cos x)$ stosujemy następujące podstawienia:

- ▶ jeżeli $R(-u, v) = -R(u, v)$, to $t = \cos x$;
wtedy $\sin x = \sqrt{1 - t^2}$ oraz $dx = \frac{-dt}{\sqrt{1 - t^2}}$
- ▶ jeżeli $R(u, -v) = -R(u, v)$, to $t = \sin x$;
wtedy $\cos x = \sqrt{1 - t^2}$ oraz $dx = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$

Niech $R(u, v)$ będzie funkcją wymierną dwóch zmiennych. Dla obliczania całek z funkcji postaci $R(\sin x, \cos x)$ stosujemy następujące podstawienia:

► jeżeli $R(-u, -v) = R(u, v)$, to $t = \operatorname{tg} x$;

$$\text{wtedy } \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \text{ oraz } dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Jeżeli funkcja podcałkowa ma postać funkcji wymiernej R , w której wszystkie wystąpienia zmiennej zastąpiono funkcją $\sin x$ lub $\cos x$, to korzystamy najpierw z następujących tożsamości trygonometrycznych:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Następnie stosujemy podstawienie uniwersalne: $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

$$\text{Wtedy } \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

Jeżeli funkcja podcałkowa ma postać $\sin(ax) \cos(bx)$, $\sin(ax) \sin(bx)$ lub $\cos(ax) \cos(bx)$, to korzystamy z następujących tożsamości trygonometrycznych:

$$\sin(ax) \cos(bx) = \frac{1}{2} [\sin((a+b)x) + \sin((a-b)x)],$$

$$\sin(ax) \sin(bx) = \frac{1}{2} [\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x)],$$

$$\cos(ax) \cos(bx) = \frac{1}{2} [\cos((a+b)x) + \cos((a-b)x)],$$

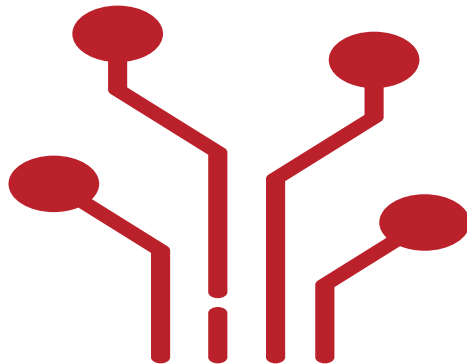
które są konsekwencją wzorów trygonometrycznych

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

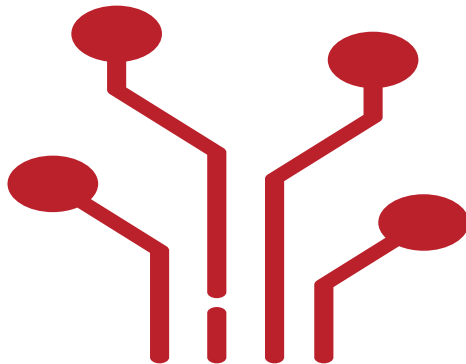
$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Całkowanie funkcji niewymiernych



11 / 18

Podstawienia Eulera



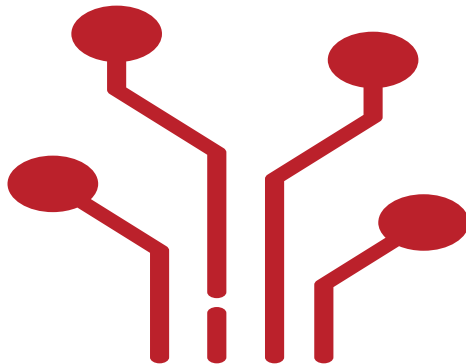
12 / 18

Rozważamy całki postaci $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$, gdzie R jest funkcją wymierną.

Klasyczne podstawienia Eulera mają postać:

1. jeżeli $a > 0$, to: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x$;
2. jeżeli $c > 0$, to: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$;
3. jeżeli $\Delta > 0$, to: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$, gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$ oraz $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Funkcje zawierające pierwiastki



14 / 18

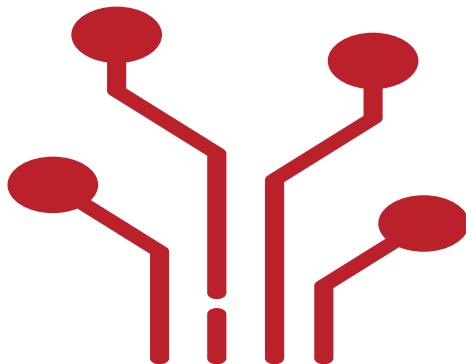
Jeżeli funkcja podcałkowa ma postać funkcji wymiernej, w której niektóre

wystąpienia zmiennej zastąpiono pierwiastkiem $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$,

to do otrzymania całki z funkcji wymiernej wystarczy zastosować podstawienie

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

Funkcje zawierające funkcję wykładowczą



16 / 18

Jeżeli funkcja podcałkowa ma postać funkcji wymiernej o argumentie e^x ,
to do otrzymania całki z funkcji wymiernej wystarczy zastosować podstawienie
 $t = e^x$.

Dziękuję za uwagę

Całka oznaczona i jej interpretacja geometryczna

dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

Plan wykładu

Definicja całki oznaczonej

Podział odcinka

Suma całkowa Riemanna

Całka oznaczona Riemanna

Całka Riemanna – interpretacja geometryczna

Własności całki Riemanna

Warunek wystarczający całkowalności funkcji

Twierdzenie Newtona-Leibniza

Twierdzenie o liniowości całki oznaczonej

Twierdzenie o addytywności całki względem przedziału całkowania

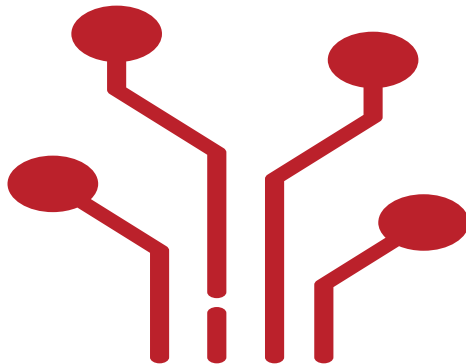
Twierdzenie o całkowaniu przez części

Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie



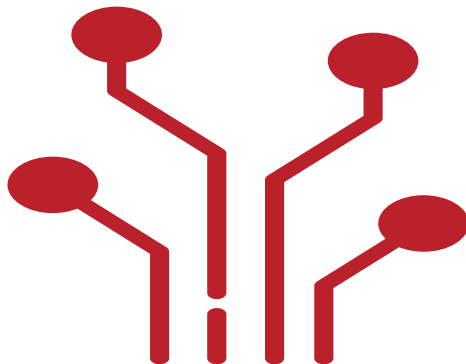
2 / 28

Definicja całki oznaczonej



3 / 28

Podział odcinka



4 / 28

- ▶ Niech $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$.
- ▶ Dzielimy przedział $\langle a, b \rangle$ na n podprzedziałów dowolnie wybranymi punktami $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ w taki sposób, że

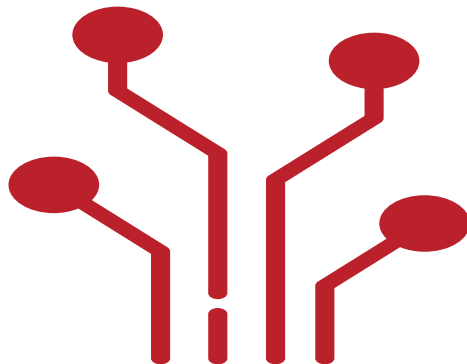
$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

- ▶ Ten szczególny podział oznaczamy symbolem π .

- ▶ Największą różnicę pomiędzy kolejnymi punktami podziału $x_i - x_{i-1}$, czyli długość najdłuższego podprzedziału, oznaczamy symbolem $d(\pi)$.
- ▶ Liczbę $d(\pi)$ nazywamy **średnicą podziału**.
- ▶ W każdym podprzedziale $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ wybieramy dowolnie punkt pośredni $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$.
- ▶ Konstruujemy sumę iloczynów

$$f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Suma całkowita Riemanna

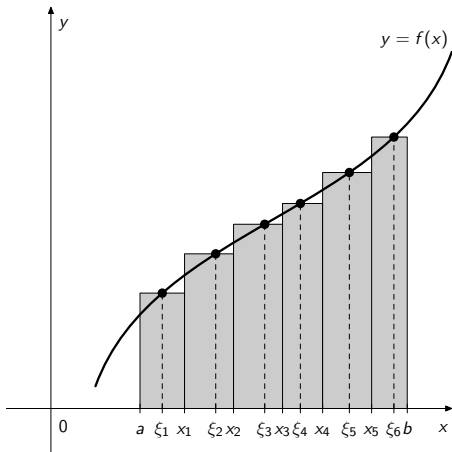


7 / 28

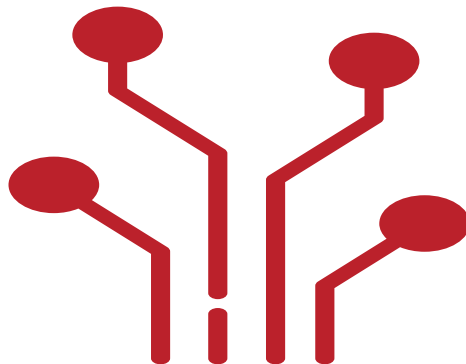
Przyjmując upraszczające założenie, że Δx_i oznacza długość i -tego podprzedziału, tzn. $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$, możemy powyższą sumę zapisać krótko

jako
$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Sumę $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ nazywamy **sumą całkową** z funkcji f na przedziale $\langle a, b \rangle$ odpowiadającą podziałowi π i punktom pośrednim ξ_i .



Całka oznaczona Riemanna



10 / 28

Definicja

Jeżeli dla dowolnego ciągu podziałów (π_k) takich, że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(\pi_k) = 0$$

istnieje skończona, niezależna od wyboru punktów pośrednich ξ_i , granica

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

to nazywamy ją **całką oznaczoną Riemanna funkcji f na przedziale $\langle a, b \rangle$** .

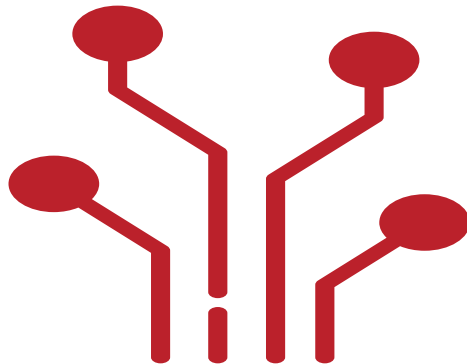
11 / 28

Całkę oznaczoną Riemanna oznaczamy symbolem $\int_a^b f(x)dx$.

UMOWA:

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx, \quad a < b$$

Całka Riemanna – interpretacja geometryczna

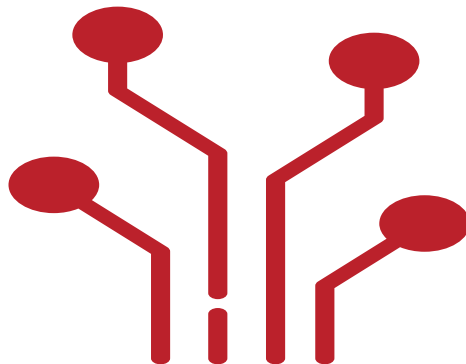


13 / 28

Niech f będzie funkcją ciągłą i nieujemną na przedziale $\langle a, b \rangle$.

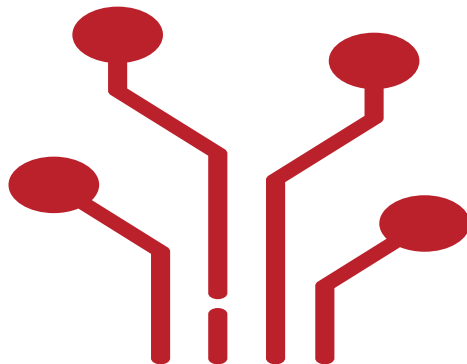
Wówczas $\int_a^b f(x)dx$ jest równa polu figury ograniczonej wykresem funkcji f , osią Ox oraz prostymi $x = a$ i $x = b$.

Własności całki Riemanna



15 / 28

Warunek wystarczający całkowalności funkcji



16 / 28

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest ograniczona na przedziale $\langle a, b \rangle$ i ma na tym przedziale skończoną liczbę punktów nieciągłości pierwszego rodzaju, to jest na nim całkowalna.

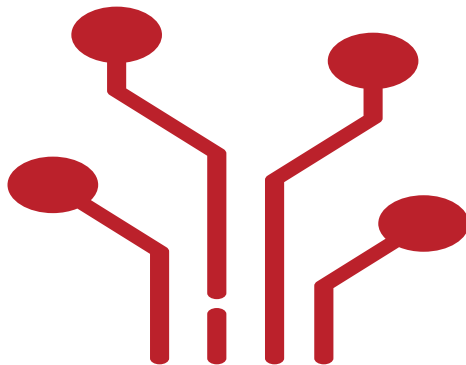
Definicja

Funkcja ma w punkcie $x_0 \in D_f$ nieciągłość pierwszego rodzaju, jeżeli istnieją skończone granice $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ lub

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

17 / 28

Twierdzenie Newtona-Leibniza



18 / 28

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $\langle a, b \rangle$, to

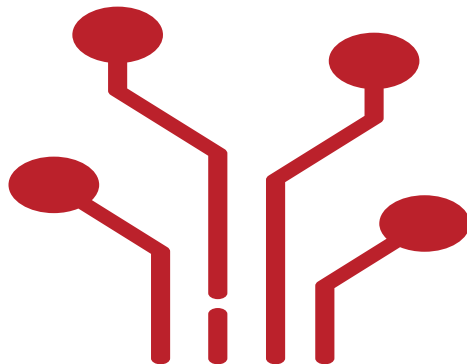
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

gdzie F oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji f na przedziale $\langle a, b \rangle$.

Uwaga. Zamiast $F(b) - F(a)$ będziemy pisać $F(x)\Big|_a^b$ lub $[F(x)]_a^b$.

19 / 28

Twierdzenie o liniowości całki oznaczonej



20 / 28

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g są całkowalne na przedziale $\langle a, b \rangle$, to

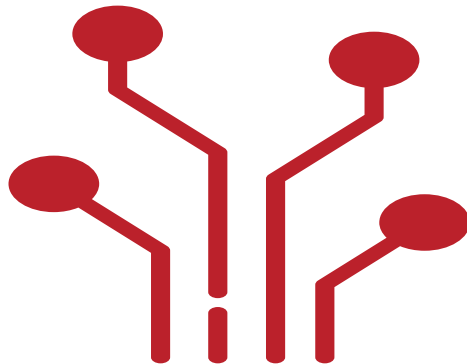
$$\blacktriangleright \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

$$\blacktriangleright \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx,$$

$$\blacktriangleright \int_a^b (cf(x)) dx = c \int_a^b f(x) dx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

21 / 28

**Twierdzenie o addytywności całki
względem przedziału całkowania**



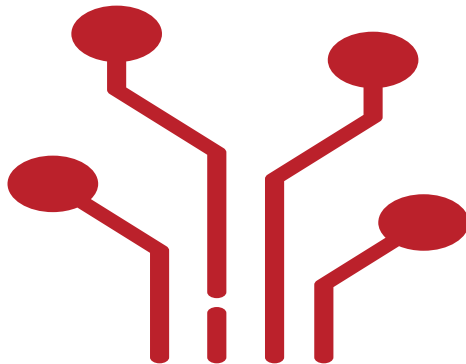
22 / 28

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest całkowna na przedziale $\langle a, b \rangle$ oraz $c \in (a, b)$, to

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Twierdzenie o całkowaniu przez części



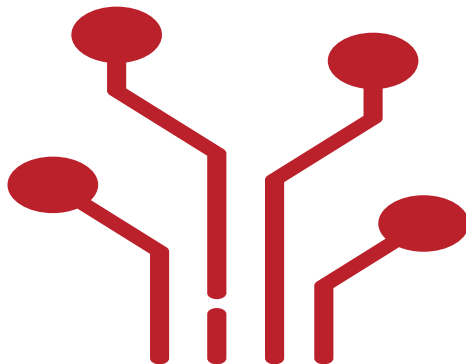
24 / 28

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne na przedziale $\langle a, b \rangle$, to

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie



26 / 28

Twierdzenie

Jeżeli

- ▶ *funkcja f jest ciągła na przedziale $\langle a, b \rangle$,*
- ▶ *funkcja $g: \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ jest funkcją „na” oraz ma ciągłą pochodną na przedziale $\langle \alpha, \beta \rangle$,*
- ▶ *$g(\alpha) = a$ oraz $g(\beta) = b$,*

to
$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt.$$

27 / 28

Dziękuję za uwagę

Zastosowania całki oznaczonej

dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

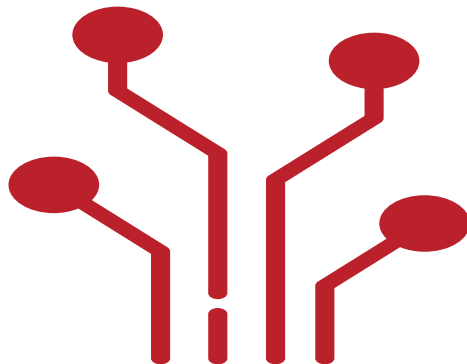
Plan wykładu

Wartość średnia funkcji
Pole trapezu krzywoliniowego
Długość łuku krzywej
Objętość bryły obrotowej
Pole powierzchni obrotowej
Funkcja górnej granicy całkowania



2 / 24

Wartość średnia funkcji



3 / 24

Twierdzenie

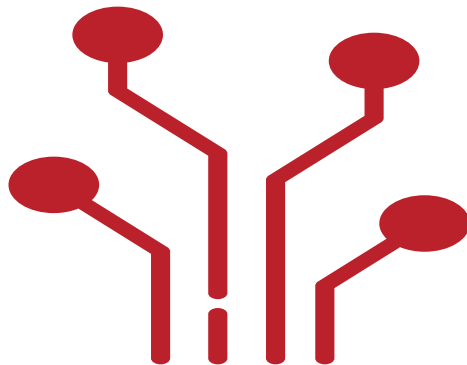
Jeżeli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to istnieje $c \in [a, b]$ takie, że
$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a).$$

Definicja

Wielkość $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ nazywamy wartością średnią funkcji f na przedziale $[a, b]$.

4 / 24

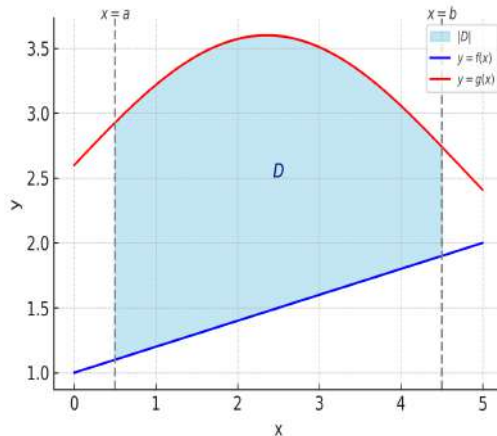
Pole trapezu krzywoliniowe



5 / 24

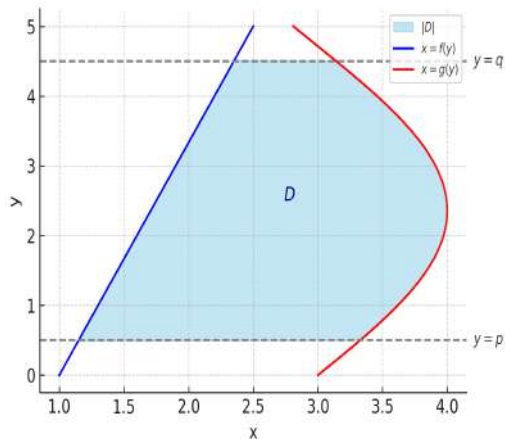
Niech funkcje f oraz g będą ciągłe na przedziale $[a, b]$ oraz niech $f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$. Wtedy pole trapezu krzywoliniowego D ograniczonego wykresami funkcji f i g oraz prostymi $x = a$, $x = b$ wyraża się wzorem:

$$|D| = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx.$$

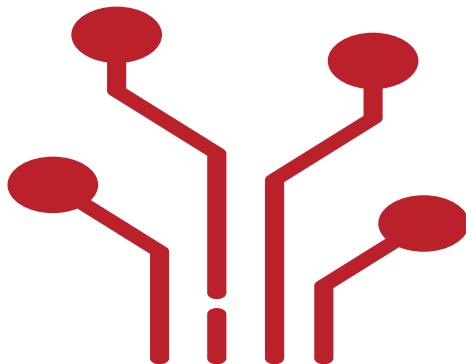


Niech funkcje f oraz g będą ciągłe na przedziale $[p, q]$ oraz niech $f(y) \leq g(y)$ dla każdego $y \in [p, q]$. Wtedy pole trapezu krzywoliniowego D ograniczonego wykresami funkcji f i g oraz prostymi $y = p$, $y = q$ wyraża się wzorem:

$$|D| = \int_p^q [g(y) - f(y)] dy.$$



Długość łuku krzywej



10 / 24

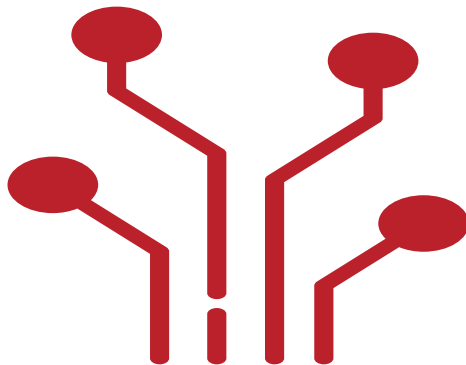
Niech funkcja f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$. Wtedy długość łuku krzywej

$$\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$$

wyraża się wzorem:

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Objętość bryły obrotowej



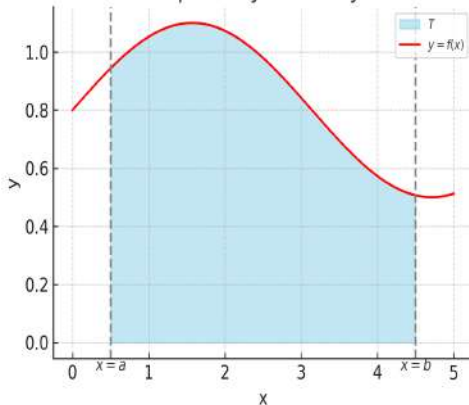
12 / 24

Niech funkcja nieujemna f będzie ciągła na przedziale $[a, b]$. Niech T oznacza trapez krzywoliniowy ograniczony wykresem funkcji f , osią Ox oraz prostymi $x = a, x = b$.

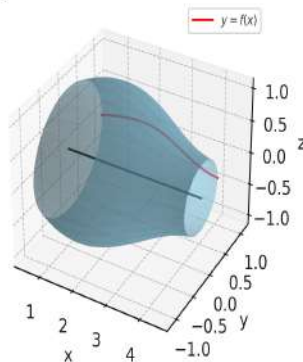
Objętość bryły V powstałej z obrotu trapezu T wokół osi Ox wyraża się wzorem:

$$|V| = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Trapez krzywoliniowy T



Bryła obrotowa V wokół osi Ox

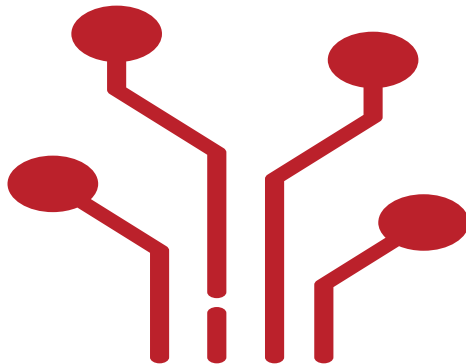


Niech funkcja nieujemna f będzie ciągła na przedziale $[a, b]$, gdzie $a \geq 0$. Niech T oznacza trapez krzywoliniowy ograniczony wykresem funkcji f , osią Ox oraz prostymi $x = a, x = b$.

Objętość bryły V powstałej z obrotu trapezu T wokół osi Oy wyraża się wzorem:

$$|V| = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

Pole powierzchni obrotowej



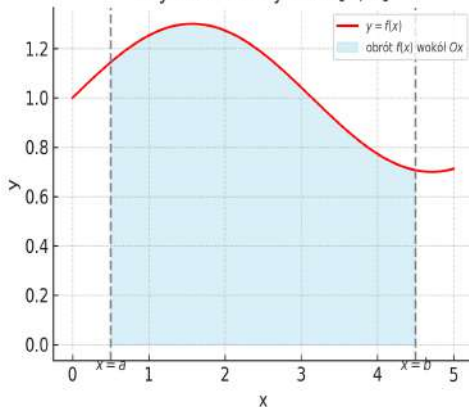
16 / 24

Niech funkcja nieujemna f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$.

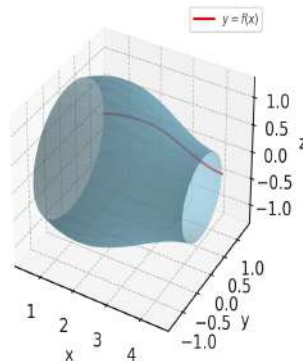
Pole powierzchni Σ powstałej z obrotu wykresu funkcji f wokół osi Ox wyraża się wzorem:

$$|\Sigma| = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Wykres funkcji f na $[a, b]$



Powierzchnia obrotowa Σ wokół osi Ox

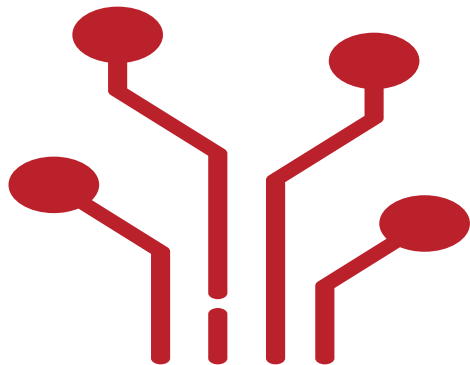


Niech funkcja nieujemna f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$, gdzie $a \geq 0$.

Pole powierzchni Σ powstałej z obrotu wykresu funkcji f wokół osi Oy wyraża się wzorem:

$$|\Sigma| = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Funkcja górnej granicy całkowania



20 / 24

Twierdzenie

Niech funkcja f będzie całkowalna na przedziale $[a, b]$ oraz niech $c \in [a, b]$. Funkcję

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt,$$

gdzie $x \in [a, b]$, nazywamy **funkcją górnej granicy całkowania**.

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$, to funkcja

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt,$$

gdzie $x \in [a, b]$, jest ciągła na przedziale $[a, b]$.

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest całkowna na przedziale $[a, b]$ oraz jest ciągła w punkcie $x_0 \in [a, b]$, to funkcja

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt,$$

gdzie $c \in [a, b]$, ma pochodną właściwą w punkcie x_0 oraz $F'(x_0) = f(x_0)$.

Dziękuję za uwagę

Algebra macierzy

dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

Plan wykładu

Definicja macierzy

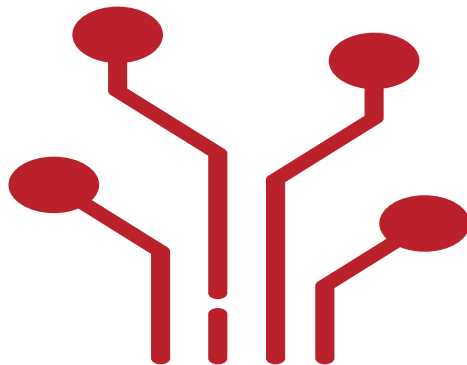
Rodzaje macierzy

Działania na macierzach



2 / 25

Definicja macierzy



3 / 25

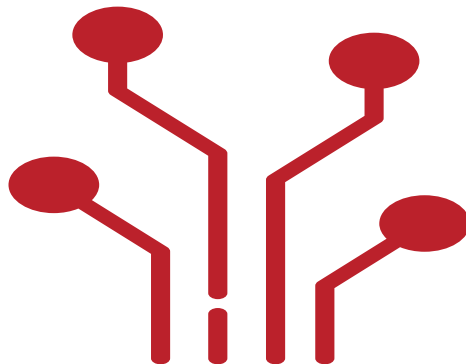
- ▶ **Macierzą rzeczywistą** wymiaru $m \times n$, gdzie $m \in \mathbb{N}$ oraz $n \in \mathbb{N}$, nazywamy prostokątną tablicę złożoną z mn liczb rzeczywistych ustawionych w m wierszach i n kolumnach.
- ▶ Element macierzy A stojący w i -tym wierszu oraz w j -tej kolumnie oznaczamy symbolem a_{ij} .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Równość macierzy

Macierze A i B są równe, gdy mają takie same wymiary $m \times n$ oraz $a_{ij} = b_{ij}$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ oraz $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Rodzaje macierzy



7 / 25

- ▶ **Macierz zerowa** wymiaru $m \times n$ jest to macierz, której wszystkie elementy są równe 0.
- ▶ Oznaczamy ją symbolem $\mathbf{0}_{m \times n}$ lub $\mathbf{0}$, gdy znamy jej wymiar.

- ▶ **Macierz kwadratowa** stopnia n jest to macierz wymiaru $n \times n$.
- ▶ Elementy $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ macierzy kwadratowej tworzą jej **główną przekątną**:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

- **Macierz trójkątna dolna** jest to macierz kwadratowa stopnia $n \geq 2$, której wszystkie elementy stojące nad główną przekątną są równe 0.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Rodzaje macierzy

- **Macierz trójkątna górna** jest to macierz kwadratowa stopnia $n \geq 2$, której wszystkie elementy stojące pod główną przekątną są równe 0.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Rodzaje macierzy

- **Macierz diagonalna** jest to macierz kwadratowa stopnia n , której wszystkie elementy stojące poza główną przekątną są równe 0.

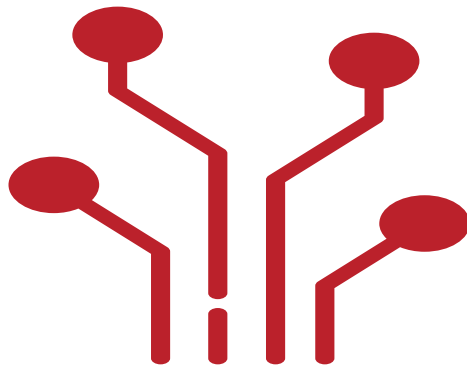
$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Rodzaje macierzy

- ▶ **Macierz jednostkowa** jest to macierz diagonalna stopnia n , której wszystkie elementy stojące na głównej przekątnej są równe 1.
- ▶ Macierz jednostkową stopnia n oznaczamy symbolem I_n .

$$I_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Działania na macierzach



14 / 25

Dodawanie macierzy

- ▶ Niech $A = [a_{ij}]$ oraz $B = [b_{ij}]$ będą macierzami wymiaru $m \times n$.
- ▶ **Sumą macierzy** A i B nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$ wymiaru $m \times n$, której elementy określone są wzorem

$$c_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} a_{ij} + b_{ij}$$

dla $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ oraz $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

- ▶ Piszemy $C = A + B$.

Odejmowanie macierzy

- ▶ Niech $A = [a_{ij}]$ oraz $B = [b_{ij}]$ będą macierzami wymiaru $m \times n$.
- ▶ **Różnicą macierzy** A i B nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$ wymiaru $m \times n$, której elementy określone są wzorem

$$c_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} a_{ij} - b_{ij}$$

dla $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ oraz $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

- ▶ Piszemy $C = A - B$.

Mnożenie macierzy przez liczbę

- ▶ Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą wymiaru $m \times n$, zaś α będzie liczbą rzeczywistą.
- ▶ **Iloczynem macierzy A przez liczbę α** nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$ wymiaru $m \times n$, której elementy określone są wzorem

$$c_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha a_{ij}$$

dla $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ oraz $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

- ▶ Piszemy $C = \alpha A$.

Mnożenie macierzy przez macierz

- ▶ Niech macierz $A = [a_{ij}]$ ma wymiar $m \times n$, a macierz $B = [b_{ij}]$ ma wymiar $n \times k$.
- ▶ **Iloczynem macierzy** A i B nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$ wymiaru $m \times k$, której elementy określone są wzorem

$$c_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

dla $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ oraz $j \in \{1, 2, \dots, k\}$.

- ▶ Piszemy $C = AB$.

Uwaga

Równość $c_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$ oznacza, że element c_{ij} stojący w macierzy C w i -tym wierszu oraz j -tej kolumnie otrzymujemy w wyniku mnożenia skalarnego i -tego wiersza macierzy A przez j -tą kolumnę macierzy B .

Uwaga

Jeżeli liczba kolumn macierzy A nie jest równa liczbie wierszy macierzy B , to mnożenie AB jest niewykonalne.

Uwaga

Mnożenie macierzy nie jest przemienne.

Przykład

$$\blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Przykład

$$\blacktriangleright 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 12 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

22 / 25

Macierz transponowana

- **Macierzą transponowaną** do macierzy $A = [a_{ij}]$ wymiaru $m \times n$ nazywamy macierz $B = [b_{ij}]$ wymiaru $n \times m$, której elementy określone są wzorem

$$b_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} a_{ji}$$

dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ oraz $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

- Macierz transponowaną do macierzy A oznaczamy symbolem A^T .

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Dziękuję za uwagę

Wyznaczniki

dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

Plan wykładu

Wyznacznik macierzy i metody jego obliczania

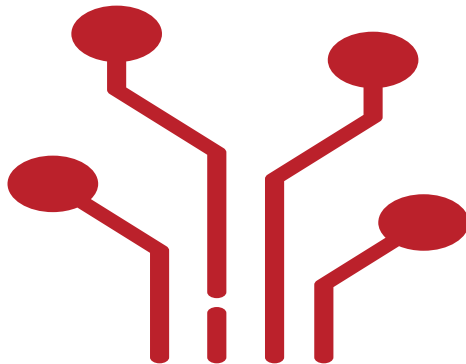
Własności wyznaczników

Macierz odwrotna i jej własności



2 / 28

Wyznacznik macierzy i metody jego obliczania



3 / 28

Wyznacznik macierzy

- ▶ Wyznacznikiem rzeczywistej macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]$ nazywamy liczbę rzeczywistą $\det A$ przyporządkowaną macierzy A w pewien ściśle określony sposób.
- ▶ Wyznacznik macierzy A oznaczamy także symbolem $\det[a_{ij}]$ lub $|A|$.

Reguła obliczania wyznaczników macierzy stopnia pierwszego

$$\det[a_{11}] = a_{11}$$

5 / 28

Reguła obliczania wyznaczników macierzy stopnia drugiego

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

6 / 28

Przykład

Obliczyć wyznacznik macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = 5 - 8 = -3$$

Reguła Sarrusa obliczania wyznaczników macierzy stopnia trzeciego

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

UWAGA! Reguła ta nie przenosi się na wyznaczniki wyższych stopni.

8 / 28

Przykład

Obliczyć wyznacznik macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot (-1) - 5 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 4 \cdot 2 =$$
$$6 + 2 - 20 + 2 - 5 - 24 = -39$$

Dopełnienie algebraiczne elementu macierzy

- ▶ Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geq 2$.
- ▶ **Dopełnieniem algebraicznym** elementu a_{ij} macierzy A nazywamy liczbę

$$D_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

gdzie A_{ij} oznacza macierz stopnia $n - 1$ otrzymaną przez skreślenie i -tego wiersza oraz j -tej kolumny macierzy A .

Rozwinięcie Laplace'a wyznacznika

- ▶ Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geq 2$ oraz niech i, j będą ustalonymi liczbami naturalnymi takimi, że $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.
- ▶ Wtedy wyznacznik macierzy A można obliczyć na podstawie następujących wzorów:
 - ▶ $\det A = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \dots + a_{in}D_{in}$;
wzór ten nazywamy rozwinięciem Laplace'a wyznacznika względem i -tego wiersza;
 - ▶ $\det A = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \dots + a_{nj}D_{nj}$;
wzór ten nazywamy rozwinięciem Laplace'a wyznacznika względem j -tej kolumny.

Wyznacznik macierzy trójkątnej

- Jeżeli $A = [a_{ij}]$ jest macierzą diagonalną lub macierzą trójkątną dolną lub macierzą trójkątną górną stopnia n , to jej wyznacznik jest równy iloczynowi elementów stojących na głównej przekątnej tej macierzy, tzn.

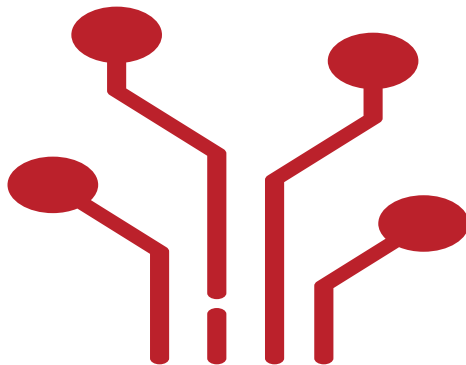
$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}.$$

- Przykład

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 5 \cdot 3 = -30$$

12 / 28

Własności wyznaczników



13 / 28

- Wyznacznik macierzy kwadratowej zawierającej kolumnę złożoną z samych zer lub wiersz złożony z samych zer jest równy 0, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

- Wyznacznik macierzy kwadratowej zawierającej dwie jednakowe (albo proporcjonalne) kolumny lub dwa jednakowe (albo proporcjonalne) wiersze jest równy 0, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & c_1 & \cdots & kc_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & c_2 & \cdots & kc_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & c_n & \cdots & kc_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ kc_1 & kc_2 & \cdots & kc_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

- Wyznacznik macierzy kwadratowej zmienia znak, jeżeli przestawimy w niej między sobą albo dwie kolumny albo dwa wiersze, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

oraz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- ▶ Jeżeli wszystkie elementy pewnej kolumny lub pewnego wiersza macierzy kwadratowej posiadają wspólny czynnik, to można go wyłączyć przed wyznacznik tej macierzy, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & ca_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & ca_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & ca_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

oraz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Twierdzenie

Wyznacznik macierzy kwadratowej nie zmienia się, jeżeli do dowolnej kolumny tej macierzy dodamy inną kolumnę pomnożoną przez dowolną liczbę lub do dowolnego jej wiersza dodamy inny wiersz pomnożony przez dowolną liczbę.

Twierdzenie

$\det A = \det A^T$ dla dowolnej macierzy kwadratowej A .

19 / 28

Twierdzenie

(Twierdzenie Cauchy'ego)

Jeżeli A i B są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia, to

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Twierdzenie

Dla dowolnej macierzy kwadratowej A oraz dowolnego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest równość

$$\det(A^n) = (\det A)^n.$$

20 / 28

Przykład

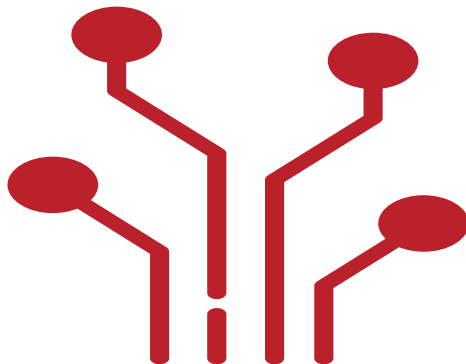
Obliczyć wyznacznik macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -6 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Przykład cd.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -6 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{k_1+k_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ -4 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{k_2+2k_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 4 \\ -4 & 8 & 2 & 1 \\ 4 & 11 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{k_4+4k_3}{=} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -4 & 8 & 2 & 9 \\ 4 & 11 & 3 & 10 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 8 & 9 \\ 4 & 11 & 10 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} \stackrel{k_3-k_2}{=} - \begin{vmatrix} -4 & 8 & 1 \\ 4 & 11 & -1 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} \stackrel{w_1+w_2}{=} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 19 & 0 \\ 4 & 11 & -1 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -19 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 19 \cdot (28 + 3) = 19 \cdot 31 = 589$$

22/28

Macierz odwrotna i jej własności



23 / 28

Macierz odwrotna

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n .

Definicja

Macierzą odwrotną do macierzy A nazywamy macierz A^{-1} spełniającą warunek $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, gdzie I_n jest macierzą jednostkową stopnia n .

Definicja

Jeżeli macierz A posiada macierz odwrotną A^{-1} , to macierz A nazywamy **odwracalną**. Macierz odwrotna jest wyznaczona jednoznacznie.

24 / 28

Twierdzenia o macierzy odwrotnej

Twierdzenie

Macierz kwadratowa jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$.

Twierdzenie

Jeżeli macierz kwadratowa $A = [a_{ij}]$ jest nieosobliwa, to

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} [D_{ij}]^T,$$

przy czym $[D_{ij}]$ oznacza macierz dopełnień algebraicznych elementów a_{ij} macierzy A .

25 / 28

Przykład

- ▶ Wyznaczyć, o ile istnieje, macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$.
- ▶ $\det A = 4 - 2 = 2 \neq 0$, więc macierz A jest odwracalna
- ▶ $[D_{ij}] = \begin{bmatrix} (-1)^2 \cdot (-4) & (-1)^3 \cdot 1 \\ (-1)^3 \cdot 2 & (-1)^4 \cdot (-1) \end{bmatrix}$

Przykład cd.

$$\blacktriangleright [D_{ij}] = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangleright [D_{ij}]^T = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangleright A^{-1} = \frac{1}{\det A} [D_{ij}]^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

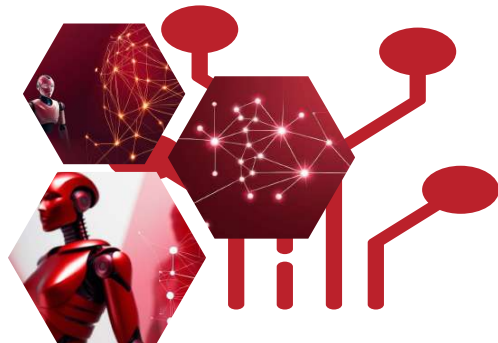
Dziękuję za uwagę

Układy równań liniowych

dr Ewa Łazuka, prof. uczelni
Katedra Matematyki Stosowanej

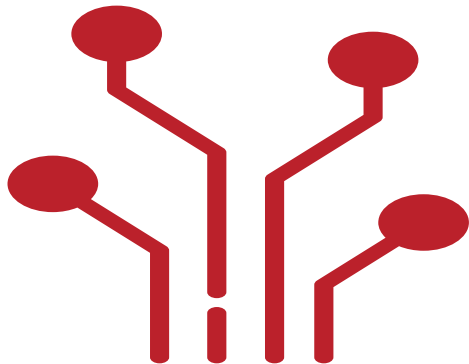
Plan wykładu

Definicja układu równań liniowych
Twierdzenie Cramera
Metoda eliminacji Gaussa
Twierdzenie Kroneckera–Capellego



2 / 41

Definicja układu równań liniowych



3 / 41

Definicja

Układem m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, x_2, \dots, x_n$, gdzie $m \in \mathbb{N}$ oraz $n \in \mathbb{N}$, nazywamy układ równań postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{R}$ oraz $b_i \in \mathbb{R}$ dla $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ oraz $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Macierzowa postać układu równań liniowych

- Układ równań liniowych można zapisać w postaci macierzowej $AX = B$,

$$\text{gdzie } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

- Macierz A nazywamy *macierzą główną* układu równań liniowych, macierz X *macierzą (kolumną) niewiadomych*, zaś macierz B *macierzą (kolumną) wyrazów wolnych*.

Rozwiązanie liniowego układu równań

Definicja

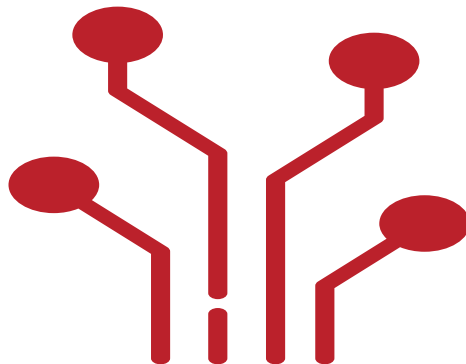
Rozwiązaniem układu równań liniowych nazywamy ciąg $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ liczb rzeczywistych spełniających ten układ.

Rozwiązalność liniowego układu równań

Układ równań liniowych może

- ▶ mieć dokładnie jedno rozwiązanie (*układ oznaczony, układ równań niezależnych*),
- ▶ mieć nieskończenie wiele rozwiązań (*układ nieoznaczony, układ równań zależnych*),
- ▶ nie mieć rozwiązań (*układ sprzeczny*).

Twierdzenie Cramera



8 / 41

Kwadratowe układy równań

Niech macierz główna A liniowego układu równań będzie macierzą kwadratową.

Twierdzenie

(Twierdzenie Cramera) Układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest nieosobliwa, tzn. $\det A \neq 0$.

Rozwiązanie to dane jest następującymi wzorami Cramera:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad \dots \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A},$$

gdzie macierz A_i otrzymujemy z macierzy A przez zastąpienie i -tej kolumny kolumną wyrazów wolnych.

9 / 41

Przykład 1

Dla jakiej wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ układ równań

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z + 3t = 3 \\ 3x - ay + z - t = 1 \\ x + 5z + t = 2 \\ -x + y - 2z + 3t = 5 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie?

Przykład 1

- Obliczamy wyznacznik macierzy głównej układu równań:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & -a & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} k_3 - 5k_1 \\ k_4 - k_1 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -8 & 1 \\ 3 & -a & -14 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^4 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -8 & 1 \\ -a & -14 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 178 - 35a.$$

- Układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0 \Leftrightarrow 178 - 35a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{178}{35}$.

Przykład 2

Z układu równań:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y + z + t = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ y + 2z + 3t = -2 \end{cases}$$

wyznaczyć niewiadomą y .

$$\blacktriangleright A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Przykład 2 – cd.

$$\blacktriangleright \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{w_3 - w_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4.$$

$$\blacktriangleright \det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{w_3 - w_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12.$$

$$\blacktriangleright \text{Zatem } y = \frac{\det A_2}{\det A} = 3.$$

Jednorodne układy równań

Definicja

Układ równań nazywamy *jednorodnym*, gdy kolumna wyrazów wolnych jest macierzą zerową.

Uwaga

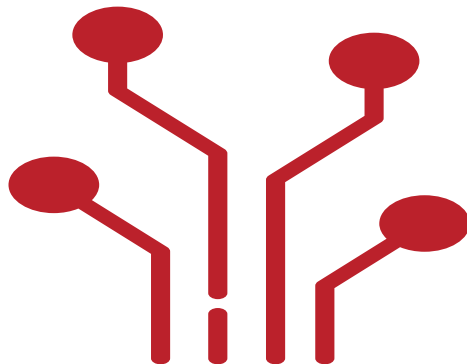
Jednorodny układ równań ma zawsze rozwiązanie. Jest to rozwiązanie zerowe.

Jednorodne układy równań

Wniosek

(Wniosek z twierdzenia Cramera) Kwadratowy jednorodny układ równań ma rozwiązanie niezerowe wtedy i tylko wtedy, gdy macierz główna tego układu jest osobliwa.

Metoda eliminacji Gaussa



16 / 41

Metoda eliminacji Gaussa dla układów Cramera

- ▶ Załóżmy najpierw, że dany jest układ równań liniowych w postaci macierzowej $AX = B$, gdzie A jest kwadratową macierzą nieosobliwą.
- ▶ Z twierdzenia Cramera wynika, że ma on dokładnie jedno rozwiązanie.
- ▶ Zamiast rozwiązywać układ równań w klasycznej postaci, będziemy przekształcać macierz rozszerzoną układu $[A|B]$.

$$[A|B] \xrightarrow{\text{I etap}} [A'|B'] \xrightarrow{\text{II etap}} [I|R]$$

- ▶ A' – macierz trójkątna górna z jedynkami na głównej przekątnej
- ▶ R – macierz rozwiązań układu

Operacje na wierszach macierzy, które nie zmieniają rozwiązań układu równań

- ▶ zamiana dwóch wierszy macierzy (zamiana kolejności równań) $w_i \leftrightarrow w_j$
- ▶ pomnożenie wiersza przez stałą różną od 0 (pomnożenie stronami równania przez stałą różną od 0) cw_i
- ▶ dodanie do elementów pewnego wiersza odpowiadających im elementów innego wiersza pomnożonych przez dowolną liczbę różną od 0 (dodawanie równań stronami) $w_i + cw_j$

I etap metody eliminacji Gaussa

- Algorytm przekształcania macierzy $[A|B]$ do postaci $[A'|B']$, gdzie macierz A' jest macierzą trójkątną górną z jedynkami na głównej przekątnej:

$$w'_1 = \frac{1}{a_{11}}w_1 \quad \text{— „ustawienie jedynki na głównej przekątnej”}$$

$$\left. \begin{aligned} w'_2 &= w_2 - a_{21}w'_1 \\ w'_3 &= w_3 - a_{31}w'_1 \\ &\dots \\ w'_n &= w_n - a_{n1}w'_1 \end{aligned} \right\} \text{— „wyzerowanie elementów} \\ \text{pod otrzymaną jedynką”}$$

- Jeżeli $a_{11} = 0$, to zamieniamy wiersze macierzy tak, aby w pierwszym wierszu i pierwszej kolumnie znalazł się element niezerowy.

I etap metody eliminacji Gaussa

- ▶ Następnie kontynuujemy to postępowanie dla podmacierzy stopnia $n - 1$, $n - 2, \dots, 2$ oraz 1 .
- ▶ W obliczeniach ręcznych na tym etapie porzucamy i rozwiązujemy otrzymany równoważny układ równań, zaczynając od ostatniego równania.

II etap metody eliminacji Gaussa

Algorytm przekształcenia macierzy górnio trójkątnej $[A'|B']$ do macierzy $[I|R]$, gdzie I jest macierzą jednostkową, zaś R macierzą rozwiązań wyjściowego układu równań:

$$w''_n = w'_n$$

$$w''_{n-1} = w'_{n-1} - a'_{n-1,n} w''_n$$

$$w''_{n-2} = w'_{n-2} - a'_{n-2,n-1} w''_{n-1} - a'_{n-2,n} w''_n$$

...

$$w''_1 = w'_1 - a'_{12} w''_2 - a'_{13} w''_3 - \dots - a'_{1n} w''_n$$

Zastosowanie metody eliminacji Gaussa do odwracania macierzy

- ▶ Niech A będzie nieosobliwą macierzą kwadratową, zaś I macierzą jednostkową tego samego stopnia, co macierz A .
- ▶ Po zastosowaniu obu etapów metody eliminacji Gaussa do macierzy $[A|I]$ otrzymujemy macierz $[I|A^{-1}]$.

Metoda eliminacji Gaussa dla macierzy prostokątnych

Stosując metodę eliminacji Gaussa dla dowolnego liniowego układu równań możemy napotkać na następujące sytuacje:

1. wiersz samych zer (równanie tożsamościowe $0 = 0$),
2. dwa wiersze proporcjonalne (dwa równania zależne),
3. brak elementu niezerowego w kolejnej kolumnie (brak możliwości ustawienia elementu niezerowego na głównej przekątnej).

Metoda eliminacji Gaussa dla macierzy prostokątnych

Stosując metodę eliminacji Gaussa dla dowolnego układu równań liniowych możemy dodatkowo wykonywać następujące operacje:

1. skreślenie wiersza samych zer (stosujemy w sytuacji 1),
2. skreślenie jednego z dwóch wierszy proporcjonalnych (stosujemy w sytuacji 2),
3. zamiana miejscami dwóch kolumn przy jednoczesnej zamianie niewiadomych (stosujemy w sytuacji 3).

Rozwiązanie prostokątnego układu równań

Po zastosowaniu I etapu metody eliminacji Gaussa do macierzy $[A|B]$ otrzymujemy macierz następującej postaci:

$$M = \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & & z_1 \\ & & & & & & z_2 \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & z_r \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & z_{r+1} \end{array} \right],$$

gdzie A' jest macierzą trójkątną górną, zaś ostatni wiersz może nie wystąpić.

25 / 41

Rozwiązanie prostokątnego układu równań

- ▶ Jeżeli $z_{r+1} \neq 0$, to układ jest sprzeczny.
- ▶ Jeżeli $n = r$, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.
- ▶ Jeżeli ostatni wiersz w macierzy nie występuje oraz $r < n$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, przy czym r niewiadomych występujących w macierzy A' zależy od $n - r$ pozostałych (parametrów) występujących w macierzy P .

W przypadku obliczeń ręcznych poprzestajemy na tym etapie i wyznaczamy rozwiązanie z powyższej macierzy.

Przykład 3

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -6 \\ 3x_1 + 4x_3 - 10x_4 = -7 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases}$$

Przykład 3 – cd.

Zastosujemy metodę eliminacji Gaussa.

$$\begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 & -10 & -7 \\ -1 & 1 & -3 & 4 & 6 \end{bmatrix}
 \begin{array}{l}
 w_2 - 2w_1 \\
 w_3 - w_1 \\
 w_4 - 3w_1 \\
 w_5 + w_1
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & 8 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & -3 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \\
 w_2 \cdot (-\frac{1}{3})
 \end{array}
 \longrightarrow
 \end{array}$$

Przykład 3 – cd.

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -3 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & -3 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_3 + 3w_2 \\ w_4 + 3w_2 \\ w_5 - 2w_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{3} & \frac{13}{3} & \frac{13}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 \cdot \frac{1}{4}} \\
 & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{3} & \frac{13}{3} & \frac{13}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_4 - 3w_3 \\ w_5 + \frac{13}{3}w_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{us. } w_4, w_5}
 \end{aligned}$$

Przykład 3 – cd.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right].$$

Po tych przekształceniach otrzymujemy następujący, równoważny wyjściowemu, układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -1 \\ x_2 + \frac{5}{3}x_3 - \frac{8}{3}x_4 = \frac{1}{3} \\ x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

30 / 41

Przykład 3 – cd.

- ▶ Traktując $x_4 = \alpha$ jako parametr, obliczamy x_3 z ostatniego równania:
$$x_3 = \alpha - 1.$$
- ▶ Następnie obliczamy x_2 wstawiając $x_3 = \alpha - 1$ do drugiego równania:
$$x_2 = -\frac{5}{3}x_3 + \frac{8}{3}x_4 + \frac{1}{3} = -\frac{5}{3}(\alpha - 1) + \frac{8}{3}\alpha + \frac{1}{3} = \alpha + 2.$$
- ▶ Podobnie, podstawiając $x_2 = \alpha + 2$ oraz $x_3 = \alpha - 1$ do pierwszego równania, obliczamy $x_1 = 2\alpha - 1$.

Przykład 3 – cd.

- Rozwiązanie omawianego układu równań ma postać:
- $$\begin{cases} x_1 = 2\alpha - 1 \\ x_2 = \alpha + 2 \\ x_3 = \alpha - 1 \\ x_4 = \alpha \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$
- Oznacza to, że układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru.

Rozwiązanie prostokątnego układu równań

W przypadku, gdy układ jest rozwiązalny (nie występuje ostatni wiersz w macierzy M), po zastosowaniu II etapu eliminacji Gaussa do macierzy M otrzymujemy macierz M' postaci:

$$M' = \left[\begin{array}{c|c} I_{r \times r} & P'_{r \times (n-r)} \end{array} \right] \begin{bmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_r \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie prostokątnego układu równań

Wówczas rozwiązanie układu przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ \dots \\ z'_r \end{bmatrix} - P' \cdot \begin{bmatrix} y_{r+1} \\ y_{r+2} \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Minor, rzęd macierzy

Definicja

Minorem stopnia $k \in \mathbb{N}_+$ macierzy A nazywamy wyznacznik podmacierzy macierzy A utworzonej z elementów macierzy stojących na przecięciu dowolnie wybranych k kolumn i k wierszy.

Uwaga

Macierz wymiaru $m \times n$ ma dokładnie $\binom{m}{k} \binom{n}{k}$ minorów stopnia k , gdzie $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$.

35 / 41

Minor, rząd macierzy

Definicja

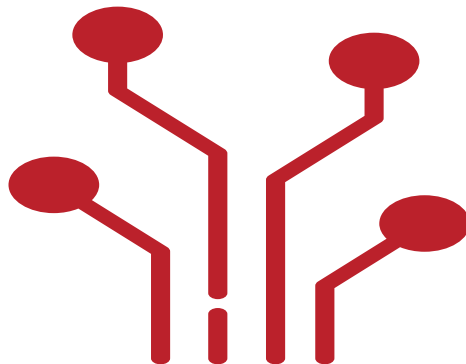
Rzędem macierzy nazywamy największy stopień jej niezerowego minora.

- ▶ Rząd macierzy A będziemy oznaczać symbolem $r(A)$.
- ▶ Przyjmujemy, że rząd macierzy zerowej jest równy 0.

Własności rzędu macierzy

- ▶ Rząd macierzy nieosobliwej jest równy jej stopniowi.
- ▶ $r(A^T) = r(A)$
- ▶ Rząd macierzy nie ulegnie zmianie, gdy:
 1. przestawimy dwa wiersze (dwie kolumny),
 2. wiersze (kolumny) pomnożymy przez liczby różne od 0,
 3. do danego wiersza (kolumny) dodamy kombinację liniową wierszy (kolumn) pozostałych.

Twierdzenie Kroneckera–Capellego



38 / 41

Definicja

Macierz rozszerzona układu równań jest to macierz powstała z macierzy głównej układu równań poprzez dopisanie do niej kolumny wyrazów wolnych.

Twierdzenie

(Twierdzenie Kroneckera–Capellego) Układ równań liniowych ma co najmniej jedno rozwiązanie, jeśli rząd $r(A)$ macierzy tego układu A jest równy rzędowi $r([A|B])$ macierzy rozszerzonej $[A|B]$, tzn. $r(A) = r([A|B])$.

- ▶ *Jeżeli $r(A) = r([A|B]) = r$ oraz $r = n$, gdzie n jest liczbą niewiadomych układu, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.*
- ▶ *Jeżeli $r(A) = r([A|B]) = r$ oraz $r < n$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów.*
- ▶ *Jeżeli $r(A) \neq r([A|B])$, to układ jest sprzeczny.*

40 / 41

Dziękuję za uwagę