

Fizyka

dr Maciej Czarnacki,
Wydział Matematyki i Informatyki Technicznej, PL

Plan prezentacji

- Rachunek wektorowy, elementy rachunku różniczkowego i całkowego, układ jednostek SI
- Kinematyka punktu materialnego
- Dynamika punktu materialnego: pęd, siła, praca, energia kinetyczna i potencjalna, zasady zachowania, moc
- Dynamika bryły sztywnej: moment pędu, moment siły, moment bezwładności
- Prawo powszechnego ciążenia, prawa Keplera



Plan prezentacji

- Sprężystość ciał stałych
- Drgania, oscylator harmoniczny
- Wahadło matematyczne i fizyczne
- Hydrostatyka i elementy dynamiki płynów
- Termodynamika: równanie stanu gazu doskonałego, przemiany gazowe, zasady termodynamiki, sprawność silnika Carno, przejścia fazowe
- Elektrostatyka, elektryczność, magnetyzm, fale elektromagnetyczne

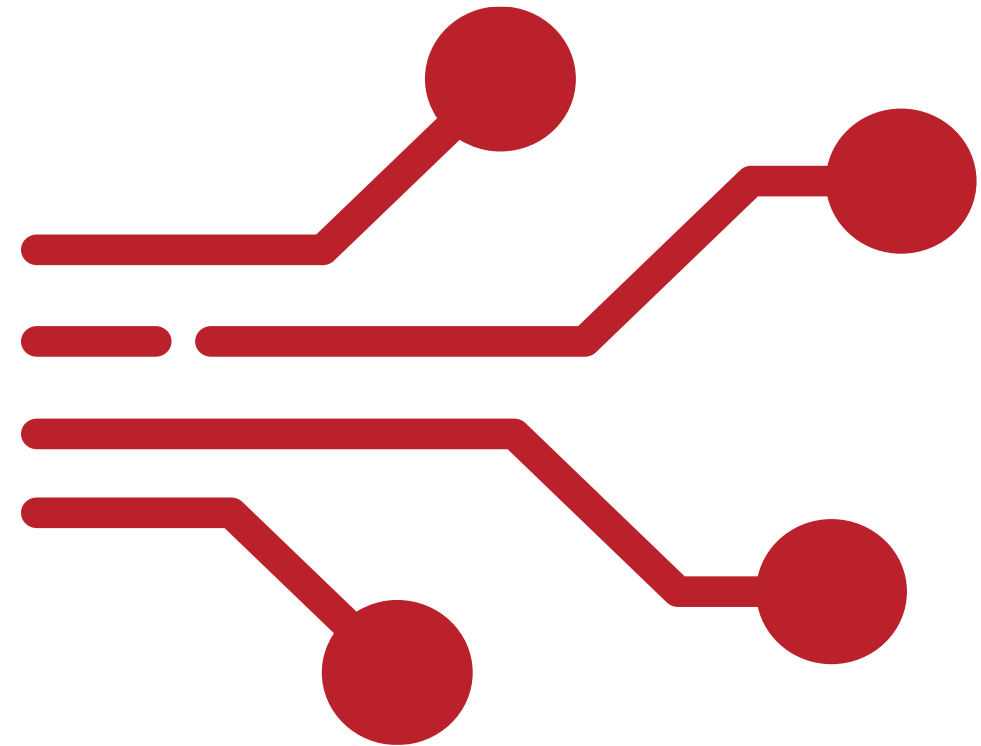


Plan prezentacji

- Optyka geometryczna i falowa
- Fizyka współczesna: fizyka atomowa i jądrowa, fizyka ciała stałego
- Elementy mechaniki kwantowej
- Pomiar i analiza danych pomiarowych
- Rola symulacji komputerowych w fizyce



Rachunek wektorowy, elementy rachunku różniczkowego i całkowego, układ jednostek SI



5

Wektory cz. I

Znacząca liczba wielkości w fizyce opisywanych jest jako wektory.

Wektor to obiekt matematyczny posiadający cech:

1. Wartość lub inaczej długość. Czasami nazywana modułem.
2. Kierunek (np. kierunek pionowy, poziomy).
3. Zwrot, mówi nam w którą stronę zwrócony jest wektor w ramach danego kierunku (lewo, prawo, góra, dół, przód, tył).

W notacji matematycznej wektor zapisujemy jako literkę ze strzałką u góry $\vec{F}$, bądź jako pogrubioną czcionką **F**.

Wektory cz. II

Wektory charakteryzują się współrzędnymi. Podstawowy zapis wektora w przestrzeni 3-wymiarowej w układzie kartezjańskim przedstawiony jest jako zestaw trzech liczb czyli współrzędnych wektora. Poniżej widzimy dwa rodzaje zapisu, jeden za pomocą współrzędnych punktów początku i końca wektora

$$\vec{a} = (a_x^k - a_x^p, a_y^k - a_y^p, a_z^k - a_z^p)$$

Oraz drugi jako wektor przesunięty tak by jego punktem zaczepienia był punkt początku układu współrzędnych

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

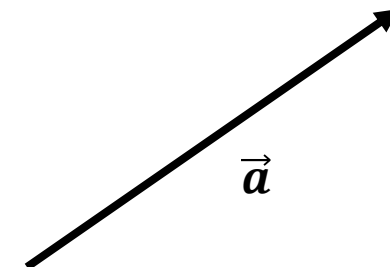
7

Wektory cz. III

Wektor można zaprezentować na rysunku jako strzałka, której początek będzie punktem zaczepienia wektora, grot strzałki wskazuje koniec wektora, długość strzałki jest jego wartością (modułem) często oznaczanym z pomocą symbolu wartości bezwzględnej. Poniżej przedstawione są wzory na obliczanie długości wektora z jego współrzędnych (określonego jako punkt początkowy i końcowy oraz przesuniętego do początku układu współrzędnych, gdzie punkt początkowy ma współrzędne $A_p = (a_x^p, a_y^p)$, a punkt końcowy $A_k = (a_x^k, a_y^k)$)

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_x^k - a_x^p)^2 + (a_y^k - a_y^p)^2 + (a_z^k - a_z^p)^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$



Wektory cz. IV

Na wektorach możemy wykonywać następujące działania:

- Dodawanie i odejmowanie wektorów,
- Mnożenie przez liczbę,
- Mnożenie dwóch wektorów skalarnie,
- Mnożenie dwóch wektorów wektorowo.

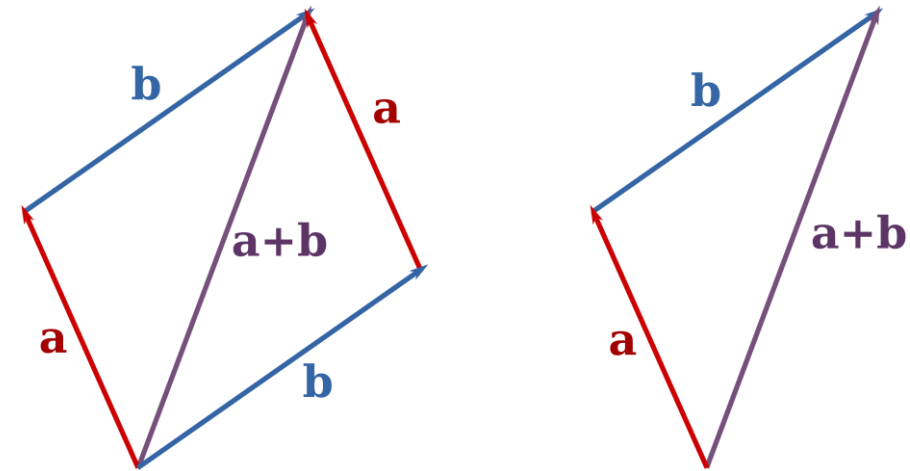
Wektory cz. V

Dodawanie wektorów:

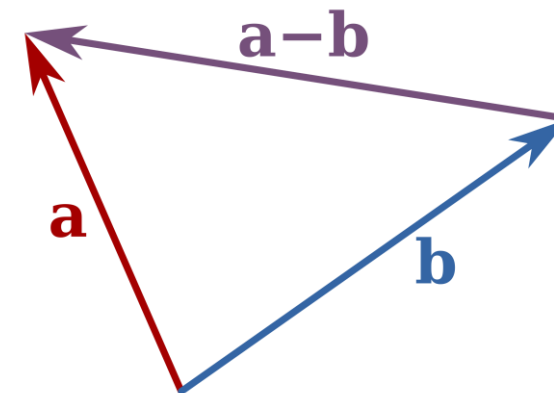
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y)$$

Odejmowanie wektorów:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y)$$



Rys. 1. Dodawanie wektorów



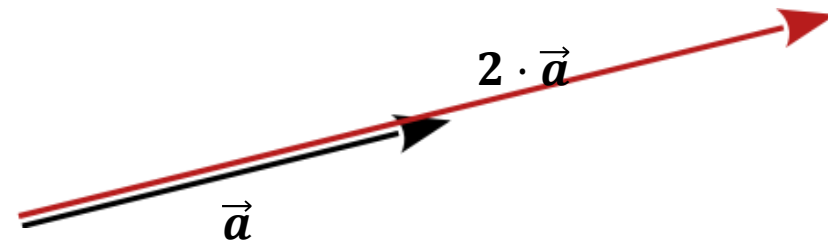
Rys. 2. Odejmowanie wektorów

Wektory cz. VI

Mnożenie przez skalar.

Każdą współrzędną wektora mnożymy przez liczbę (skalar).

$$r\vec{a} = (ra_x, ra_y)$$



Rys. 3. Mnożenie wektora przez liczbę.

Wektory cz. VII

Iloczyn skalarny wektorów – mnożymy przez siebie odpowiednie współrzędne obydwu wektorów (współrzędna x wektora a razy współrzędna x wektora b i tak dalej).

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$

Wynikiem iloczynu skalarnego jest liczba!

Wektory cz. VIII

Istota Iloczynu Skalarnego

W praktyce wielkość ta określa stopień, w jakim oba wektory są ze sobą zsynchronizowane w przestrzeni, czyli jak bardzo "skierowane są w tę samą stronę". Geometrycznie iloczyn skalarny reprezentuje długość rzutu prostokątnego jednego wektora na kierunek wyznaczony przez drugi wektor, przemnożoną przez długość tego drugiego wektora. Jeśli wyobrazimy sobie, że jeden wektor rzuca cień na drugi pod kątem prostym, to iloczyn skalarny jest miarą długości tego cienia skorygowaną o rozmiar samej osi, na którą ten cień pada.

13

Wektory cz. IX

Istota Iloczynu Skalarnego

Interpretacja wyniku iloczynu skalarnego opiera się głównie na analizie jego znaku, co pozwala natychmiast ocenić wzajemne ułożenie wektorów bez konieczności dokładnego liczenia kąta między nimi. Dodatni wynik oznacza, że oba wektory współdziałają, tworząc kąt ostry i wskazując podobny kierunek. Wynik ujemny mówi nam, że wektory w pewnym sensie przeciwdziałają sobie, tworząc kąt rozwarty i zwroty skierowane przeciwnie.

14

Wektory cz. X

Istota Iloczynu Skalarnego

Szczególnym i niezwykle ważnym w fizyce przypadkiem jest sytuacja, gdy iloczyn skalarny wynosi dokładnie zero. Oznacza to, że wektory są względem siebie prostopadłe (ortogonalne) – żaden z nich nie ma najmniejszego wkładu w kierunku drugiego, przez co są od siebie całkowicie niezależne. Klasycznym fizycznym przykładem tak zdefiniowanej wielkości jest praca mechaniczna, gdzie ostateczna energia zależy wyłącznie od tej składowej siły, która pokrywa się z kierunkiem ruchu ciała.

15

Wektory cz. XI

Wersor, nazywany również wektorem jednostkowym, to specyficzny rodzaj wektora, którego długość wynosi dokładnie jeden. Ze względu na tę unikalną właściwość, wersory nie służą do określania rozmiaru czy skali danej wielkości fizycznej, lecz pełnią funkcję czysto kierunkową – ich jedynym zadaniem jest wskazanie konkretnego kierunku i zwrotu w przestrzeni.

16

Wektory cz. XII

W fizyce i geometrii wektory stanowią fundament opisu układów współrzędnych. Najpopularniejszym przykładem są wektory osi kartezjańskich, oznaczane zazwyczaj jako $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (lub e_x, e_y, e_z), które wyznaczają kierunki odpowiednio osi X, Y i Z. Dzięki nim dowolny, skomplikowany wektor można zapisać jako sumę jego składowych przemnożonych przez te właśnie jednostkowe drogowskazy, co ogromnie upraszcza strukturę matematyczną równań ruchu czy pól fizycznych.

17

Wektory cz. XIII

Dowolny wektor w trójwymiarowym układzie kartezjańskim możemy zapisać jako kombinację liniową wersorów:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

Gdzie wektory : $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$

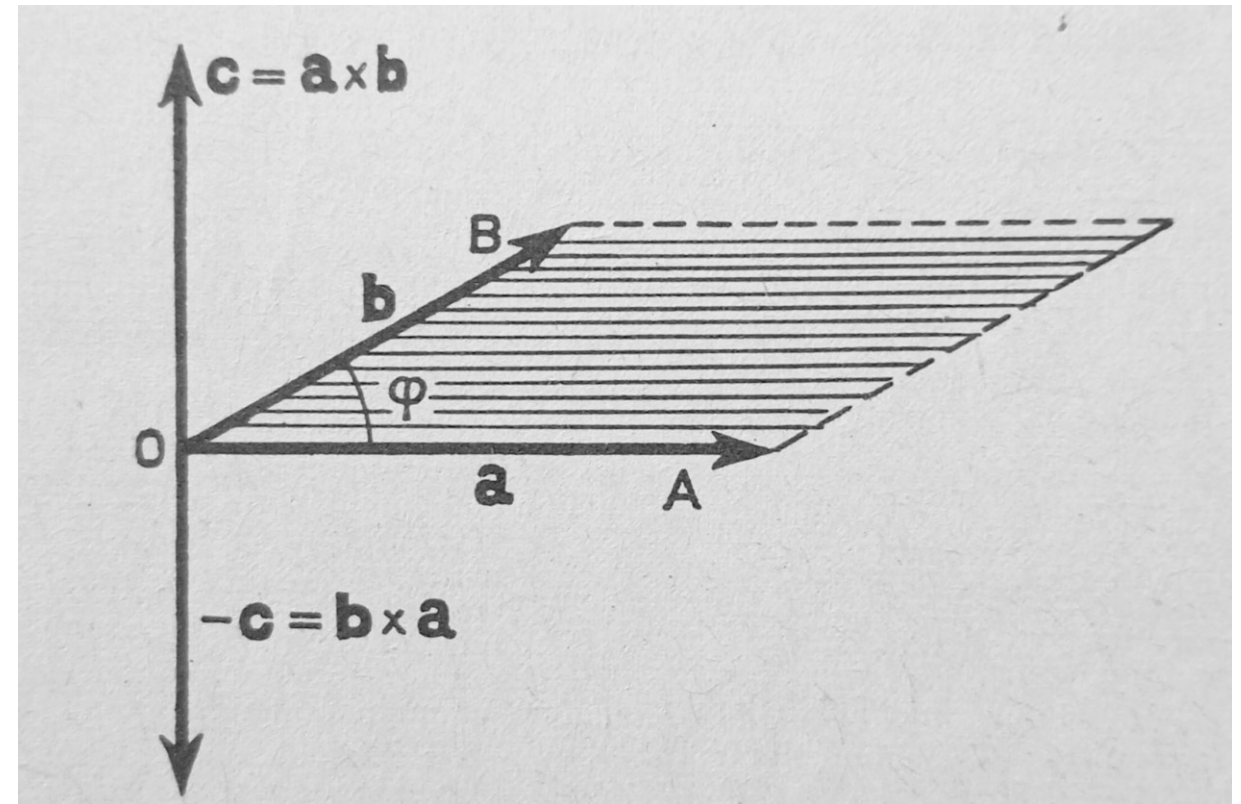
$$\vec{i} = (1,0,0), \quad \vec{j} = (0,1,0), \quad \vec{k} = (0,0,1)$$

Zapis wersorowy wektorów będzie potrzebny dalej do obliczania iloczynu wektorowego.

Wektory cz. XIV

Iloczyn wektorowy

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów to operacja, która – w przeciwieństwie do iloczynu skalarnego – nie redukuje układu do pojedynczej liczby, lecz generuje całkowicie nowy wektor. Wynik ten posiada trzy ściśle zdefiniowane cechy: określoną wartość (długość), kierunek oraz zwrot w przestrzeni, co czyni go idealnym narzędziem do opisu zjawisk trójwymiarowych, zwłaszcza tych związanych z obrotami.



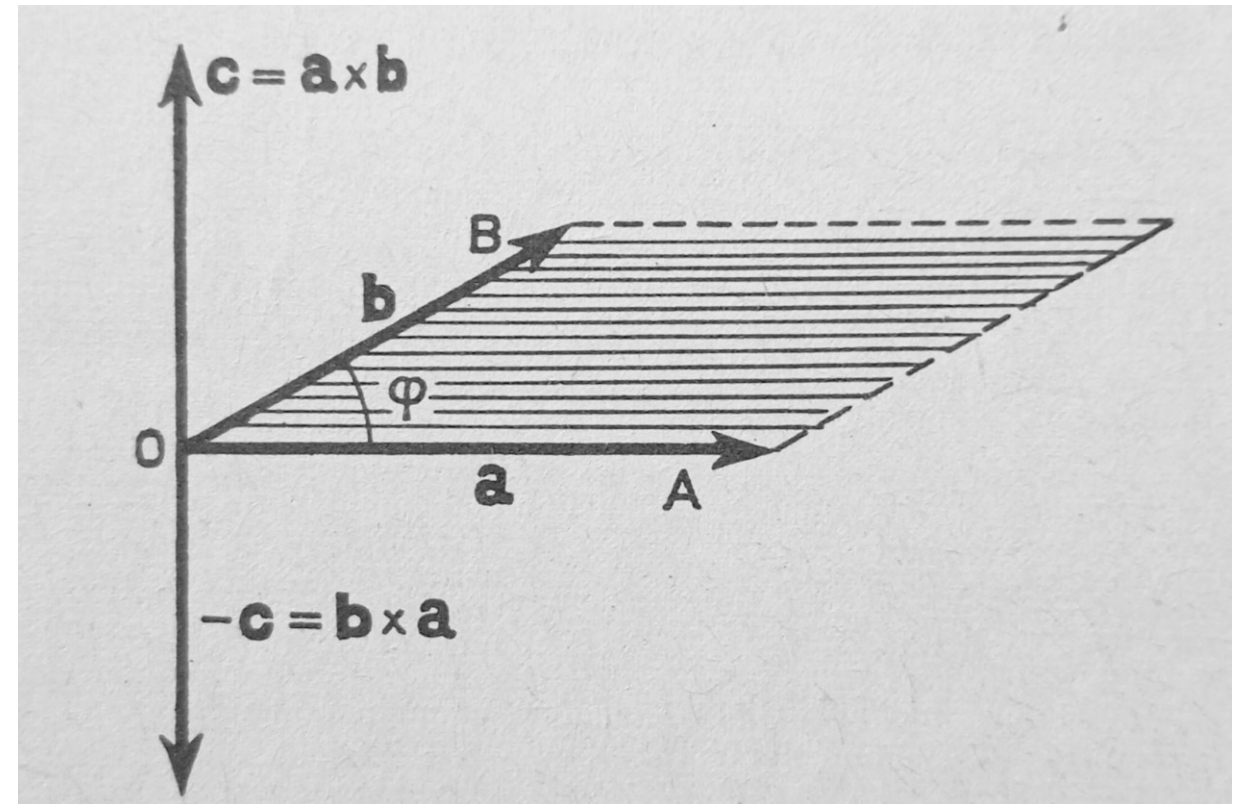
Jeżewski M., Fizyka, Wydawnictwo PWN 1970.

19

Wektory cz. XV

Pod względem geometrycznym, wartość (długość) nowego wektora jest równa polu powierzchni równoległoboku rozpiętego przez oba wektory wyjściowe. Oznacza to, że iloczyn wektorowy osiąga swoją maksymalną wartość, gdy wektory są względem siebie prostopadłe. Z kolei dla wektorów równoległych (lub antyrównoległych) iloczyn wektorowy wynosi dokładnie zero, ponieważ nie da się z nich rozpiąć żadnej powierzchni.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach:
FUNDUSZE EUROPEJSKIE DLA ROZWOJU SPOŁECZNEGO 2021-2027 (FERS)
"POLLUB z nami nowoczesne technologie" FERS.01.05-IP.08-0319/23-00



Jeżewski M., Fizyka, Wydawnictwo PWN 1970.

20



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

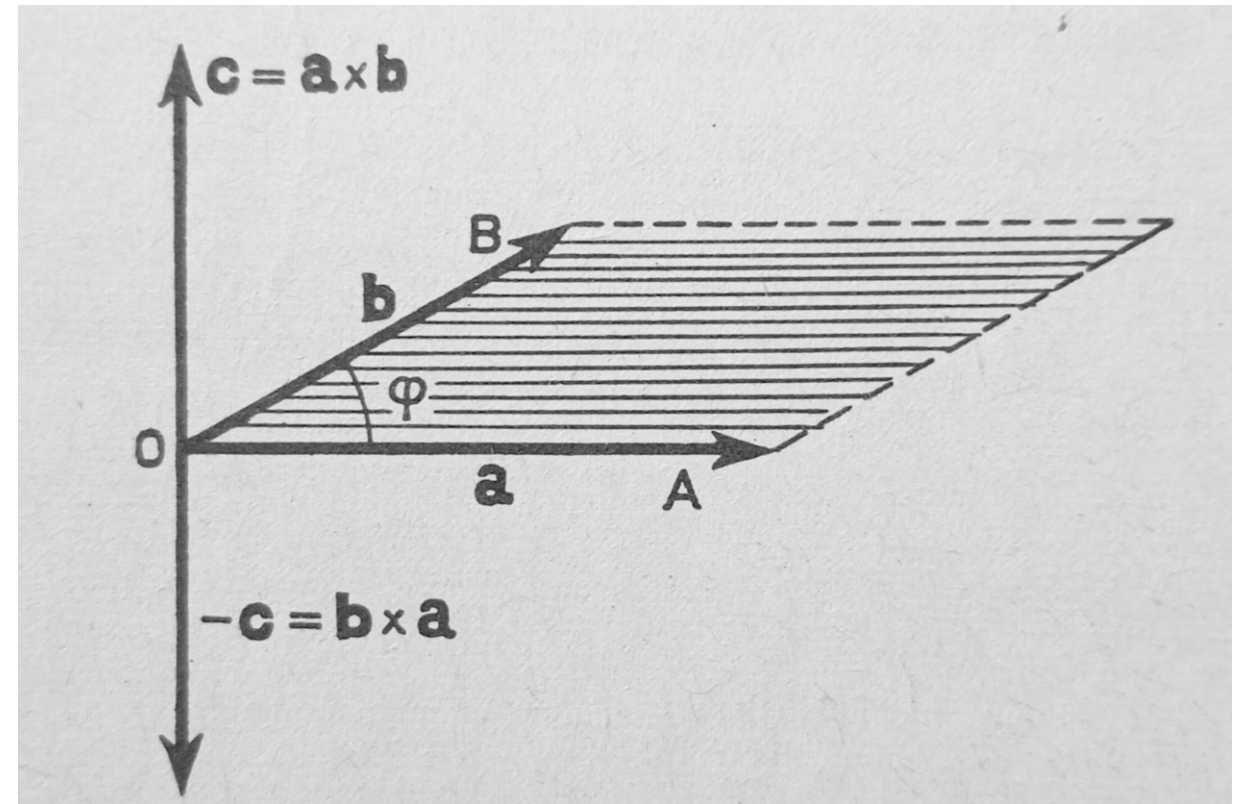
Dofinansowane przez
Unię Europejską



Wektory cz. XVI

Kierunek powstałego wektora jest zawsze ortogonalny (prostopadły) do płaszczyzny wyznaczonej przez dwa wektory wejściowe. Oznacza to, że wynikowa strzałka jednoznacznie wskazuje oś normalną tej płaszczyzny.

Zwrot nowego wektora (czyli to, w którą stronę osi jest zwrócony) ustala się za pomocą tzw. reguły prawej dłoni (lub śruby prawoskrętnej). Jeśli zginając palce prawej dłoni, wykonamy ruch od pierwszego wektora do drugiego po krótszym łuku, to odchylony kciuk wskaże zwrot wektora wynikowego. Konsekwencją tej geometrii jest fakt, że iloczyn wektorowy jest antyprzemienny – zmiana kolejności mnożenia wektorów nie zmienia wprowadzone wartości ani kierunku wyniku, ale odwraca jego zwrot w przestrzeni na przeciwny.



Jeżewski M., Fizyka, Wydawnictwo PWN 1970.

21

Wektory cz. XVII

Iloczyn wektorowy

Przykładowy przepis na obliczenie iloczynu wektorowego dwóch wektorów $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ w układzie kartezjańskim. Jest to metoda wyznacznikowa, pokazująca zastosowanie w rachunkach wersorów.

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \\ &= a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} + a_x b_y \vec{k} - a_y b_x \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_z b_y \vec{i} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}\end{aligned}$$

22

Wektory cz. XVIII

Pewne własności iloczynu wektorowego wektorów i wersorów

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \quad \vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \dots$$

Wektory cz. XIX

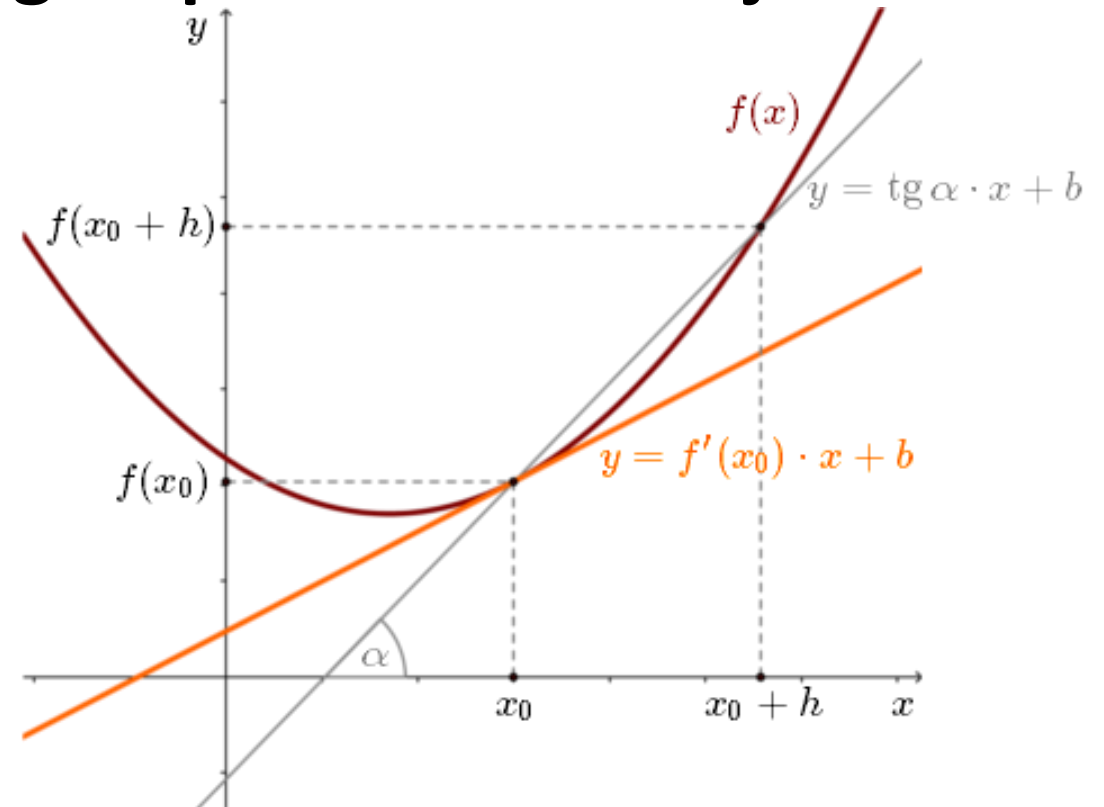
Iloczyn wektorowy - podsumowanie

W fizyce iloczyn wektorowy jest niezastąpiony wszędzie tam, gdzie kierunek przyczyny różni się od kierunku skutku. Stanowi on podstawę matematyczną do definiowania momentu siły, momentu pędu (krętu) oraz opisu prędkości liniowej w ruchu obrotowym. Jest również kluczowy w elektrodynamice, gdzie za jego pomocą definiuje się siłę Lorentza działającą na ładunek poruszający się w polu magnetycznym.

24

Elementy rachunku różniczkowego – pochodna funkcji cz. I

Pochodna funkcji w punkcie to jedno z najbardziej fundamentalnych pojęć analizy matematycznej, które w prosty sposób mierzy lokalną dynamikę zmian. Mówiąc najprościej, informuje nas ona o tym, jak szybko i w jakim kierunku zmieniają się wartości funkcji w konkretnym, wybranym miejscu, gdy dokonujemy minimalnej zmiany jej argumentu. Pozwala nam to porzucić analizę globalną na rzecz precyzyjnego opisu zachowania funkcji w skali mikro.

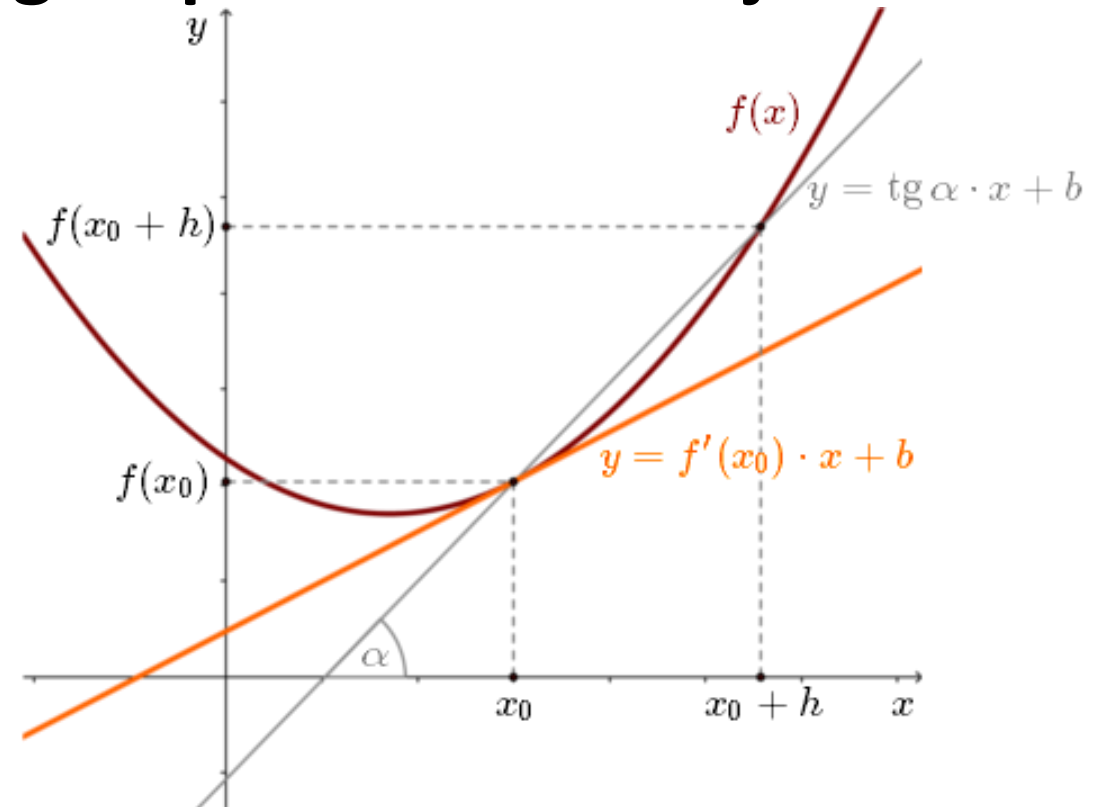


<https://www.matemaks.pl/pochodne.html>

25

Elementy rachunku różniczkowego – pochodna funkcji cz. II

Pod względem geometrycznym pochodna w punkcie określa dokładne nachylenie wykresu funkcji w tym konkretnym miejscu. Jeśli wyobrazimy sobie gładką krzywą, to pochodna jest równa współczynnikowi kierunkowemu prostej stycznej do tej krzywej w wybranym punkcie. Matematycznie proces ten polega na badaniu linii łączącej dwa bliskie punkty wykresu, czyli siecznej. Gdy odległość między tymi punktami zmniejsza się do zera, sieczna przekształca się w styczną, która idealnie odzwierciedla nachylenie wykresu w tym jednym, konkretnym punkcie.



<https://www.matemaks.pl/pochodne.html>

26

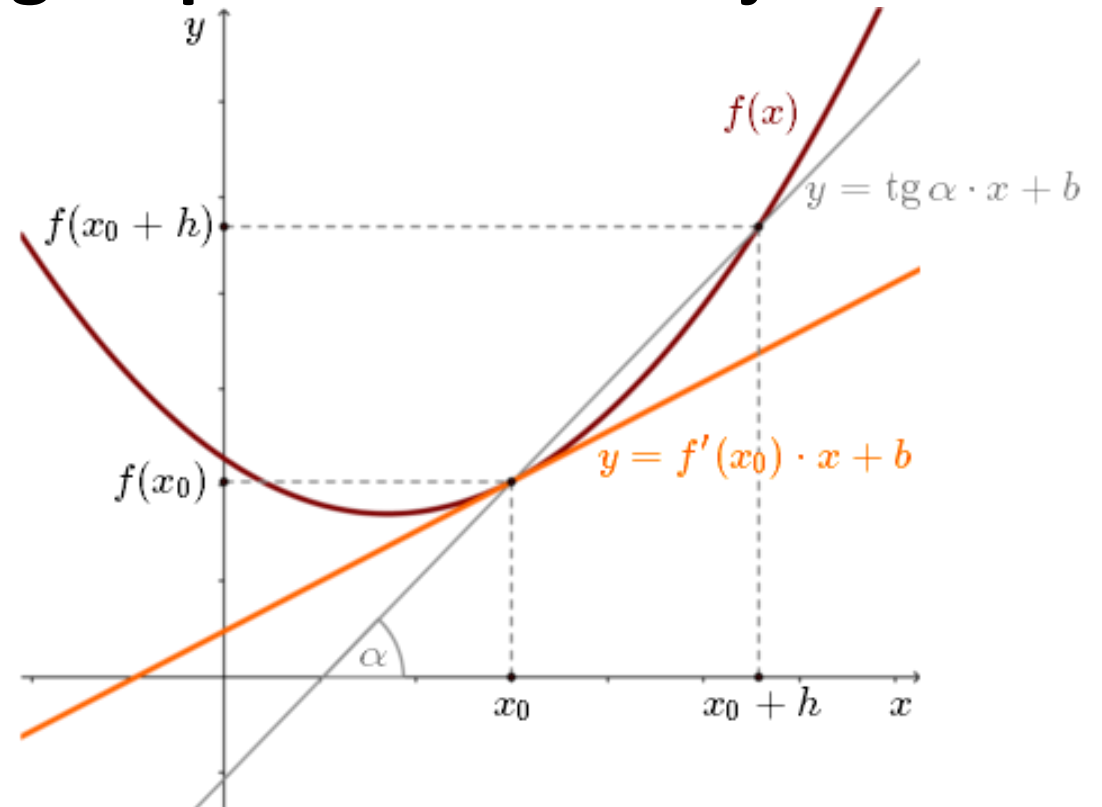
Elementy rachunku różniczkowego – pochodna funkcji cz. III

Pochodną funkcji w punkcie definiujemy następująco:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

gdzie h – przyrost argumentu funkcji w otoczeniu punktu x_0 .

Na wykresie obok przedstawiona jest interpretacja geometryczna pochodnej w punkcie.



<https://www.matemaks.pl/pochodne.html>

27

Elementy rachunku różniczkowego – pochodna funkcji cz. IV

Własności pochodnej funkcji

$$(af)'(x) = af'(x)$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \text{ gdzie } g(x) \neq 0$$

$$f'(x) = h'(g(x))g'(x) \text{ gdzie } f(x) = h(g(x))$$

28

Elementy rachunku różniczkowego – pochodna funkcji cz. V

Możliwe notacje pochodnych w matematyce i fizyce

$f'(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$ – pierwsza pochodna

$f''(x)$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ – druga pochodna

Pochodna po czasie funkcji położenia $x(t)$

$\frac{dx(t)}{dt}$ albo $\dot{x}$ – pierwsza pochodna położenia po czasie

$\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ albo $\ddot{x}$ – druga pochodna położenia po czasie

29

Elementy rachunku różniczkowego – pochodna funkcji cz. VI

Postacie pierwszych pochodnych kilku wybranych funkcji

$$f(x) = a$$

$$f'(x) = 0$$

$$f(x) = a \cdot x^m$$

$$f'(x) = a \cdot m \cdot x^{(m-1)}$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x}$$

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

30

Elementy rachunku różniczkowego – pochodna funkcji cz. VII

W fizyce i praktyce inżynierskiej pochodna w punkcie reprezentuje chwilowe tempo zmian danej wielkości. Klasycznym i najbardziej intuicyjnym przykładem jest ruch: jeśli funkcja opisuje położenie ciała w zależności od czasu, to jej pochodna w konkretnej sekundzie nie jest średnią prędkością z całej trasy, ale dokładnie tą wartością, którą w tym konkretnym ułamku sekundy wskazuje idealnie skalibrowany prędkościomierz. Analogicznie, pochodna ładunku elektrycznego po czasie w danym momencie da nam chwilowe natężenie prądu. Zrozumienie pochodnej w punkcie pozwala nam zatem uwolnić się od topornych uśrednień i precyzyjnie opisywać stany chwilowe w dynamicznie zmieniającym się świecie.

31

Elementy rachunku różniczkowego – pochodna cząstkowa cz. I

Pochodna cząstkowa funkcji wielu zmiennych to miara chwilowego tempa zmian wartości tej funkcji względem tylko jednej, wybranej zmiennej niezależnej, przy jednoczesnym założeniu, że wszystkie pozostałe zmienne pozostają zamrożone (są traktowane jako stałe). Geometrycznie, jeśli funkcja dwóch zmiennych definiuje trójwymiarową powierzchnię w przestrzeni, to jej pochodna cząstkowa w danym punkcie określa współczynnik kierunkowy prostej stycznej do linii wyciętej z tej powierzchni przez płaszczyznę równoległą do osi wybranej zmiennej. Operacja ta sprowadza analizę wielowymiarową do klasycznego różniczkowania funkcji jednej zmiennej w określonym przekroju.

Funkcją, dla której obliczamy pochodne cząstkowe jest postaci $f(x,y,z)$.

32

Elementy rachunku różniczkowego – pochodna cząstkowa cz. II

Przykład obliczania pochodnych cząstkowych funkcji wielu zmiennych

$$f(x, y) = 3x^2y + 5y^3$$

Dla powyższej funkcji obliczamy dwie pochodne cząstkowe, dla każdej zmiennej niezależnie.

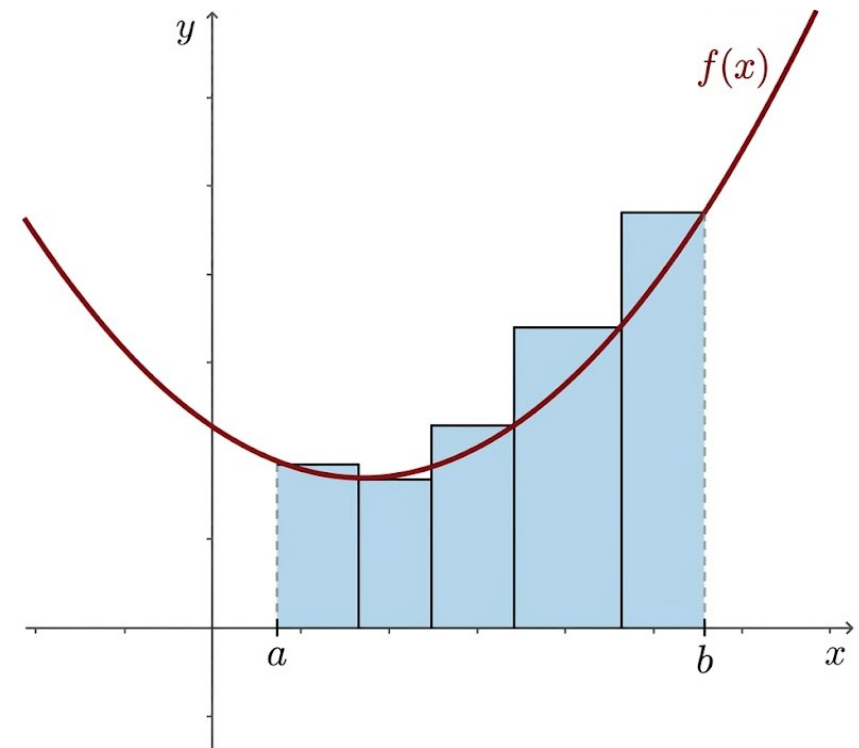
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y) + \frac{\partial}{\partial x}(5y^3) = 6xy + 0 = 6xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(5y^3) = 3x^2 + 15y^2$$

33

Elementy rachunku całkowego cz. I

Rozważmy przykład, mamy daną funkcję $f(x)$, dla której chcemy obliczyć pole powierzchni zawartej pod wykresem tej funkcji w przedziale od a do b . Naturalnym rozwiązaniem tego problemu jest podział rozważanego obszaru na małe prostokątne fragmenty, dla których łatwo policzyć pole powierzchni. Suma pól tych prostokątów przybliży pole zawarte pod krzywą $f(x)$. Jeżeli podzielimy obszar na coraz węższe prostokąty (zwiększymy liczbę podziału i zmniejszymy długość podstawy prostokątów) to dokładność oszacowania wartości pola pod krzywą $f(x)$ będzie szacowana z coraz większą dokładnością.



34

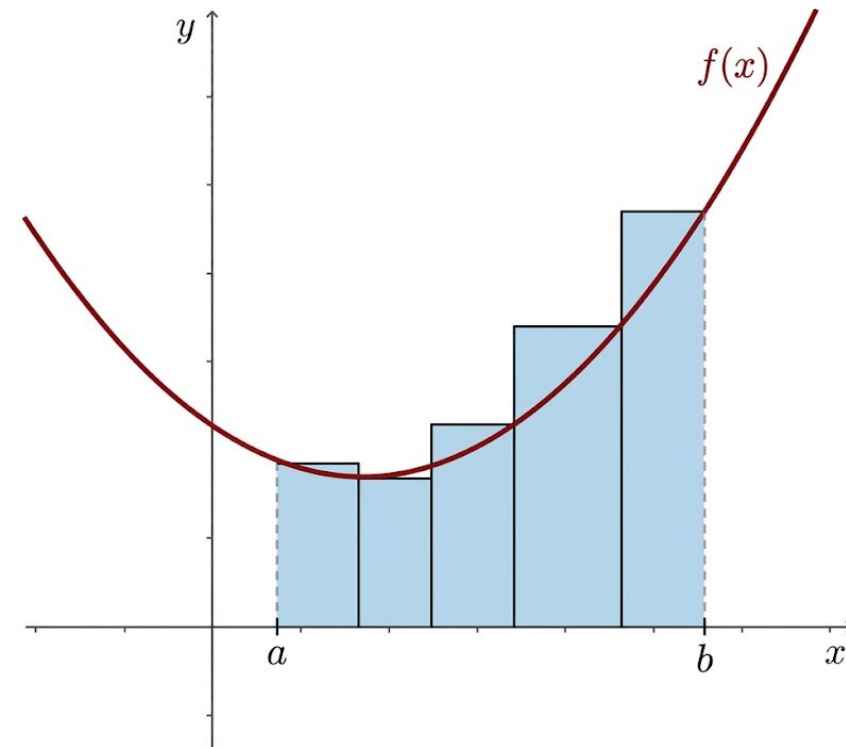
Elementy rachunku całkowego cz. II

Operację tę możemy zapisać matematycznie w postaci równania

$$S \approx \sum_{i=1}^N f(x) \Delta x_i$$

gdzie S – jest szukany polem powierzchni, a Δx_i - jest długością podstawy rozważanych prostokątów. Kiedy w granicy będziemy zmierzać do coraz mniejszych wartości Δx_i idąc aż do wartości zero otrzymamy dokładną wartość pola powierzchni pod krzywą, która stanowi całkę funkcji $f(x)$ postaci

$$S = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(x) \Delta x_i$$



35

Elementy rachunku całkowego cz. III

Poniżej kilka wybranych całek elementarnych

$$\int 0 dx = C$$

$$\int a dx = ax + C$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

36

Elementy rachunku całkowego cz. IV

W fizyce i praktyce inżynierskiej całka jest niezastąpionym narzędziem do akumulacji ciągłych zmiennych. Proces ten, będący odwróceniem różniczkowania, pozwala nam odtworzyć pełną historię układu, jeśli znamy jedynie tempo jego zmian w każdej chwili. Klasycznym przykładem jest wyznaczanie pozycji, jeśli znamy chwilową prędkość ciała w każdym ułamku sekundy, która sama w sobie może się nieustannie zmieniać, to całkując tę prędkość po czasie, obliczymy całkowity dystans, jaki to ciało pokonało. W analogiczny sposób, całkując zmienne w czasie natężenie prądu, dowiemy się, jaki całkowity ładunek przepłynął przez obwód, a całkując zmienną siłę na danym dystansie, wyznaczymy całkowitą pracę wykonaną nad układem. Całka pozwala nam zatem zsumować nieskończenie wiele maleńkich efektów w jeden mierzalny, makroskopowy rezultat.

37

Układ jednostek SI cz. I

Międzynarodowy Układ Jednostek Miar (SI) to znormalizowany, spójny i współczesny system metryczny, który stanowi absolutny, globalny standard w nauce, inżynierii oraz codziennym życiu. Został oficjalnie zatwierdzony w 1960 roku jako ewolucja wcześniejszych systemów i opiera się na siedmiu ściśle zdefiniowanych jednostkach podstawowych: metrze, kilogramie, sekundzie, amperze, kelwinie, molu oraz kandeli.

38

Układ jednostek SI cz. II

Z tej fundamentalnej bazy, za pomocą prostych, liniowych relacji matematycznych, wyprowadza się wszystkie inne jednostki pochodne niezbędne do opisu rzeczywistości fizycznej, takie jak dżule, niutony czy wolty. Największą zaletą układu SI jest jego uniwersalność oraz to, że po gruntownej redefinicji z 2019 roku wszystkie jego jednostki zostały oparte wyłącznie na niezmiennych stałych fizycznych wszechświata (takich jak prędkość światła w próżni czy stała Plancka). Całkowicie wyeliminowało to konieczność stosowania nietrwałych wzorców materialnych i zapewniło naukowcom na całym świecie precyzyjny, odporny na upływ czasu język pomiarowy.

39

Układ jednostek SI cz. III

Układ SI opiera się na siedmiu wzajemnie niezależnych jednostkach podstawowych. Od czasu historycznej redefinicji w 2019 roku, żadna z nich nie zależy już od fizycznych artefaktów (jak dawny metalowy wzorzec kilograma z Sèvres). Wszystkie są zdefiniowane poprzez przypisanie ścisłych, niezmiennych wartości fundamentalnym stałym fizycznym wszechświata.

Sekunda (s) – Historycznie oparta na obrocie Ziemi wokół własnej osi, obecnie definiowana zjawiskami kwantowymi. Jest wyznaczana poprzez ustalenie dokładnej wartości liczbowej częstotliwości promieniowania (przejścia między dwoma poziomami energetycznymi) w atomie cezu-133. To najbardziej precyzyjnie zdefiniowana jednostka w całym układzie.

40

Układ jednostek SI cz. IV

Metr (m) – Zdefiniowany na podstawie definicji sekundy oraz prędkości światła w próżni. Metr to po prostu odległość, jaką światło pokonuje w próżni w czasie ułamka sekundy, co wynika z dokładnej wartości stałej c .

Kilogram (kg) – Jednostka, która przeszła niedawno największą rewolucję. Przestała być masą fizycznego walca, a stała się wielkością ściśle powiązaną ze stałą Plancka h . Łączy to masę z energią za pomocą fundamentalnych praw fizyki kwantowej (wymaga to również użycia definicji metra i sekundy).

41

Układ jednostek SI cz. VI

Amper (A) – natężenie prądu elektrycznego: Definiowany poprzez ustalenie dokładnej wartości ładunku elementarnego e (ładunku pojedynczego elektronu lub protonu). Zastąpiło to dawną, teoretyczną i niemożliwą do idealnego odtworzenia w laboratorium definicję opartą na sile przyciągania dwóch nieskończenie długich przewodników.

Kelwin (K) – temperatura termodynamiczna: Jej wielkość określa się za pomocą stałej Boltzmann k , która bezpośrednio wiąże makroskopową temperaturę z energią kinetyczną cząsteczek na poziomie mikroskopowym. Skala Kelwina zaczyna się od zera bezwzględnego, czyli teoretycznego stanu, w którym ustaje ruch cieplny materii.

42

Układ jednostek SI cz. VII

Mol (mol) – liczność materii (ilość substancji): Definicja mola opiera się na stałej Avogadra N_A . Mol zawiera dokładnie określoną, gigantyczną liczbę obiektów elementarnych (atomów, cząsteczek, jonów lub elektronów), co pozwala na precyzyjne przeliczanie masy substancji na liczbę jej cząstek.

Kandela (cd) – światłość: Jedyna jednostka podstawowa związana z ludzką percepcją zmysłową. Opisuje intensywność świecenia źródła światła, ale z uwzględnieniem tego, jak czułe jest ludzkie oko na różne barwy. Definiuje się ją na podstawie fotometrycznej stałej skuteczności świetlnej K_{cd} dla promieniowania o konkretnej częstotliwości (najlepiej widzialne światło zielono-żółte).

43

Układ jednostek SI – jednostki pochodne cz. I

Jednostki pochodne międzynarodowego układu miar stanowią logiczne rozwinięcie siedmiu jednostek podstawowych i służą do ilościowego opisu bardziej złożonych wielkości fizycznych. Powstają one w wyniku czysto algebraicznych operacji mnożenia i dzielenia potęg jednostek bazowych, co bezpośrednio odzwierciedla relacje i prawa rządzące światem fizycznym. Wiele z tych jednostek, ze względu na ich powszechność w nauce i technice, otrzymało własne, krótkie nazwy oraz symbole, które najczęściej upamiętniają nazwiska wybitnych uczonych.

44

Układ jednostek SI – jednostki pochodne cz. II

W obszarze mechaniki klasycznej strukturę jednostek pochodnych idealnie obrazuje ewolucja pojęć od prostej kinematyki do dynamiki. Punktem wyjścia są relacje przestrzenno-czasowe, takie jak prędkość wyrażana w metrach na sekundę (m/s) oraz przyspieszenie mierzone w metrach na sekundę do kwadratu (m/s^2). Gdy połączymy ruch z masą, druga zasada dynamiki pozwala zdefiniować jednostkę siły – niuton (N), który w strukturze podstawowej odpowiada kilogramowi pomnożonemu przez metr i podzielonemu przez sekundę do kwadratu ($\text{kg}\cdot\text{m/s}^2$). Idąc dalej, praca i energia, czyli siła działająca na określonej drodze, definiują dżul (J), będący niutonometrem, natomiast tempo przekazywania tej energii wprowadza wat (W) jako dżul na sekundę, co w jednostkach bazowych redukuje się do postaci $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3$.

45

Układ jednostek SI – jednostki pochodne cz. III

Kilka przykładów:

Ciśnienie (Paskal – Pa): Wynika bezpośrednio ze wzoru definicyjnego, gdzie ciśnienie to siła działająca na powierzchnię ($p = F / S$). Podstawiając jednostki, otrzymujemy niuton na metr kwadratowy (N/m^2). Jeśli chcemy rozpisać paskal wyłącznie za pomocą jednostek podstawowych, rozbijamy niutona ($kg \cdot m/s^2$) i po skróceniu metrów otrzymujemy $kg / (m \cdot s^2)$.

Ładunek elektryczny (Kulomb – C): Wyznacza się go z definicji natężenia prądu, które jest ilością ładunku przepływającą w danym czasie ($I = Q / t$, czyli $Q = I \cdot t$). Ponieważ amper (A) jest jednostką podstawową, a czas mierzymy w sekundach (s), kulomb jest po prostu iloczynem tych dwóch wartości: $A \cdot s$.

46

Układ jednostek SI – jednostki pochodne cz. IV

Kilka przykładów:

Napięcie elektryczne (Wolt – V): Można je zdefiniować poprzez pracę potrzebną do przeniesienia ładunku ($U = W / Q$). Pracę wyrażamy w dżulach (J), a ładunek w kulombach (C), co daje dżul na kulomb (J/C).

Rozbijając to dalej na jednostki bazowe: dżul to $\text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2$, a kulomb to $\text{A} \cdot \text{s}$, co po podstawieniu daje ostateczną strukturę wolta: $\text{kg} \cdot \text{m}^2 / (\text{A} \cdot \text{s}^3)$.

Opór elektryczny (Ohm): Wyprowadza się go bezpośrednio z prawa Ohma ($R = U / I$). Stosunek napięcia do natężenia prądu daje wolt na amper (V/A). Wykorzystując wcześniejsze rozbiecie wolta, otrzymujemy pełny zapis oma w jednostkach podstawowych: $\text{kg} \cdot \text{m}^2 / (\text{A}^2 \cdot \text{s}^3)$.

47

Liczby w fizyce

W fizyce posługujemy się liczbami do precyzyjnego opisu wielkości przyrodniczych. Aby wynik pomiaru lub obliczeń miał sens fizyczny, musi zawsze składać się z dwóch nierozdzielnych elementów: wartości liczbowej oraz odpowiedniej jednostki. Przykładowo, długość możemy zapisać jako $l = 1,52 \text{ cm}$, przyspieszenie ziemskie jako $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, a ładunek elementarny elektronu jako $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Ponieważ fizyka bada zjawiska w skrajnie różnych skalach, liczby te mogą przyjmować wartości niezwykle małe (jak rozmiary atomów rzędu 10^{-10} m) lub niewyobrażalnie duże (jak masa Ziemi wynosząca około $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$). Z tego względu, aby zachować czytelność i uniknąć pomyłek w zerach, w fizyce powszechnie stosuje się przedrostki układu SI oraz zapis wykładniczy.

48

Zapis wykładniczy (naukowy)

Notacja wykładnicza pozwala na eleganckie i zwięzłe przedstawienie każdej liczby w postaci:

$$a \cdot 10^n$$

W tym zapisie pierwsza część, nazywana mantysą a musi być liczbą z przedziału $1 \leq a < 10$.

Z kolei wykładnik potęgi n musi być liczbą całkowitą $n \in \mathbb{Z}$ i to on wprost określa rząd wielkości analizowanego zjawiska.

Posługiwanie się zapisem naukowym niesie za sobą dodatkową korzyść – drastycznie ułatwia obliczenia arytmetyczne. Dzięki niemu mnożenie i dzielenie skrajnie dużych lub małych liczb sprowadza się do zastosowania prostych reguł działań na potęgach o podstawie dziesięć:

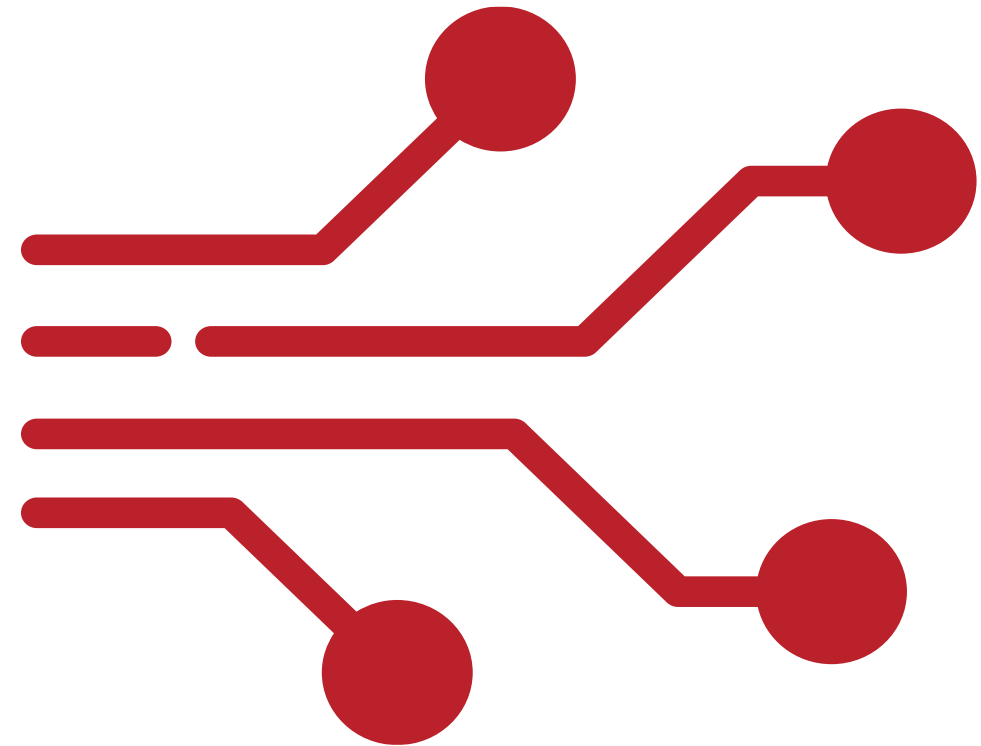
$$10^a \cdot 10^b = 10^{(a+b)} \qquad \frac{10^a}{10^b} = 10^{(a-b)}$$

Oraz podnoszenia potęgi do potęgi:

$$(10^n)^m = 10^{n \cdot m}$$

49

Kinematyka punktu materialnego



50

Kinematyka punktu materialnego cz. I

Kinematyka stanowi fundamentalny dział mechaniki klasycznej, który koncentruje się na precyzyjnym, geometrycznym opisie ruchu ciał w czasie i przestrzeni. W odróżnieniu od dynamiki, kinematyka nie analizuje przyczyn powstawania ruchu – nie zajmuje się masą obiektów ani siłami, które na nie działają. Jej zadaniem jest udzielenie odpowiedzi na pytanie „jak” ciało się porusza, a nie „dlaczego”. Stanowi ona czysty opis matematyczny zmian położenia, będąc niezbędnym pomostem między abstrakcyjną geometrią a rzeczywistymi procesami fizycznymi zachodzącymi w naszym otoczeniu.

51

Kinematyka punktu materialnego cz. II

Głównym celem badań kinematycznych jest wyznaczenie równań ruchu, które pozwalają przewidzieć położenie badanego obiektu w dowolnej chwili czasu. Analiza ta opiera się na obserwacji zmian wektorów w przestrzeni, co pozwala na definicję takich pojęć jak prędkość czy przyspieszenie. Zrozumienie kinematyki jest kluczowe, gdyż tworzy ona język, w którym formułowane są niemal wszystkie zaawansowane prawa fizyki, od mechaniki nieba po inżynierię nowoczesnych maszyn.

52

Model Punktu Materialnego cz. I

Model punktu materialnego to jedna z najważniejszych i najczęściej stosowanych idealizacji w fizyce klasycznej. Pozwala on na drastyczne uproszczenie matematycznego opisu ruchu, zachowując jednocześnie wysoką precyzję przewidywań w określonych warunkach.

W tym modelu rzeczywiste, trójwymiarowe ciało zostaje zredukowane do bezwymiarowego punktu geometrycznego, któremu przypisujemy całą masę tego ciała.

53

Model Punktu Materialnego cz. II

Oznacza to, że punkt materialny:

- Posiada ściśle określoną masę (w dynamice) i położenie (w kinematyce).
- Nie posiada objętości, kształtu ani struktury wewnętrznej.
- Nie ma zdolności do obracania się wokół własnej osi ani odkształcania.

Model Punktu Materialnego cz. III

Kiedy ten model ma sens?

W fizyce rzadko zależy nam na śledzeniu każdego atomu poruszającego się obiektu. Zastąpienie ciała punktem materialnym jest uzasadnione w dwóch głównych przypadkach:

- Rozmiar ciała jest zaniedbywalnie mały w porównaniu do przebywanej odległości. *Przykład:* Ziemia (o średnicy ok. 12 700 km) może być traktowana jako punkt materialny, gdy badamy jej ruch po orbicie wokół Słońca (odległość ok. 150 mln km).
- Ciało porusza się wyłącznie ruchem postępowym. Jeśli obiekt nie obraca się wokół własnej osi (ani nie zmienia kształtu), każdy jego fragment pokonuje dokładnie taką samą drogę. Wystarczy wtedy opisać ruch jednego, dowolnego punktu tego ciała (najczęściej środka masy), aby znać ruch całej bryły. *Przykład:* Klocek zsuwający się po równi pochyłej bez tarcia i koziółkowania.

55

Model Punktu Materialnego cz. IV

Ograniczenia modelu

- Model ten ma oczywiście swoje granice. Traktując ciało jako punkt materialny, nie jesteśmy w stanie opisać zjawisk takich jak:
- Ruch obrotowy ciała wokół własnej osi (np. ruch bąka zabawkowego czy wirowanie Ziemi powodujące cykl dnia i nocy).
- Opór powietrza zależny od aerodynamicznego kształtu obiektu.
- Zderzenia niecentralne, w których kształt ciał odgrywa kluczową rolę.
- Deformacje, pęknięcia czy wibracje wewnętrzne.

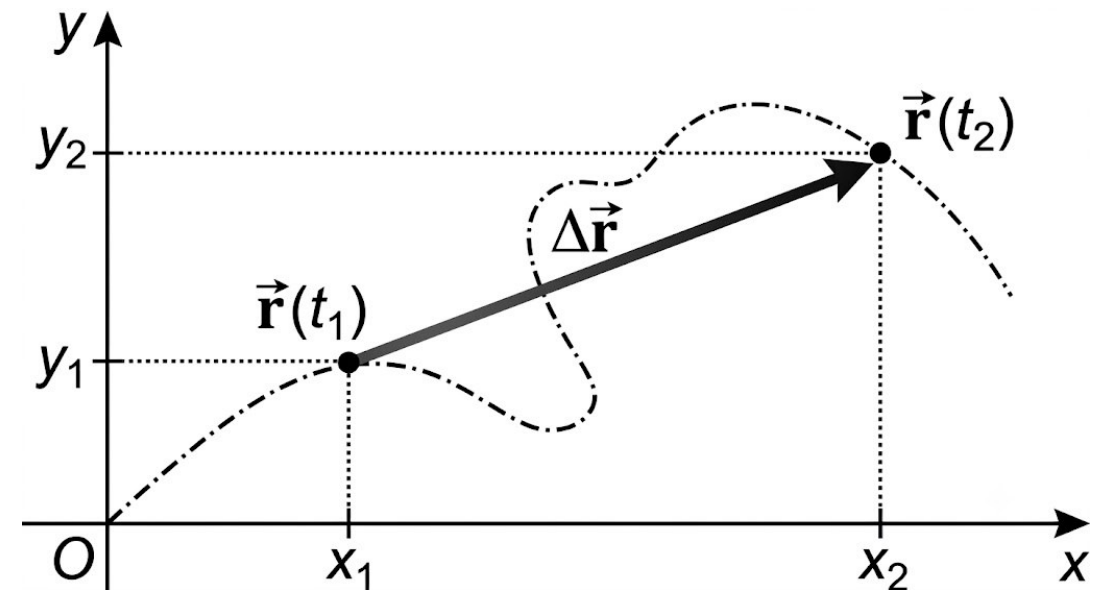
Zrozumienie punktu materialnego to fundament – dopiero po opanowaniu zasad opisujących ruch takich punktów, w fizyce przechodzi się do budowania z nich bardziej złożonych układów, a ostatecznie – modeli bryły sztywnej i ośrodków ciągłych.

56

Opis ruchu punktu materialnego

Aby opisać ruchu punktu materialnego należy podać:

- Tor ruchu (linia, po której porusza się punkt),
- Położenia w czasie $\vec{r}(t)$
- Prędkości w czasie $\vec{v}(t)$
- Przyspieszenia w czasie $\vec{a}(t)$



57

Ruch jednostajny prostoliniowy cz. I

Ruch jednostajny prostoliniowy to najprostszy z możliwych rodzajów ruchu w fizyce. Mówimy o nim wtedy, gdy spełnione są jednocześnie dwa warunki: ciało porusza się po linii prostej (tor ruchu jest prostoliniowy), a w równych odstępach czasu pokonuje dokładnie takie same odcinki drogi (ruch jest jednostajny).

Równanie ruchu (czyli zależność położenia od czasu) przyjmuje postać funkcji liniowej:

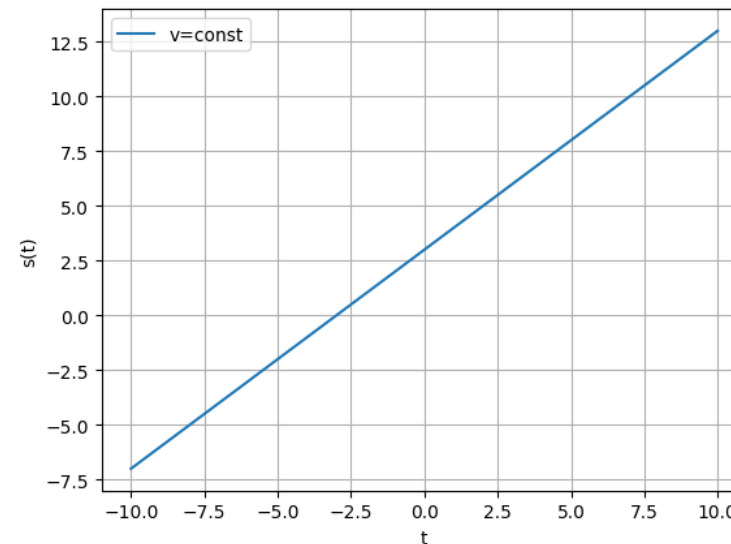
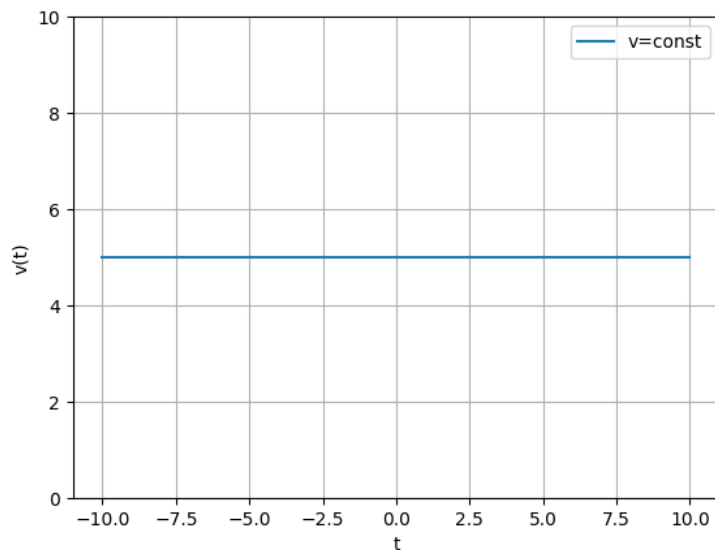
$$x(t) = x_0 + v \cdot t$$

Gdzie x_0 - położenie początkowe w chwili t_0 , v – prędkość (stała w czasie), t – czas ruchu.

58

Ruch jednostajny prostoliniowy cz. II

Wykresami zależności prędkości i położenia od czasu są linie proste. W przypadku prędkości jest to linia pozioma (stała prędkość), a dla położenia w zależności od znaku prędkości jest to prosta pochyła wznosząca się lub opadająca (rysunki poniżej).



59

Ruch jednostajnie zmienny prostoliniowy cz. I

Ruch jednostajnie zmienny prostoliniowy to taki, w którym tor ruchu jest linią prostą, a prędkość ciała zmienia się o stałą wartość w każdym równym odstępie czasu. Oznacza to, że ciało przyspiesza lub hamuje w jednostajny (równomierny) sposób.

W zależności od tego, jak skierowane są wektory prędkości i przyspieszenia, ruch ten dzielimy na dwa podtypy:

- Ruch jednostajnie przyspieszony: Przyspieszenie ma ten sam zwrot (znak) co prędkość. Ciało porusza się coraz szybciej.
- Ruch jednostajnie opóźniony (hamowanie): Przyspieszenie ma przeciwny zwrot (znak) do prędkości. Ciało zwalnia, aż do ewentualnego zatrzymania się i zawrócenia.

Ruch jednostajnie zmienny prostoliniowy cz. II

Można to sprowadzić do trzech kluczowych cech fizycznych:

Stałe przyspieszenie: Wektor przyspieszenia nie zmienia swojej wartości ani kierunku ($a = \text{const}$ przy czym $a \neq 0$).

Liniowa zmiana prędkości: Wartość prędkości rośnie lub maleje liniowo z upływem czasu. Równanie prędkości wygląda następująco:

$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$

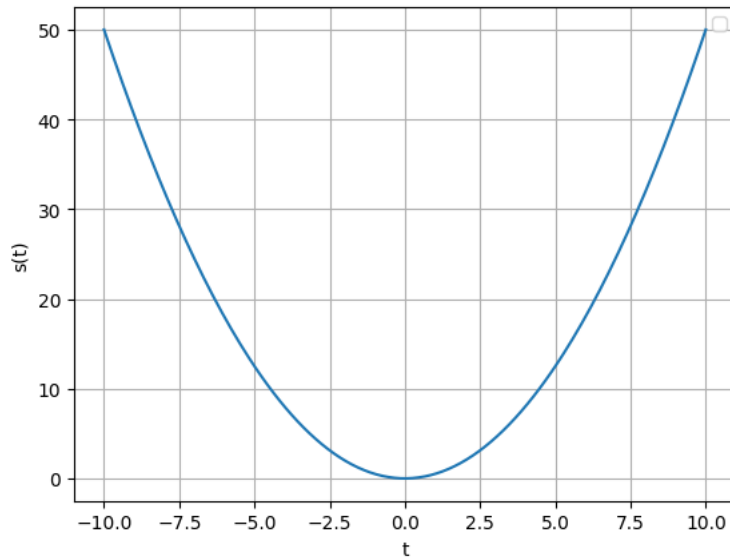
Kwadratowy przyrost położenia: Przebyta droga (i zmiana położenia) nie rośnie już proporcjonalnie do czasu, ale do jego kwadratu. Wykresem zależności położenia od czasu jest parabola. Równanie ruchu ma postać:

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{at^2}{2}$$

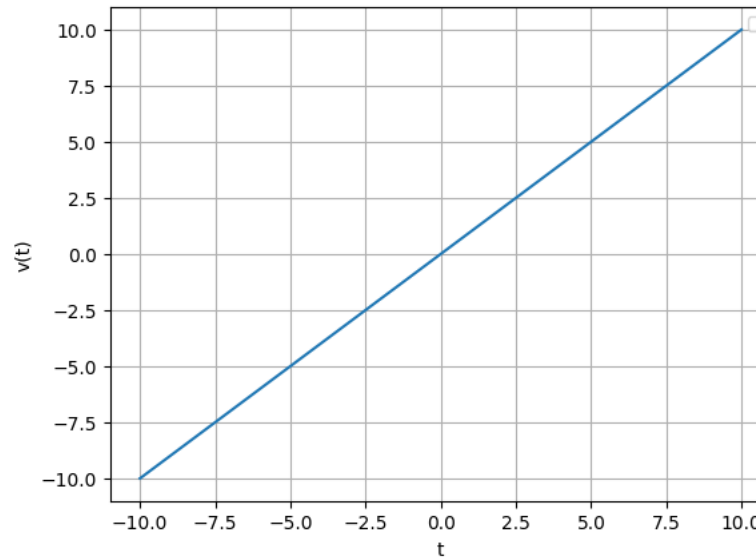
gdzie v_0 - prędkość początkowa (pozostałe oznaczenia takie jak wcześniej).

61

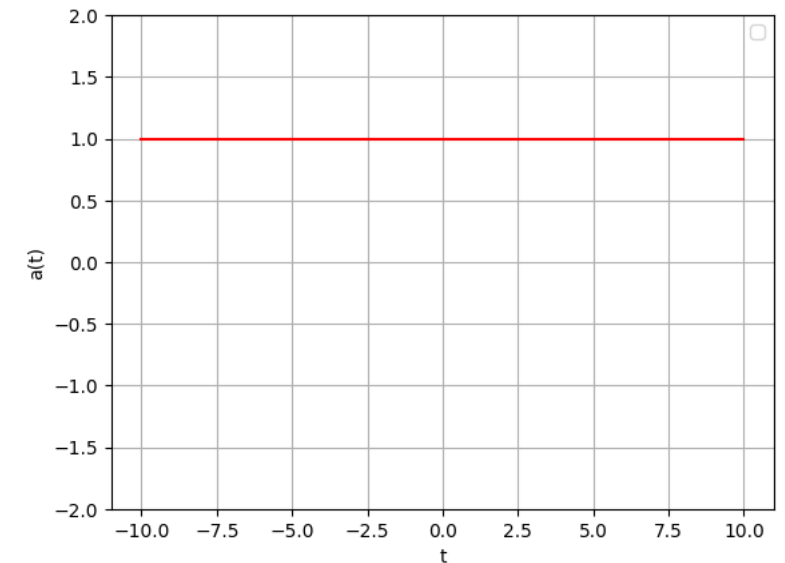
Ruch jednostajnie zmienny prostoliniowy cz. III



$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{at^2}{2}$$



$$v(t) = v_0 + at$$



$$a = \frac{v_k - v_p}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{const}$$

62

Opis ruchu w ujęciu rachunku różniczkowego i całkowego cz. I

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$x(t) = \int v(t) dt$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$v(t) = \int a(t) dt$$

Opis ruchu w ujęciu rachunku różniczkowego i całkowego cz. II

Dla $a = \text{const}$ możemy wyznaczyć zależność prędkości od czasu:

$$v(t) = \int a dt = at + C$$

$$v(0) = v_0 = C$$

$$v(t) = at + v_0$$

Opis ruchu w ujęciu rachunku różniczkowego i całkowego cz. III

Możemy również wyznaczyć zależność położenia od czasu:

$$x(t) = \int v(t)dt = \int (at + v_0)dt = \frac{at^2}{2} + v_0t + C$$

$$x(0) = x_0 = C$$

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0t + x_0$$

65

Ruch jednostajny po okręgu cz. I

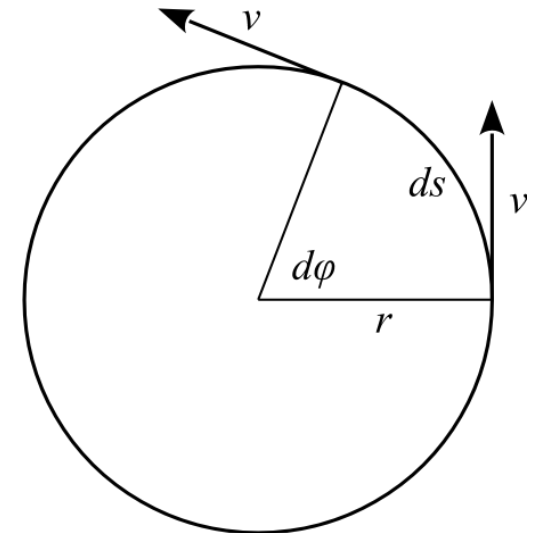
Ruch jednostajny po okręgu to szczególny przypadek ruchu krzywoliniowego. O ile w ruchu jednostajnym prostoliniowym nic się nie zmienia (ani wartość, ani kierunek prędkości), o tyle w ruchu po okręgu wartość prędkości (szybkość) pozostaje stała, ale jej kierunek zmienia się w każdej ułamku sekundy.

Tor ruchu: Jest okręgiem (lub jego fragmentem) o promieniu r .

Prędkość liniowa (v): Jej wartość jest stała. Wektor prędkości jest w każdym punkcie styczny do toru ruchu.

Ruch jednostajny po okręgu cz. II

Wprowadźmy podstawowe wielkości opisujące ten ruch. W każdym kolejnym odcinku czasu dt poruszający się po okręgu punkt przebywa odcinek drogi ds . Stosunek tych dwóch wielkości jest wartością prędkości liniowej punktu. Możemy zdefiniować inną wielkość jaką jest prędkość kątowa ω określająca przyrost kąta obrotu punktu $d\phi$ w czasie dt (patrz rysunek obok). Dla tak zdefiniowanych wielkości możemy związać prędkość liniową z prędkością kątową poprzez definicję miary łukowej kąta. Relacje te opisują poniższe równania, w których wielkość r jest promieniem okręgu, po którym



porusza się punkt: $d\phi = \frac{ds}{r}$

$v = \frac{ds}{dt}$

$\omega = \frac{d\phi}{dt}$

67

Ruch jednostajny po okręgu cz. III

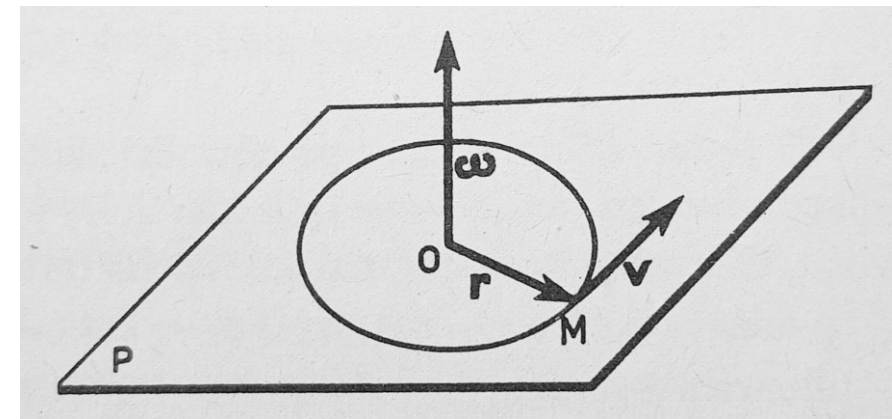
Łącząc powyższe równania znajdujemy relację pomiędzy prędkością liniową a prędkością kątową punktu w ruchu jednostajnym po okręgu jak w poniższych równaniach:

$$d\phi = \frac{ds}{r} \qquad \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{r} \frac{ds}{dt}$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$v = r\omega$$

$$\vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega}$$

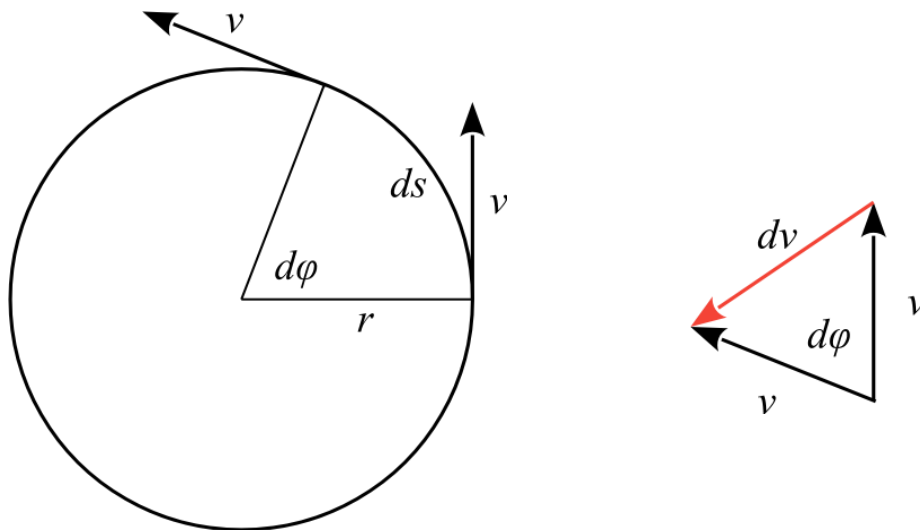


Jeżewski M., Fizyka, Wydawnictwo PWN 1970.

68

Ruch jednostajny po okręgu cz. IV

Przyspieszenie dośrodkowe a_d - skoro wektor prędkości zmienia kierunek, to układ musi posiadać przyspieszenie. Jest ono zawsze prostopadłe do wektora prędkości i skierowane do środka okręgu. Odpowiada wyłącznie za zakrzywianie toru (zmianę kierunku lotu), a nie za zmianę szybkości. Jego wartość zależy od prędkości liniowej i promienia toru, a równanie wyprowadzane jest z podobieństwa trójkątów utworzonych przez odpowiednie wektory (rysunek przesadzony w celu ilustracji).



$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{r} \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = a$$

$$\frac{a}{v} = \frac{v}{r}$$

$$a_d = \frac{v^2}{r}$$

69

Ruch jednostajny po okręgu – okres i częstotliwość

Ruch ten powtarza się w regularnych odstępach czasu, zatem możemy wprowadzić pojęcie okresu czyli czasu charakterystycznego powtarzalności ruchu, oraz częstotliwości. Obydwie wielkości powiązane są z prędkością kątową jak przedstawiają to poniższe równania:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$f = \frac{n}{t} = \frac{1}{T}$$

gdzie T – okres (czas jednego pełnego obiegu),

f – częstotliwość (wielokrotność obiegów n w czasie t)

70

Ruch jednostajnie zmienny po okręgu cz. I

Ruch jednostajnie zmienny po okręgu to zjawisko, w którym ciało porusza się po zakrzywionym, kołowym torze, ale w przeciwieństwie do zwykłego ruchu po okręgu, jego prędkość liniowa (szybkość) nie jest stała – rośnie lub maleje w sposób równomierny. Wyobraź sobie karuzelę, która właśnie rusza i powoli, ale jednostajnie, nabiera prędkości.

W tym ruchu dynamika układu staje się bardziej złożona, ponieważ pojawiają się dwie prostopadłe do siebie składowe przyspieszenia, które odpowiadają za zupełnie inne efekty fizyczne.

71

Ruch jednostajnie zmienny po okręgu cz. II

Przyspieszenie styczne a_s - odpowiada wyłącznie za zmianę wartości prędkości liniowej (szybkości).

Jest skierowane wzdłuż linii stycznej do okręgu (leży na jednej prostej z wektorem prędkości).

Ponieważ prędkość zmienia się jednostajnie, wartość tego przyspieszenia jest stała $a_s = \text{const.}$

Przyspieszenie dośrodkowe a_d odpowiada wyłącznie za zmianę kierunku wektora prędkości, zmuszając ciało do poruszania się po łuku. Ponieważ szybkość ciała w tym ruchu nieustannie rośnie (lub maleje), wartość przyspieszenia dośrodkowego również ulega ciągłej zmianie zgodnie ze wzorem

$a_d = \frac{v^2}{r}$. W ruchu jednostajnie zmiennym wektor ten staje się z każdą ułamkiem sekundy coraz

dłuższy bądź krótszy w zależności czy poruszający punkt przyspiesza czy spowalnia.

Ruch jednostajnie zmienny po okręgu cz. III

Przyspieszenie całkowite a jest to rzeczywiste, wypadkowe przyspieszenie działające na ciało, będące sumą wektorową przyspieszenia stycznego i dośrodkowego. Jego wartość obliczamy z twierdzenia Pitagorasa

$$a = \sqrt{a_s^2 + a_d^2}$$

73

Ruch jednostajnie zmienny po okręgu cz. IV

Tak jak dla ruchu jednostajnego po okręgu definiowaliśmy prędkość kątową, tak tutaj ze względu na jej zmianę możemy wprowadzić pojęcie przyspieszenia kąowego. W ruchu jednostajnie zmiennym po okręgu jest wielkością stałą $\epsilon = \text{const}$ i określa, o ile radianów na sekundę zmienia się prędkość kątowa w każdej jednostce czasu. Z przyspieszeniem stycznym wiąże je prosty związek przedstawiony równaniami jak niżej

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2} \quad \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}$$

$$a_s = r\epsilon$$

$$\vec{a}_d = \vec{r} \times \vec{\epsilon}$$

gdzie ϵ - przyspieszenie kątowe, a_d – przyspieszenie styczne/liniowe.

74

Ruch jednostajnie zmienny po okręgu cz. V

Prześledźmy sposób wyprowadzenia równania ruchu jednostajnie zmiennego po okręgu w ujęciu różniczkowym i całkowym. Prędkość kątowna jest pochodną zależności kąta od czasu po czasie, przyspieszenie kątowne jest drugą pochodną kąta.

$$\omega(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}$$

$$\epsilon(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\phi(t)}{dt^2}$$

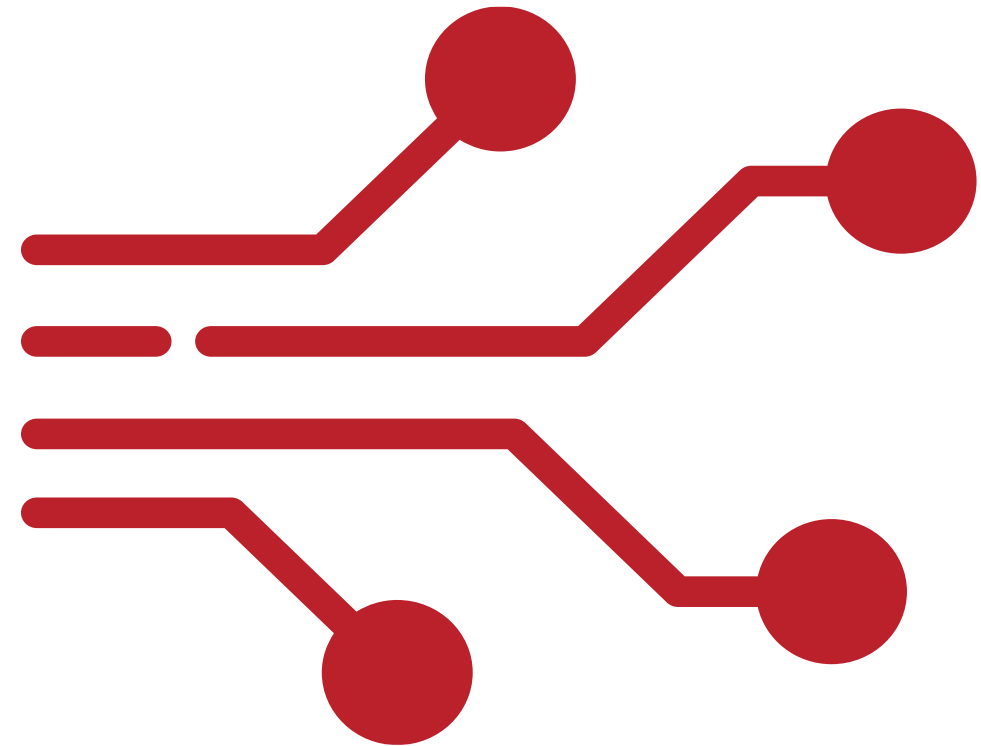
Proces możemy odwrócić całkując odpowiednie wyrażenia.

$$\omega(t) = \int \epsilon dt = \epsilon t + \omega_0$$

$$\phi(t) = \int \omega(t) dt = \int (\epsilon t + \omega_0) dt = \frac{\epsilon t^2}{2} + \omega_0 t + \phi_0$$

75

Dynamika punktu materialnego



76

Dynamika punktu materialnego cz. I

Dynamika punktu materialnego to fundamentalny dział mechaniki klasycznej, który stanowi logiczne rozwinięcie kinematyki. O ile kinematyka odpowiadała jedynie na pytanie jak ciało się porusza (badając tory, prędkości i przyspieszenia), o tyle dynamika sięga do fundamentów i odpowiada na pytanie dlaczego ten ruch w ogóle powstaje i ulega zmianom.

Zajmuje się ona badaniem przyczyn ruchu, czyli analizą sił działających na obiekt oraz wpływem masy na jego zachowanie w przestrzeni.

77

Dynamika punktu materialnego cz. II

W dynamice wprowadzamy dwa zupełnie nowe, kluczowe pojęcia, które nie istniały w czystej kinematyce:

Siła - Wektorowa miara oddziaływań fizycznych między ciałami. To właśnie siły są bezpośrednią przyczyną zmiany stanu ruchu (czyli powstawania przyspieszenia).

Masa - Skalarna miara bezwładności ciała. Określa ona, jak bardzo dany obiekt opiera się zmianom swojego ruchu. Im większa masa, tym trudniej wytrącić ciało ze spoczynku lub zmienić jego prędkość.

78

Definicja Siły poprzez Zmianę Pędu

Aby zdefiniować siłę w ten sposób, musimy najpierw oprzeć się na pędzie (oznaczanym jako $\vec{p}$). Pęd to wektorowa wielkość fizyczna, która określa ilość ruchu zgromadzoną w ciele, łącząc w sobie informację o jego masie m oraz prędkości $\vec{v}$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Punkt materialny pozostawiony sam sobie zachowuje swój pęd. Jakakolwiek zmiana tego stanu wymaga zewnętrznej ingerencji.

79

Siła jako pochodna pędu po czasie cz. I

W ujęciu fundamentalnym, siła jest miarą szybkości zmiany pędu. Jeśli pęd punktu materialnego ulega zmianie (rośnie wartość, maleje lub zmienia się jego kierunek w przestrzeni), oznacza to jednoznacznie, że działa na niego niezrównoważona siła.

Siłę $\vec{F}$ definiujemy precyzyjnie jako pochodną wektora pędu względem czasu:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

To równanie jest sercem dynamiki. Mówi ono wprost: siła to tempo, w jakim do układu dostarczany jest (lub odbierany z niego) pęd. Im gwałtowniejsza zmiana pędu, tym większa siła za nią odpowiada.

80

Siła jako pochodna pędu po czasie cz. II

W ujęciu fundamentalnym, siła jest miarą szybkości zmiany pędu. Jeśli pęd punktu materialnego ulega zmianie (rośnie wartość, maleje lub zmienia się jego kierunek w przestrzeni), oznacza to jednoznacznie, że działa na niego niezrównoważona siła.

Siłę $\vec{F}$ definiujemy precyzyjnie jako pochodną wektora pędu względem czasu:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

To równanie jest sercem dynamiki. Mówi ono wprost: siła to tempo, w jakim do układu dostarczany jest (lub odbierany z niego) pęd. Im gwałtowniejsza zmiana pędu, tym większa siła za nią odpowiada.

81

Siła jako pochodna pędu po czasie cz. III

Obliczając pochodną pędu po czasie dostajemy równanie

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot \frac{dm}{dt}$$

Zakładając, że poruszające się ciało (punkt materialny) nie zmienia swojej masy w trakcie trwania ruchu otrzymujemy zależność

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

gdzie pierwsza pochodna prędkości po czasie jest przyspieszeniem.

Zasady dynamiki Newtona cz. I

I zasada dynamiki Newtona - prawo bezwładności:

Jeśli na punkt materialny nie działają żadne siły (lub siły te się równoważą), punkt ten pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. To prawo definiuje naturalny stan materii, w którym nie zachodzą żadne zmiany.

II zasada dynamiki Newtona:

Jeśli na punkt materialny działa niezrównoważona siła, to porusza się on z przyspieszeniem proporcjonalnym do tej siły i odwrotnie proporcjonalnym do swojej masy. To tutaj mechanika zyskuje swoje najważniejsze narzędzie obliczeniowe, czyli równanie ruchu:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

83

Zasady dynamiki Newtona cz. II

III zasada dynamiki Newtona - prawo akcji i reakcji

Oddziaływania między ciałami są zawsze wzajemne. Jeśli jedno ciało działa na drugie pewną siłą, to drugie działa na pierwsze siłą o takiej samej wartości i kierunku, ale przeciwnym zwrocie.

$$\overrightarrow{F_{AB}} = -\overrightarrow{F_{BA}}$$

Zasada zachowania pędu cz. I

Zasada zachowania pędu jest jednym z fundamentalnych praw natury, wynikającym bezpośrednio z III zasady dynamiki Newtona oraz symetrii praw fizyki względem przesunięcia w przestrzeni (twierdzenie Noether).

W układzie odosobnionym – czyli takim, w którym wypadkowa sił zewnętrznych jest równa zero – całkowity pęd układu pozostaje stały w czasie. Oznacza to, że procesy wewnętrzne (takie jak oddziaływanie sprężyny, wybuch czy zderzenie) mogą zmieniać pędy poszczególnych elementów układu, ale ich suma wektorowa pozostaje niezmienna.

85

Zasada zachowania pędu cz. II

Punkt wyjścia (III zasada dynamiki)

Założmy, że ciała A i B tworzą układ izolowany – nie działają na nie żadne siły zewnętrzne, a jedyne obecne oddziaływania to siły wewnętrzne między tymi dwoma obiektami.

Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona (zasadą akcji i reakcji), siła F_{AB} wywierana na ciało A przez ciało B jest równa co do wartości, ale przeciwnie skierowana do siły F_{BA} wywieranej na ciało B przez ciało A

$$F_{AB} = -F_{BA}$$

Przenosząc oba składniki na jedną stronę, otrzymujemy warunek zerowania się wypadkowej sił wewnętrznych w układzie

$$F_{AB} + F_{BA} = 0$$

86

Zasada zachowania pędu cz. III

Różniczkowa postać II zasady dynamiki

Aby powiązać działające siły ze zmianą stanu ruchu ciał, musimy odwołać się do uogólnionej definicji siły, czyli drugiej zasady dynamiki Newtona zapisanej w języku pędu. Siła jest miarą szybkości zmiany pędu w czasie

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Stosując ten zapis do naszych ciał, możemy jednoznacznie określić, jak siły wewnętrzne modyfikują pędy poszczególnych obiektów $\vec{p}_A$

oraz $\vec{p}_B$

$$F_{AB} = \frac{dp_A}{dt} \quad \text{oraz} \quad F_{BA} = \frac{dp_B}{dt}$$

87

Zasada zachowania pędu cz. IV

Liniowość operatora różniczkowania

Podstawiamy uzyskane pochodne pędów do naszego równania wyjściowego

$$\frac{dp_A}{dt} + \frac{dp_B}{dt} = 0$$

Wykorzystując własność liniowości operatora różniczkowania (pochodna sumy jest równa sumie pochodnych), możemy wyciągnąć operację różniczkowania przed nawias

$$\frac{d(p_A + p_B)}{dt} = 0$$

88

Zasada zachowania pędu cz. V

Całkowanie i wniosek końcowy

Z matematycznego punktu widzenia, jeśli pochodna czasowa pewnej wielkości wektorowej jest tożsamościowo równa zero, oznacza to, że funkcja ta nie zmienia się w czasie.

Całkując powyższe równanie obustronnie względem czasu t , otrzymujemy ostateczny wynik

$$p_A + p_B = \text{const}$$

Suma wektorów pędu obu ciał stanowi całkę ruchu układu izolowanego, jej wartość pozostaje stała, niezależnie od charakteru i gwałtowności wewnętrznych oddziaływań (np. zderzeń sprężystych czy niesprężystych).

89

Zasada zachowania pędu cz. VI

Uogólnienie dla układu N ciał

Na mocy III zasady dynamiki, wewnątrz dowolnego układu siły oddziaływania między ciałami zawsze występują parami $F_{ij} = -F_{ji}$, a ich suma wektorowa dla całego układu wynosi zero

$$\sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j} F_{ij} = 0$$

Co w wyniku daje zasadę zachowania pędu dla układu N ciał

$$\frac{dP_{całk}}{dt} = \sum_{i=0}^N \frac{dp_i}{dt} = 0$$

$$\sum_{i=1}^N p_i = const$$

90

Zasada zachowania pędu cz. VII

Prawo to obowiązuje identycznie dla dwóch atomów, miliarda cząsteczek gazu w zamkniętym zbiorniku, jak i dla całej galaktyki. Złożoność wewnętrzna nie wpływa na pęd całkowity.

Pozwala to badać globalne zachowanie skomplikowanych układów (np. zderzenia wielokrotne, eksplozje) bez konieczności śledzenia indywidualnych trajektorii i sił działających na każde ciało z osobna.

Popęd siły cz. I

Popęd siły (często nazywany impulsem siły) to wektorowa wielkość fizyczna, która stanowi miarę działania siły w danym przedziale czasu. Opisuje ona, jak przyłożona siła wpływa na zmianę stanu ruchu ciała.

W rzeczywistych procesach (np. podczas uderzenia rakiety w piłkę czy zderzenia samochodów) siła gwałtownie rośnie i maleje. W ujęciu różniczkowym i całkowym popęd $\vec{J}$ zapisujemy jako

$$d\vec{J} = \vec{F}(t) dt \Rightarrow \vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt$$

Popęd siły cz. II

Relacja z pędem - Twierdzenie o popędzie i pędzie

Popęd siły wypadkowej działającej na ciało w danym przedziale czasu jest dokładnie równy zmianie pędu tego ciała.

$$\vec{J} = \Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

$\vec{J}$ – wektor popędu siły. Jego jednostką w układzie SI jest niutnosekunda N·s, co jest wymiarowo równoważne kilogramometrowi na sekundę kg·m/s. Wektor $\vec{J}$ ma zawsze ten sam kierunek i zwrot, co działająca siła (lub jej średnia wartość).

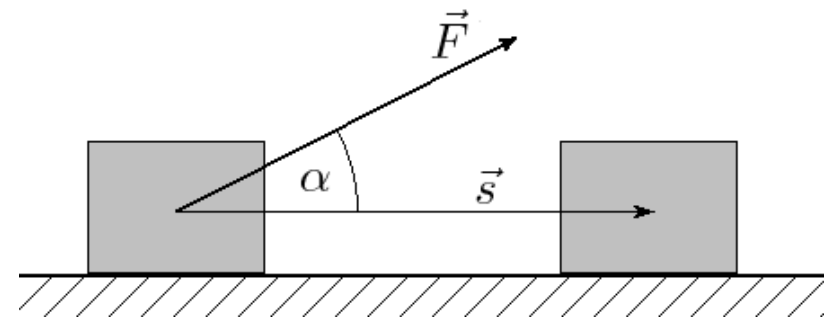
93

Praca cz. I

W ujęciu fizycznym praca nie jest synonimem wysiłku, lecz precyzyjną miarą przekazywania energii do układu (lub odbierania jej z niego). Formalnie, pracą nazywamy iloczyn skalarny wektora siły i wektora przesunięcia (przemieszczenia) ciała, spowodowanego działaniem tej siły.

Dla siły, która jest stała co do wartości, kierunku i zwrotu, równanie wyjściowe przyjmuje postać

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$



94

Praca cz. II

Zgodnie z definicją iloczynu skalarnego, powyższe równanie możemy zapisać w użyteczniejszej postaci trygonometrycznej

$$W = F s \cos \alpha$$

gdzie $\vec{F}$ – wektor siły, $\vec{s}$ – wektor przesunięcia powstałego pod działaniem tej siły, α – kąt zawarty między linią działania wektora siły a wektorem przesunięcia.

Obecność funkcji cosinus w równaniu ma fundamentalne znaczenie fizyczne. Oznacza to, że pracę wykonuje wyłącznie ta składowa siły, która jest równoległa do kierunku ruchu (składowa styczna). Składowa prostopadła do toru ruchu nie przyczynia się do przemieszczania ciała, a zatem pracy nie wykonuje.

95

Praca cz. III

Na podstawie tego równania wyróżniamy trzy kluczowe przypadki:

$\alpha = 0^\circ \cos 0^\circ = 1$ - Siła działa w kierunku ruchu (np. pchanie wózka).
Praca jest maksymalna i dodatnia.

$\alpha = 90^\circ \cos 90^\circ = 0$ - Siła działa prostopadle do przesunięcia (np. siła dośrodkowa w ruchu po okręgu lub siła ciężkości podczas ruchu wzdłuż poziomego stołu). W sensie fizycznym siła ta nie wykonuje żadnej pracy.

$\alpha = 180^\circ \cos 180^\circ = -1$ - Siła działa przeciwnie do zwrotu ruchu (np. siła tarcia kinetycznego). Praca jest ujemna, co oznacza, że energia jest z układu odbierana.

96

Praca cz. IV

Jednostką pracy w układzie SI jest dżul (J). Jeden dżul to praca wykonana przez stałą siłę jednego niutona przy przesunięciu punktu przyłożenia tej siły o jeden metr w kierunku jej działania

$$1 J = 1 N \cdot 1 m$$

Praca cz. V

Praca siły zmiennej (Ujęcie uogólnione)

W rzeczywistych układach siła rzadko pozostaje idealnie stała na całej drodze. Klasycznym przykładem jest siła sprężystości (rozciąganie sprężyny) lub siła grawitacji zmieniająca się wraz z odległością od planety.

Aby obliczyć pracę w takim przypadku, całe przesunięcie dzielimy na i elementarnych, nieskończenie małych odcinków Δs . Zakładamy, że na każdym z tych mikroskopijnych odcinków siłę F_i można uznać za stałą. Praca całkowita jest wówczas sumą prac elementarnych:

$$W \approx \sum_i F_i \Delta s$$

98

Praca cz. VI

Przechodząc do granicy, w której długość elementarnych odcinków dąży do zera $\Delta s \rightarrow 0$, nieskończona suma przekształca się w całkę. W ujęciu jednowymiarowym ogólny wzór na pracę siły zmiennej na drodze od punktu a do punktu b przyjmuje postać

$$W = \int_a^b F ds$$

Z tego zapisu wynika niezwykle przydatna własność geometryczna: wartość wykonanej pracy jest równa polu powierzchni pod wykresem zależności siły od drogi na danym przedziale. Pozwala to na łatwe wyznaczanie pracy na podstawie wykresów (np. pole trójkąta dla idealnej sprężyny w późniejszych wykładach).

99

Energia potencjalna cz. I

Aby zdefiniować energię potencjalną w sposób ilościowy, rozważmy klasyczny przypadek podnoszenia punktu materialnego o masie m w pobliżu powierzchni Ziemi. Zakładamy, że ruch odbywa się na niewielkiej wysokości, gdzie pole grawitacyjne jest jednorodne, a przyspieszenie ziemskie $\vec{g} = \text{const}$

Zadajemy więc pytanie, jaką pracę musi wykonać siła zewnętrzna, aby podnieść to ciało z poziomu odniesienia (wysokość 0) na wysokość h ?

100

Energia potencjalna cz. II

Aby podnosić ciało ruchem jednostajnym (bez przyspieszania), musimy przyłożyć siłę zewnętrzną $\vec{F}$, która dokładnie równoważy siłę ciężkości

$$F = mg$$

Kierunek wektora siły i przemieszczenia są zgodne. Ponieważ rozważamy przypadek ogólny z wykorzystaniem rachunku całkowego, pracę na drodze s (od 0 do h) zapisujemy jako

$$W = \int_0^h F ds = \int_0^h mg ds$$

101

Energia potencjalna cz. III

Ponieważ masa m i przyspieszenie g są w tym układzie stałe, wyłączamy je przed znak całki

$$W = mg \int_0^h ds$$

Rozwiązując całkę oznaczoną, otrzymujemy

$$W = mg[s]_0^h = mgh - mg \cdot 0 = mgh$$

Praca wykonana przez siłę zewnętrzną przeciwko siłom pola nie zniknęła, została w pełni zmagazynowana w układzie pod postacią energii potencjalnej

$$E_p = mgh$$

102

Względność energii potencjalnej i poziom odniesienia cz. I

Sama absolutna wartość energii potencjalnej w danym układzie nie ma fizycznego znaczenia bez wcześniejszego zdefiniowania układu współrzędnych.

Punkt odniesienia, dla którego wysokość wynosi zero $h = 0$, a tym samym energia potencjalna przyjmuje wartość zerową $E_p = 0$, wybiera się w sposób całkowicie arbitralny. Może to być podłoga laboratorium, blat stołu pomiarowego czy poziom morza.

103

Względność energii potencjalnej i poziom odniesienia cz. II

Obserwowalna i użyteczna fizycznie jest wyłącznie zmiana energii potencjalnej ΔE_p zachodząca podczas przemieszczania obiektu.

To właśnie różnica energii między stanem końcowym a początkowym jest bezpośrednio równa pracy wykonanej przeciwko siłom pola zachowawczego

$$W = \Delta E_p = E_{p2} - E_{p1}$$

Energia kinetyczna cz. I

Energia kinetyczna to energia E_k , którą ciało posiada z racji swojego ruchu. Zgodnie z fundamentalną definicją, energia kinetyczna jest równa pracy, jaką należy wykonać, aby rozpędzić ciało o masie m od spoczynku do zadanej prędkości v (lub praca, jaką to ciało może wykonać, zatrzymując się).

W przeciwieństwie do energii potencjalnej, która zależy od wzajemnego położenia ciał (i przyjętego układu odniesienia), energia kinetyczna zależy wyłącznie od masy ciała i prędkości, z jaką porusza się ono w danym układzie odniesienia.

105

Energia kinetyczna cz. II

Policzmy pracę wykonaną na drodze poziomej s w trakcie działania siły F

$$W = \int_a^b F ds = \int_a^b m \frac{dv}{dt} ds \quad ds = v dt$$
$$W = m \int_a^b \frac{dv}{dt} v dt = m \int_{v_0}^{v_k} v dv = \frac{mv_k^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$
$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Energia kinetyczna jest pracą potrzebną na zwiększenie prędkości ciała.

106

Twierdzenie o pracy i energii

Powyższe wyprowadzenie prowadzi do zdefiniowania energii kinetycznej dla ciała o masie m poruszającego się z prędkością v jako

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Możemy zatem zapisać uzyskany wynik w postaci tzw. twierdzenia o pracy i energii kinetycznej

$$W = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k$$

Praca wykonana przez wypadkową siłę działającą na ciało jest dokładnie równa zmianie energii kinetycznej tego ciała. Jeśli praca jest dodatnia (siła działa zgodnie z ruchem), energia kinetyczna i prędkość rosną. Jeśli praca jest ujemna (np. siła tarcia), energia kinetyczna maleje, a ciało hamuje.

107

Zasada zachowania energii cz. I

Zasada zachowania energii to jedno z najbardziej uniwersalnych i fundamentalnych praw fizyki. W mechanice klasycznej odnosi się ona do układów odosobnionych (na które nie działają siły zewnętrzne lub praca tych sił jest zerowa), w których wszystkie działające siły wewnętrzne mają charakter zachowawczy.

Siła zachowawcza to taka siła, której praca wykonana przy przemieszczeniu ciała z jednego punktu do drugiego zależy wyłącznie od położenia tych punktów (początkowego i końcowego), a jest całkowicie niezależna od toru, po jakim poruszało się ciało.

108

Zasada zachowania energii cz. II

Dla takiego układu całkowita energia mechaniczna E , będąca sumą energii kinetycznej E_k i potencjalnej E_p , pozostaje niezmienna w czasie

$$E = E_k + E_p = \text{const}$$

Oznacza to, że energia wewnątrz układu może swobodnie transformować z jednej postaci w drugą (np. z potencjalnej w kinetyczną i odwrotnie), ale jej sumaryczna wartość nigdy nie ulega zmianie.

109

Moc cz. I

Moc P to wielkość fizyczna będąca miarą szybkości wykonywania pracy. Określa ona, jak dużo pracy wykonano w danym przedziale czasu, lub ogólniej – z jaką szybkością energia jest przekazywana i przekształcana w układzie.

Moc średnia - dla pracy wykonywanej równomiernie w czasie t , podstawowy wzór przyjmuje postać

$$P = \frac{W}{t}$$

Jednostka mocy - Wat (W). Układ lub urządzenie ma moc jednego wata, jeśli w czasie jednej sekundy wykonuje pracę równą jednemu dżulowi

$$1W = \frac{1J}{1s} = \frac{1N \cdot 1m}{1s}$$

110

Moc cz. II

W rzeczywistych procesach fizycznych szybkość wykonywania pracy często ulega zmianom (np. rozkręcanie silnika, zmienny opór ruchu). W takiej sytuacji definicja makroskopowa jest niewystarczająca i należy przejść na ujęcie różniczkowe.

Moc chwilową definiujemy jako pierwszą pochodną wykonanej pracy po czasie

$$P = \frac{dW}{dt}$$

111

Moc cz. III

Związek mocy z siłą i prędkością

Wychodząc z definicji mocy chwilowej i przypominając, że elementarna praca to $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$, możemy łatwo powiązać moc z dynamiką i kinematyką poruszającego się obiektu

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{dt}$$

Ponieważ pochodna wektora przesunięcia po czasie to wektor prędkości chwilowej $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$, otrzymujemy niezwykle praktyczne w inżynierii równanie

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

112

Moc cz. IV

Ponieważ praca W jest w fizyce miarą zmiany energii całego układu, definicję mocy można sformułować w sposób bardziej ogólny, uniezależniając ją od pojęć czysto mechanicznych (takich jak siła i przesunięcie).

Zapisując to w postaci różniczkowej, otrzymujemy uniwersalną definicję mocy

$$P = \frac{dE}{dt}$$

W najszerszym ujęciu moc to szybkość przepływu lub transformacji energii.

113

Dynamika ruchu punktu materialnego po okręgu cz. I

Moment pędu $\vec{J}$

Miara ilości ruchu obrotowego danego ciała – obrotowy odpowiednik pędu z ruchu postępowego.

Określa, jak trudno jest zmienić stan ruchu obrotowego ciała. Im większy moment pędu, tym trudniej zmienić kierunek lub prędkość jego obrotu.

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$$

gdzie: $\vec{r}$ – wektor położenia (wodzący) względem wybranego punktu odniesienia, $\vec{p}$ – pęd liniowy punktu materialnego.

114

Dynamika ruchu punktu materialnego po okręgu cz. II

Moment siły $\vec{M}$ i zmiana momentu pędu

Obliczając pochodną momentu pędu po czasie, sprawdzamy, co wywołuje jego zmianę

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Ponieważ wektory prędkości $\frac{d\vec{r}}{dt}$ i pędu $\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$ są równoległe, ich iloczyn wektorowy znika $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = 0$. Równanie upraszcza się do

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

115

Dynamika ruchu punktu materialnego po okręgu cz. III

Prowadzi to do zdefiniowania momentu siły

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

jest to miara zdolności siły do wywołania obrotu ciała. Mówi o tym, jak bardzo dana siła skręca lub obraca układ wokół osi. Zatem

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{M}$$

116

Dynamika ruchu punktu materialnego po okręgu cz. IV

Ruch po okręgu i moment bezwładności

Dla punktu materialnego poruszającego się po okręgu (wektor $\vec{r}$ prostopadły do $\vec{p}$), możemy przejść na wartości skalarne

$$J = r \cdot p = r \cdot (mv)$$

Wiedząc, że prędkość liniowa wiąże się z kątową wzorem $v = r\omega$, otrzymujemy

$$J = m \cdot r^2 \cdot \omega$$

Wyodrębniając stałe parametry ciała, zapisujemy ostatecznie

$$J = I \cdot \omega$$

gdzie $I = mr^2$ to moment bezwładności.

117

Dynamika ruchu punktu materialnego po okręgu cz. V

Znaczenie fizyczne momentu bezwładności

Moment bezwładności jest to miara oporu punktu materialnego wobec zmiany jego ruchu obrotowego wokół danej osi. Informuje, jak trudno wprawić układ w obrót lub go zatrzymać (pełni w ruchu obrotowym rolę analogiczną do masy).

118

Zasada zachowania momentu pędu cz. I

Jeśli wypadkowy moment sił zewnętrznych działających na układ jest równy zero, to całkowity moment pędu tego układu nie ulega zmianie (pozostaje zachowany w czasie).

Wychodząc z drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{M}$$

Jeżeli wypadkowy moment sił zewnętrznych znika $\vec{M} = 0$, to

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{J} = \text{const}$$

119

Zasada zachowania momentu pędu cz. II

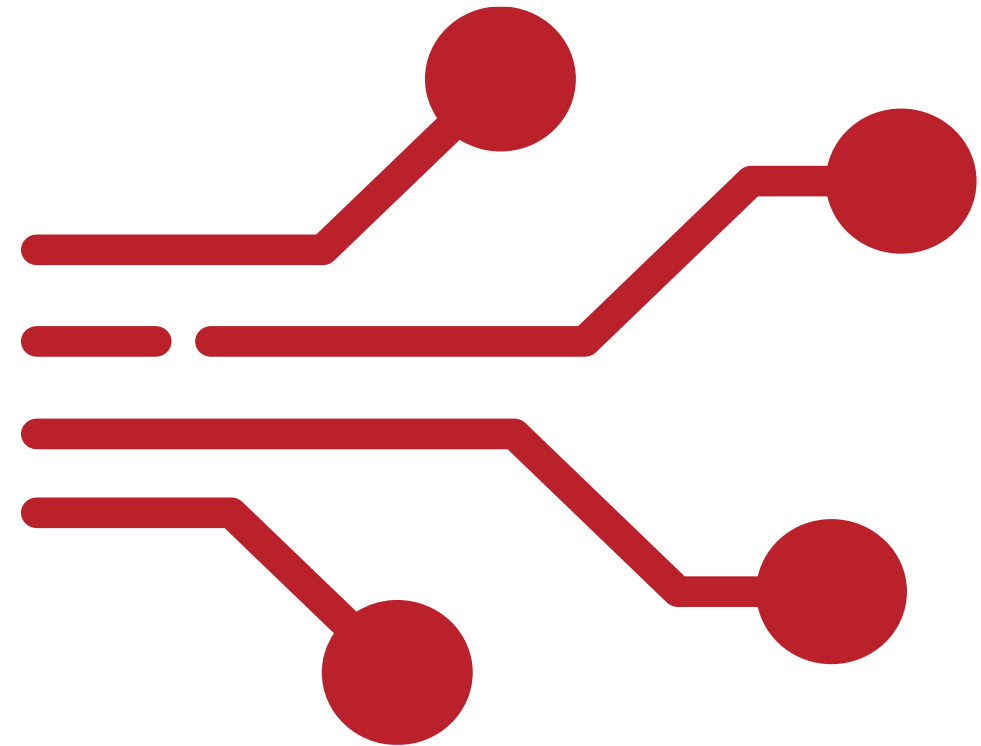
Rozpisując moment pędu na moment bezwładności I i prędkość kątową ω , otrzymujemy:

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 = \text{const}$$

Oznacza to, że każda zmiana rozkładu masy wokół osi obrotu, zmiana I , musi wywołać odwrotnie proporcjonalną zmianę prędkości obrotowej ω .

120

Dynamika bryły sztywnej



121

Dynamika bryły sztywnej cz. I

Dynamika bryły sztywnej to kolejny krok w poznawaniu mechaniki klasycznej, który drastycznie przybliży nasz matematyczny opis do rzeczywistego świata. Wkraczając w ten dział, porzucamy uproszczenie, jakim był bezwymiarowy punkt materialny, i zaczynamy analizować ciała posiadające własne wymiary, konkretny kształt oraz określoną dystrybucję masy w przestrzeni. Kluczowym założeniem tego modelu jest jego „sztywność” – przyjmujemy, że odległości między dowolnymi punktami wewnątrz obiektu pozostają absolutnie niezmiennie, co oznacza, że ciało to nie wygina się, nie rozciąga ani nie ulega żadnym odkształceniom pod wpływem zewnętrznych oddziaływań.

122

Dynamika bryły sztywnej cz. II

To przejście od punktu do przestrzennej bryły otwiera zupełnie nowy, bogaty wymiar analizy fizycznej: ruch obrotowy. O ile punkt materialny mógł się jedynie przemieszczać z miejsca na miejsce w ruchu postępowym, o tyle bryła sztywna może dodatkowo wirować, a każdy jej fragment porusza się wtedy z inną prędkością liniową. Zrozumienie tego zjawiska wymaga rozszerzenia naszego języka fizycznego.

123

Dynamika bryły sztywnej cz. III

W dynamice bryły sztywnej klasyczne pojęcia zyskują swoje potężne, obrotowe odpowiedniki:

- Zamiast zwykłej siły analizujemy moment siły, który jest odpowiedzialny za wprawianie ciała w rotację i zależy nie tylko od wielkości przyłożonej siły, ale też od miejsca jej działania (ramienia).
- Zamiast samej masy wprowadzamy moment bezwładności, który mówi nam, jak trudno jest dany obiekt „rozkręcić” lub zatrzymać. Parametr ten zależy nie tylko od tego, ile ciało waży, ale przede wszystkim od tego, jak jego masa jest rozłożona względem osi obrotu.

124

Dynamika bryły sztywnej cz. IV

Ten dział mechaniki stanowi absolutny fundament współczesnej inżynierii. To właśnie zasady dynamiki bryły sztywnej pozwalają nam analizować ruch toczącego się koła, projektować skomplikowane przekładnie w silnikach, rozumieć zachowanie stabilizujących żyroskopów na statkach kosmicznych oraz przewidywać precesję Ziemi. Jest to matematyczny aparat, bez którego opis funkcjonowania jakiejkolwiek nowoczesnej maszyny byłby po prostu niemożliwy.

125

Dynamika bryły sztywnej cz. V

Położenie środka masy

Środek masy (ŚM) to punkt geometryczny reprezentujący średnie położenie całego układu. Masa poszczególnych elementów ciała (lub punktów układu) stanowi tu statystyczną wagę do obliczenia tej średniej.

Dla układu złożonego z dyskretnych elementów o masach m_j i wektorach położenia $\vec{r}_j$, położenie środka masy wyraża się wzorem

$$\vec{R}_{SM} = \frac{\sum_j m_j \vec{r}_j}{\sum_j m_j} = \frac{1}{M} \sum_j m_j \vec{r}_j$$

Gdzie $M = \sum_j m_j$ to całkowita masa bryły (układu).

126

Dynamika bryły sztywnej cz. VI

Prędkość środka masy a pęd całkowity

Analizując ruch bryły sztywnej, różniczkujemy wektor położenia środka masy po czasie, aby wyznaczyć jego prędkość

$$\vec{v}_{SM} = \frac{d\vec{R}_{SM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_j m_j \frac{d\vec{r}_j}{dt} = \frac{1}{M} \sum_j m_j \vec{v}_j$$

Ponieważ iloczyn masy elementu i jego prędkości to pęd $\vec{p}_j = m_j \vec{v}_j$, sumator w liczniku staje się całkowitym pędem układu

$$\vec{v}_{SM} = \frac{\sum_j \vec{p}_j}{M} = \frac{\vec{P}_{całk}}{M}$$

Co po przekształceniu daje kluczowe równanie

$$\vec{P}_{całk} = M \vec{v}_{SM}$$

127

Dynamika bryły sztywnej cz. VII

Prędkość środka masy a pęd całkowity

Analizując ruch bryły sztywnej, różniczkujemy wektor położenia środka masy po czasie, aby wyznaczyć jego prędkość

$$\vec{v}_{SM} = \frac{d\vec{R}_{SM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_j m_j \frac{d\vec{r}_j}{dt} = \frac{1}{M} \sum_j m_j \vec{v}_j$$

Ponieważ iloczyn masy elementu i jego prędkości to pęd $\vec{p}_j = m_j \vec{v}_j$, sumator w liczniku staje się całkowitym pędem układu

$$\vec{v}_{SM} = \frac{\sum_j \vec{p}_j}{M} = \frac{\vec{P}_{całk}}{M}$$

Co po przekształceniu daje kluczowe równanie

$$\vec{P}_{całk} = M \vec{v}_{SM}$$

128

Dynamika bryły sztywnej cz. VIII

Moment pędu bryły sztywnej

W przeciwieństwie do punktu materialnego, bryła sztywna jest układem wielu cząstek, w którym odległości między poszczególnymi elementami pozostają niezmiennie. Podczas obrotu bryły wokół ustalonej osi, każdy jej punkt porusza się z tą samą prędkością kątową ω .

Dla każdego elementarnego fragmentu bryły i o masie m_i i odległości r_i od osi obrotu, możemy przypisać lokalny moment pędu

$$J_i = I_i \omega$$

gdzie $I_i = m_i r_i^2$ jest momentem bezwładności tego konkretnego fragmentu.

129

Dynamika bryły sztywnej cz. IX

Całkowity moment pędu i moment bezwładności

Aby uzyskać całkowity moment pędu bryły J , sumujemy wkłady od wszystkich jej punktów składowych. Ponieważ prędkość kątowa ω jest wspólna dla całego ciała, możemy wyłączyć ją przed nawias

$$J = \sum_i J_i = \sum_i (I_i \omega) = \omega \cdot \sum_i I_i$$

Definiując sumę momentów bezwładności jako całkowity moment bezwładności bryły I , otrzymujemy analogiczne równanie do przypadku punktu materialnego

$$J = I\omega$$

130

Dynamika bryły sztywnej cz. X

Gdzie całkowity moment bezwładności bryły sztywnej zapiszemy jako

$$I = \sum_i I_i = \sum_i m_i r_i^2$$

W przypadku bryły sztywnej, traktowanej jako obiekt ciągły, sumowanie dyskretne (dla poszczególnych punktów materialnych) zastępujemy całkowaniem po całej objętości bryły. Moment bezwładności I względem wybranej osi obrotu wyrażamy jako całkę

$$I = \int r^2 dm$$

131

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego bryły sztywnej cz. I

Zgodnie z ogólnym prawem dynamiki obrotowej (analogicznie jak dla punktu materialnego), szybkość zmiany momentu pędu układu w czasie jest równa działającemu na niego wypadkowemu momentowi siły $\vec{M}$

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{M}$$

gdzie

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

132

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego bryły sztywnej cz. II

Równanie ruchu bryły sztywnej

Wiemy już, że moment pędu bryły sztywnej wyraża się wzorem

$$\vec{J} = I\vec{\omega}$$

Podstawmy to do równania na moment siły

$$\frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \vec{M}$$

Ponieważ dla danej bryły sztywnej, obracającej się wokół ustalonej osi, moment bezwładności I jest wielkością stałą, możemy go wyłączyć przed znak pochodnej

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}$$

133

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego bryły sztywnej cz. III

Wielkość $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ to z definicji przyspieszenie kątowe $\vec{\varepsilon}$. Podstawiając je, otrzymujemy ostateczną, fundamentalną postać II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon}$$

Powyższe równanie stanowi odpowiednik omawianego równania na siłę w ruchu postępowym

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego bryły sztywnej cz. IV

Podobieństwo jest uderzające i kompletne. W ruchu obrotowym rolę siły $\vec{F}$ przejmuje moment siły $\vec{M}$, który wymusza obrót. Przyspieszenie liniowe $\vec{a}$ zostaje zastąpione przyspieszeniem kątowym $\vec{\epsilon}$. Z kolei rolę masy m , czyli miary bezwładności postępowego oporu, przejmuje moment bezwładności I . To równanie to swoisty most łączący kinematykę i dynamikę obrotową z intuicją, którą zbudowaliście sobie wcześniej przy ruchu postępowym.

135

Energia kinetyczna bryły sztywnej cz. I

Ruch swobodnej bryły sztywnej to w ogólnym przypadku złożenie ruchu postępowego i obrotowego. W związku z tym całkowita energia kinetyczna E_{kin} takiej bryły jest sumą dwóch części

$$E_{kin} = \frac{1}{2} M v_{SM}^2 + E_{kin,rot}$$

Gdzie pierwszy człon równania to energia kinetyczna ruchu postępowego całej bryły (traktowanej jako punkt materialny o masie M poruszający się z prędkością środka masy v_{SM}), a $E_{kin,rot}$ jest energia kinetyczna ruchu obrotowego bryły wokół jej środka masy.

136

Energia kinetyczna bryły sztywnej cz. II

energię związaną z obrotem bryły otrzymujemy, sumując energie kinetyczne wszystkich jej nieskończenie małych elementów

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

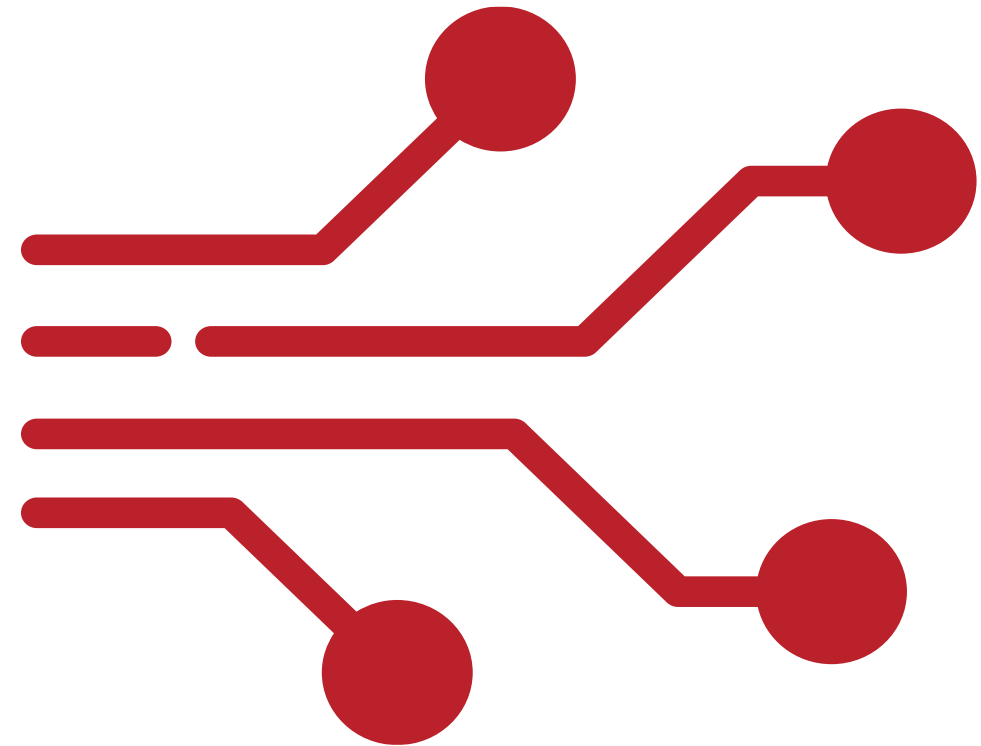
Wiedząc, że prędkość liniowa każdego elementu to $v_j = r_j\omega$, po zsumowaniu wyprowadzamy ostateczny wzór

$$E_{kin,rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

gdzie I - całkowity moment bezwładności bryły, ω – prędkość kątowa.

137

Prawo powszechnego ciążenia, prawa Keplera



138

Prawo powszechnego ciążenia, prawa Keplera cz. I

Zrozumienie mechaniki ciał niebieskich i sił rządzących wszechświatem w skali makroskopowej to jeden z największych triumfów klasycznej fizyki, który ostatecznie zjednoczył zjawiska ziemskie i kosmiczne. Przez wieki uważano, że niebo i Ziemia podlegają zupełnie innym prawom natury. Przełom nastąpił dzięki dwóm niezwykłym umysłom: Johannesowi Keplerowi i Izaakowi Newtonowi, których prace ułożyły się w genialną, komplementarną całość.

139

Prawo powszechnego ciążenia, prawa Keplera cz. II

Johannes Kepler, opierając się na niezwykle precyzyjnych i żmudnych obserwacjach astronomicznych, wykonał pierwszy krok – sformułował trzy empiryczne prawa opisujące kinematykę Układu Słonecznego. Zburzył starożytny dogmat o idealnie kołowych orbitach, udowadniając, że planety poruszają się po elipsach, a ich prędkość zmienia się w zależności od odległości od Słońca. Prawa Keplera były rewolucyjne, ale miały charakter wyłącznie opisowy; precyzyjnie wyjaśniały jak poruszają się planety, ale nie potrafiły odpowiedzieć na pytanie dlaczego tak się dzieje.

140

Prawo powszechnego ciążenia, prawa Keplera cz. III

Brakujący element układanki, czyli fundament dynamiki kosmicznej, dostarczył Izaak Newton. W swoim prawie powszechnego ciążenia udowodnił, że ta sama, niewidzialna siła, która sprawia, że jabłko spada na ziemię, jest odpowiedzialna za utrzymanie Księżyca na jego orbicie wokół Ziemi oraz planet wokół Słońca. Newton zdefiniował grawitację jako uniwersalne oddziaływanie przyciągające, występujące między dowolnymi ciałami posiadającymi masę. Prawdziwym triumfem jego teorii było jednak to, że z matematycznego równania grawitacji można było czysto analitycznie wyprowadzić wszystkie trzy obserwacyjne prawa Keplera. W ten sposób mechanika nieba stała się dowodem na istnienie jednolitych, powszechnych praw fizyki, które obowiązują w całym wszechświecie.

141

Prawa Keplera cz. I

Zanim Newton sformułował swoje prawo ciążenia, Johannes Kepler, na podstawie żmudnych obserwacji astronomicznych, sformułował trzy empiryczne prawa opisujące ruch planet wokół Słońca

I Prawo Keplera (Prawo orbit) Każda planeta porusza się po orbicie w kształcie elipsy, przy czym Słońce znajduje się w jednym z jej ognisk.
(Wniosek: Odległość planety od Słońca zmienia się w czasie – od najmniejszej w peryhelium do największej w aphelium).

II Prawo Keplera (Prawo pól) Promień wodzący planety (odcinek łączący środek Słońca ze środkiem planety) zakreśla równe pola w równych odstępach czasu. *Wniosek kinematyczny:* Prędkość liniowa planety nie jest stała – planeta porusza się najszybciej, gdy jest najbliżej Słońca (peryhelium), a najwolniej, gdy jest od niego najdalej.

142

Prawa Keplera cz. II

III Prawo Keplera (Prawo okresów) Stosunek kwadratu okresu obiegu planety wokół Słońca T do sześciangu wielkiej półosi jej orbity a jest stały dla wszystkich planet w danym układzie planetarnym

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const}$$

Prawo powszechnego ciążenia cz. I

Każde dwa punkty materialne we Wszechświecie przyciągają się wzajemnie siłą, której wartość jest wprost proporcjonalna do iloczynu ich mas i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

gdzie

F – siła oddziaływania grawitacyjnego,

m_1, m_2 – masy oddziałujących ciał,

r – odległość między środkami tych ciał,

G – uniwersalna stała grawitacji $G \approx 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

Kierunek i zwrot: Siła grawitacji działa zawsze wzdłuż prostej łączącej środki obu ciał i jest zawsze siłą przyciągającą.

144

Jak Newton doszedł do prawa powszechnego ciążenia cz. I

Rozumowanie Newtona opierało się na przełomowym założeniu: siła, która powoduje spadanie przedmiotów na powierzchnię planety (nadająca im przyspieszenie ziemskie g), to dokładnie ta sama siła, która zmusza Księżyc do krążenia po orbicie, nadając mu przyspieszenie dośrodkowe a_K . Newton postanowił matematycznie porównać te dwa przyspieszenia.

145

Jak Newton doszedł do prawa powszechnego ciążenia cz. II

Wykorzystując wzór na przyspieszenie dośrodkowe, Newton uzależnił je od odległości Księżyca od środka Ziemi r_K oraz jego okresu obiegu T .

$$a_K = \frac{v^2}{r_K} = \frac{\left(\frac{2\pi r_K}{T}\right)^2}{r_K} = \frac{4\pi^2 r_K}{T^2}$$

Dzieląc otrzymane przyspieszenie Księżyca przez znane na powierzchni Ziemi przyspieszenie grawitacyjne $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$, Newton zauważył zależność liczbową

$$\frac{a_K}{g} \approx \frac{1}{3600}$$

146

Jak Newton doszedł do prawa powszechnego ciążenia cz. III

Ówczesne dane astronomiczne wskazywały, że odległość Księżyca od Ziemi r_K jest 60 razy większa niż promień Ziemi R_Z . Skoro $60^2 = 3600$, można było ułożyć równość

$$\frac{a_K}{g} \approx \left(\frac{1}{60}\right)^2 = \left(\frac{R_Z}{r_K}\right)^2$$

Powyższa proporcja dowiodła, że przy 60-krotnym oddaleniu się od środka Ziemi, przyspieszenie grawitacyjne (a tym samym siła ciężkości) maleje 3600 razy. Pozwoliło to Newtonowi sformułować postulat, że siła ciążenia maleje odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości między ciałami

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

147

Wektor natężenia pola grawitacyjnego

Natężenie pola grawitacyjnego to wektorowa wielkość fizyczna, określająca siłę grawitacji $\vec{F}_g$ działającą na jednostkową masę próbną m umieszczoną w danym punkcie pola.

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}_g}{m}$$

Z prawa powszechnego ciążenia wynika, że natężenie w odległości r od źródła pola o masie M wynosi

$$\gamma = G \frac{M}{r^2}$$

Wektor $\vec{\gamma}$ jest zawsze dośrodkowy – jego kierunek pokrywa się z promieniem, a zwrot wskazuje dokładnie na środek masy wytwarzającej pole.

148

Natężenie pola na powierzchni Ziemi

Dla punktu znajdującego się dokładnie na powierzchni Ziemi, odległość r jest równa promieniowi naszej planety R_Z . Wzór przyjmuje postać

$$\gamma = G \frac{M_Z}{R_Z^2}$$

Podstawiając stałe fizyczne i parametry Ziemi $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, $M_Z = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ i $R_Z = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$

Otrzymujemy wartość powszechnie znaną jako przyspieszenie ziemskie

$$\gamma \approx 9,81 \text{ m/s}^2 = g$$

149

Przybliżenie pola jednorodnego

Aby określić natężenie pola na pewnej wysokości h nad powierzchnią planety, zapisujemy

$$\gamma(h) = G \frac{M_Z}{(R_Z + h)^2}$$

Jeśli wysokość h jest niewielka, możemy rozwinąć ten wzór w szereg Taylora. Wyłączając R_Z w mianowniku i stosując przybliżenie dla małych wartości, otrzymujemy

$$\gamma(h) \approx \gamma_0 \left(1 - \frac{2h}{R_Z} + \dots \right)$$

Dla wysokości bliskich powierzchni Ziemi $h \ll R_Z$, człon $\frac{2h}{R_Z}$ jest pomijalnie mały.

Otrzymujemy wtedy przybliżenie pola jednorodnego, w którym natężenie jest stałe

$$\gamma(h) \approx \gamma_0 = g$$

150

Praca w polu grawitacyjnym

Praca W_{AB} wykonana przez siłę grawitacji przy przemieszczeniu ciała o masie m z punktu A do B wyraża się całką z siły po drodze

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} \left(-G \frac{Mm}{r^2} \right) dr$$

Po wykonaniu całkowania otrzymujemy prostą zależność

$$W_{AB} = GMm \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Praca ta zależy wyłącznie od położenia początkowego r_A i końcowego r_B , a całkowicie nie zależy od kształtu toru ruchu ciała.

151

Potencjał pola grawitacyjnego

Potencjał pola grawitacyjnego to wielkość skalarna opisująca samo pole grawitacyjne. Określa pracę, jaką siła grawitacji wykonałaby przy przeniesieniu jednostkowej masy próbnej z nieskończoności do danego punktu pola

$$V = -\frac{W}{m}$$

Podstawiając otrzymujemy równanie

$$V(r) = -\frac{GM}{r}$$

Potencjał przyjmuje wartości ujemne, ponieważ pole grawitacyjne jest zawsze przyciągające (ciało spada z nieskończoności do źródła, więc siła pola wykonuje pracę dodatnią, zmniejszając energię układu względem zera w nieskończoności). Jednostką potencjału jest J/kg

152

Energia potencjalna grawitacji cz. I

Energia potencjalna grawitacji opisuje stan energetyczny konkretnego ciała o masie m umieszczonego w polu grawitacyjnym masy M

$$U(r) = m \cdot V(r) = -G \frac{Mm}{r}$$

Różnica energii pomiędzy punktami A i B determinuje pracę wykonaną przez siłę grawitacji.

$$\Delta U = U_B - U_A = -GMm \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Energia potencjalna grawitacji cz. II

Zależność między pracą sił pola a zmianą energii potencjalnej wyraża się równaniem

$$W_{AB} = -\Delta U$$

Oznacza to, że pole grawitacyjne jest polem zachowawczym, z czego wynikają dwie kluczowe własności

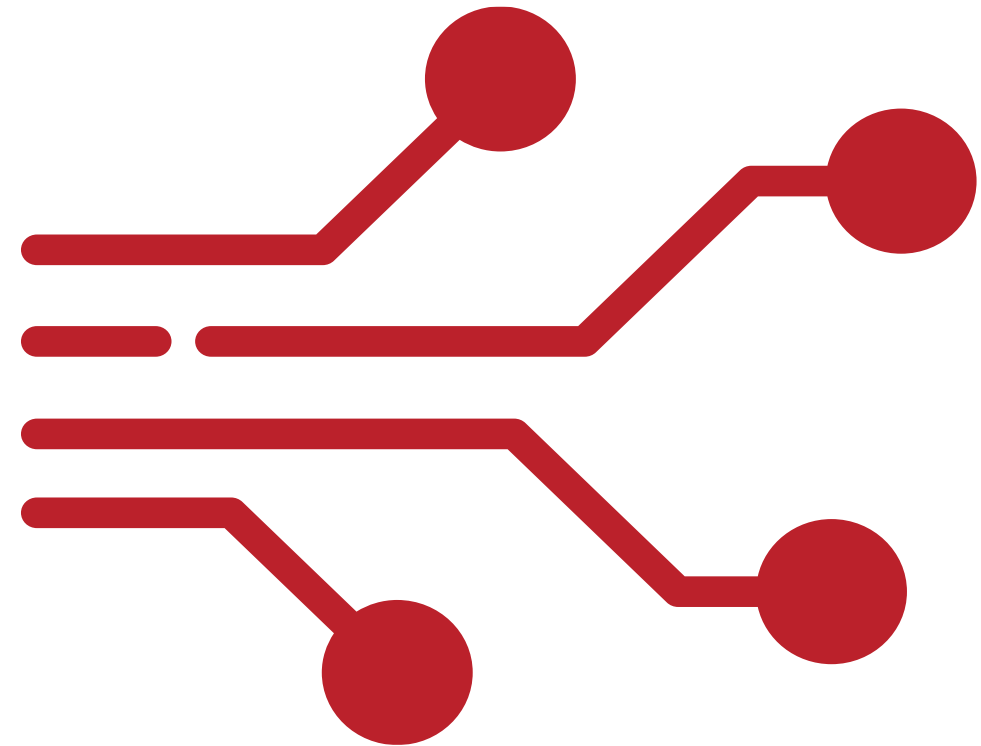
Praca zależy wyłącznie od położenia początkowego i końcowego, a nie zależy od drogi (toru ruchu).

Praca wykonana podczas przemieszczania ciała po dowolnym torze zamkniętym (powrót do punktu wyjścia) jest zawsze równa zero

$$W_{całkowite} = 0$$

154

Drgania i fale, oscylator harmoniczny, wahadło matematyczne i fizyczne



155

Drgania i fale, oscylator harmoniczny, wahadło matematyczne i fizyczne cz. I

Ruch w przyrodzie rzadko sprowadza się wyłącznie do jednokierunkowej wędrówki w przestrzeni; równie często materia zostaje uwięziona w cyklicznym tańcu wokół punktu równowagi, co prowadzi nas do fascynującego zagadnienia drgań. Centralnym, uniwersalnym modelem służącym do opisu takich zjawisk jest oscylator harmoniczny. Opisuje on układ, w którym siła przywracająca ciało do stanu równowagi (tzw. siła kierująca) jest wprost proporcjonalna do wielkości jego wychylenia. Znaczenie tego modelu w fizyce jest wprost trudne do przecenienia – choć początkowo służy do analizy prostego ciężarka na sprężynie, jego matematyczny formalizm pozwala ostatecznie zrozumieć wszystko: od drgań mostów pod wpływem wiatru, poprzez vibracje atomów w sieci krystalicznej, aż po oscylacje pól kwantowych.

156

Drgania i fale, oscylator harmoniczny, wahadło matematyczne i fizyczne cz. II

Klasycznym, podręcznikowym przykładem układu drgającego pod wpływem ziemskiej grawitacji jest wahadło, które w mechanice analizujemy na dwóch poziomach złożoności. Z jednej strony wprowadzamy wahadło matematyczne, będące skrajną idealizacją, w której całą masę skupiamy w jednym, bezwymiarowym punkcie zawieszonym na nieważkiej, nierozciągliwej nici. Z drugiej strony, dążąc do opisu rzeczywistych obiektów, definiujemy wahadło fizyczne, czyli dowolną bryłę sztywną zdolną do oscylacji wokół osi nieprzechodzącej przez jej środek masy. Porównanie tych dwóch ujęć doskonale ilustruje, w jaki sposób geometryczny rozkład masy (moment bezwładności) wpływa na dynamikę ruchu okresowego i uczy nas, jak płynnie przechodzić od abstrakcyjnych modeli do inżynierskiej rzeczywistości.

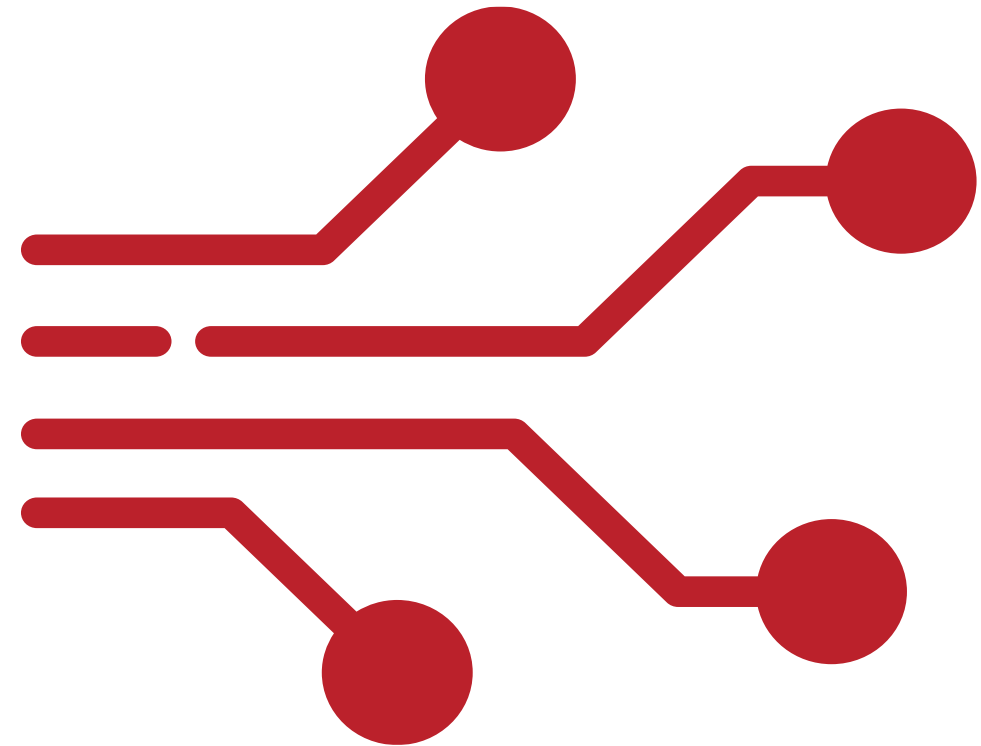
157

Drgania i fale, oscylator harmoniczny, wahadło matematyczne i fizyczne cz. III

Zwieńczeniem tego rozdziału jest krok dalej: przejście od zlokalizowanych drgań pojedynczego obiektu do globalnego zjawiska falowego. Kiedy oscylator nie znajduje się w próżni, lecz stanowi element szerszego ośrodka sprężystego, jego drgania zaczynają być systematycznie przekazywane sąsiadującym cząsteczkom. W ten sposób generowana jest fala – fascynujący, kinetyczny mechanizm, za pomocą którego natura potrafi transportować energię oraz pęd na ogromne odległości, nie przemieszczając przy tym makroskopowo samej materii. Zrozumienie tego płynnego przejścia od oscylacji do ruchu falowego to niezbędny fundament do późniejszego zgłębiania akustyki, optyki, a wreszcie dualizmu korpuskularno-falowego w fizyce współczesnej.

158

Oscylator harmoniczny



159

Równanie ruchu oscylatora harmonicznego cz. I

Siła kierująca (Prawo Hooke'a) - Ciało wprowadzone w drgania podlega sile, która jest zawsze skierowana do położenia równowagi i proporcjonalna do wychylenia x .

$$F = -kx$$

Równanie różniczkowe ruchu - podstawiając siłę do II zasady dynamiki Newtona $m \cdot a = F$, otrzymujemy

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -kx(t)$$

Równanie ruchu oscylatora harmonicznego cz. II

Wprowadzając parametr częstości kołowej drgań własnych

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

zapisujemy równanie oscylatora w standardowej formie

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

161

Kinematyka drgań cz. I

Rozwiązaniem powyższego równania jest funkcja harmoniczna opisująca wychylenie w czasie (gdzie A to amplituda, a ϕ to faza początkowa)

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Prędkość i przyspieszenie wyznaczamy jako kolejne pochodne położenia po czasie

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

162

Kinematyka drgań cz. II

Okres drgań T czyli czas pełnego cyklu zależy wyłącznie od masy układu i stałej sprężystości

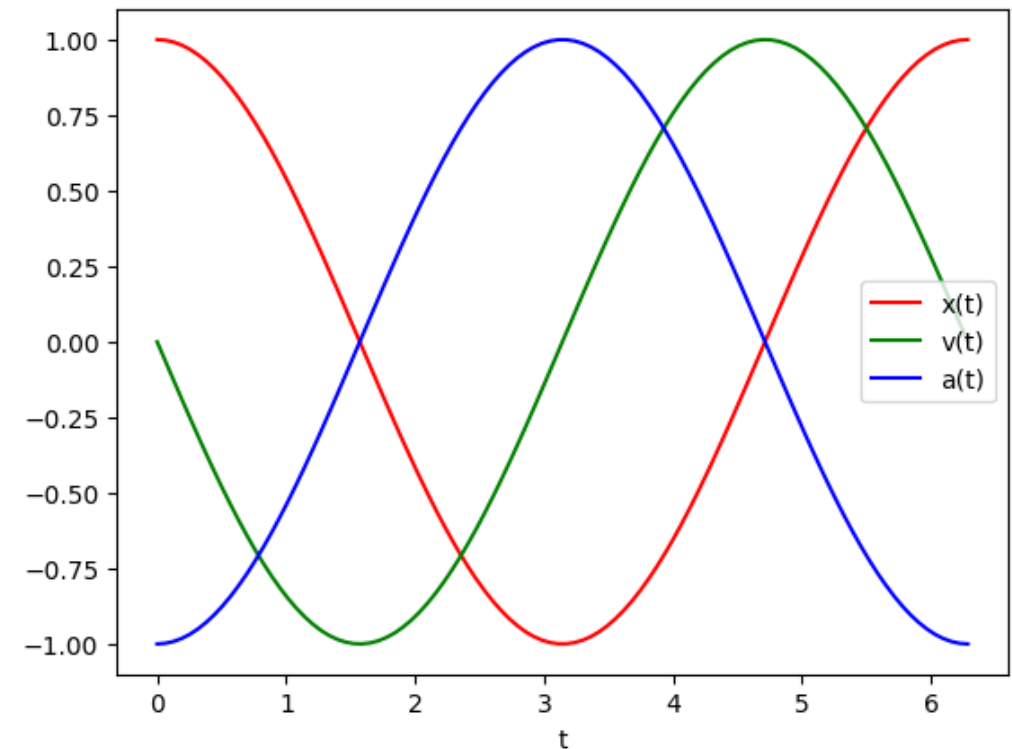
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

pozostaje całkowicie niezależny od amplitudy początkowego wychylenia.

Kinematyka drgań cz. III

Przyjrzyjmy się zależności położenia, prędkości i przyspieszenia na wykresie obok.

Na wykresie widzimy trzy krzywe harmoniczne o jednakowym okresie, przesunięte względem siebie w fazie w taki sposób, że prędkość $v(t)$ wyprzedza położenie $x(t)$ o ćwierć okresu $\frac{\pi}{2}$, a przyspieszenie $a(t)$ znajduje się w całkowitej przeciwfazie π do wychylenia.



164

Energia oscylatora harmonicznego cz. I

Energia potencjalna E_p jest równa pracy potrzebnej na wychylenie oscylatora z położenia równowagi

$$E_p = \int_0^x k x dx = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

Energia kinetyczna E_k : Podstawiając wzór na prędkość i wykorzystując zależność $m\omega^2 = k$ otrzymujemy

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

Energia oscylatora harmonicznego cz. II

Całkowitą energię mechaniczną E_{tot} otrzymujemy sumując obie energie i wyciągając wspólny czynnik przed nawias, korzystamy z tożsamości trygonometrycznej $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$E_{tot} = E_k + E_p = \frac{1}{2} k A^2 (\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi))$$

a stąd

$$E_{tot} = \frac{1}{2} k A^2$$

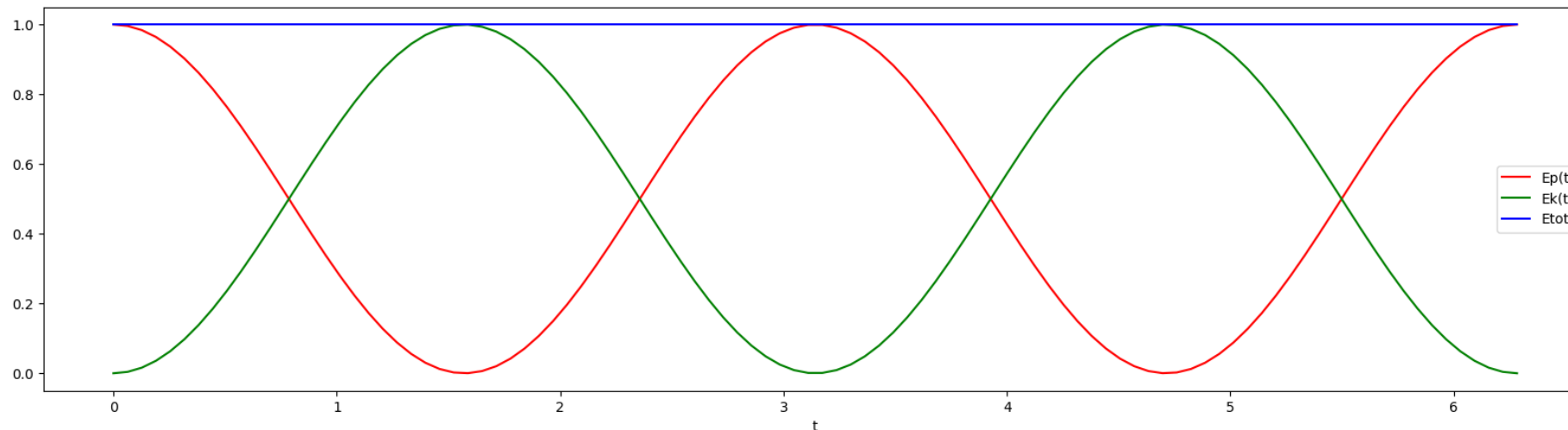
Całkowita energia drgań nietłumionych jest stała w czasie i zależy wyłącznie od kwadratu amplitudy drgań oraz sztywności układu.

166

Energia oscylatora harmonicznego cz. III

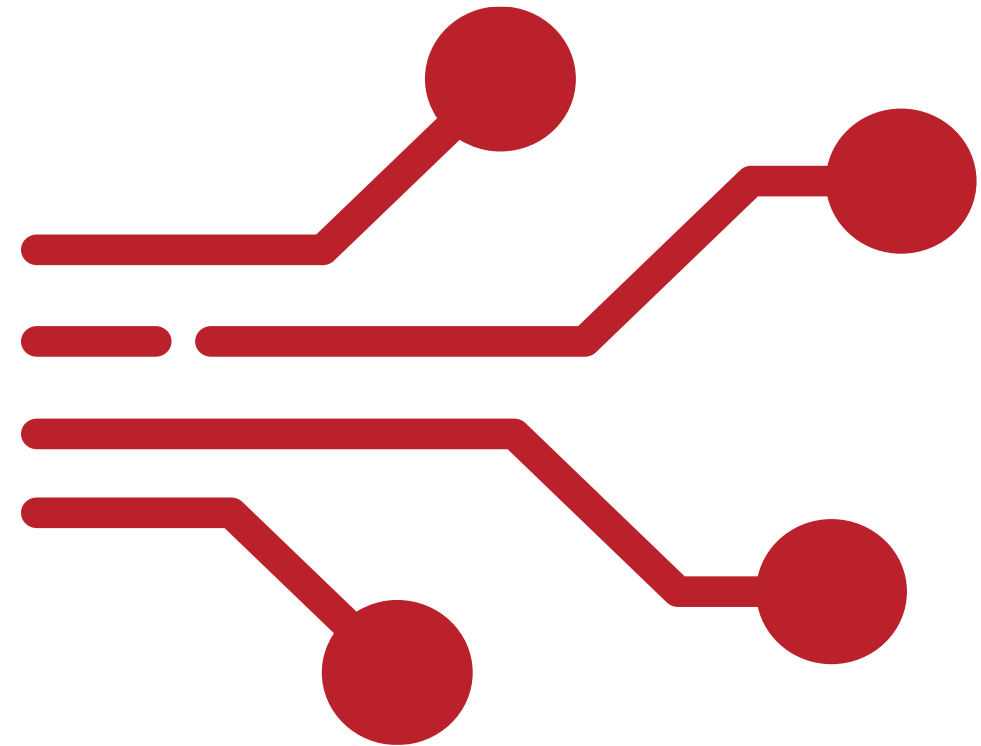
Zwizualizujemy na wykresie obydwie formy energii oscylatora oraz ich sumę

$$E_{tot} = E_k + E_p = \frac{1}{2} k A^2 (\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi))$$



167

Wahadło matematyczne i fizyczne



168

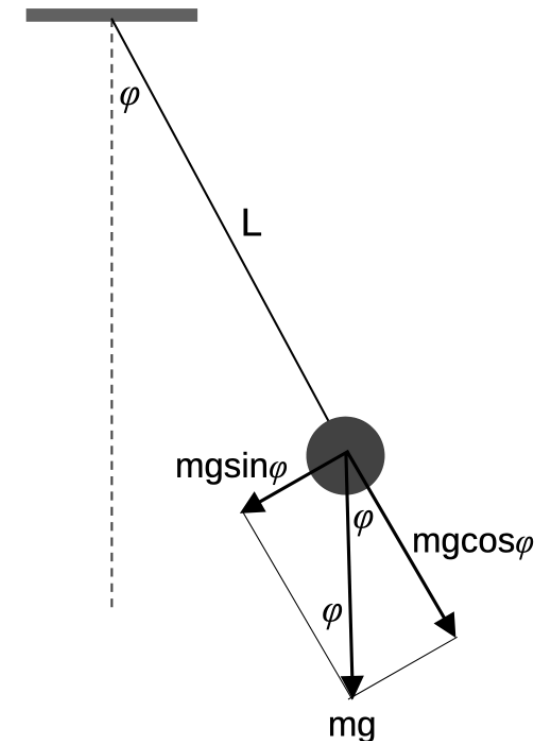
Równanie ruchu wahadła matematycznego cz. I

Wychylone z położenia równowagi wahadło porusza się pod wpływem momentu siły ciężkości. Korzystamy z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego $\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$

$$I \frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} = -mgL \sin(\phi(t))$$

Podstawiając moment bezwładności dla punktu materialnego $I = mL^2$ i dzieląc obustronnie przez mL^2 , otrzymujemy pełne, nieliniowe równanie ruchu wahadła

$$\frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin(\phi(t)) = 0$$



169

Równanie ruchu wahadła matematycznego cz. II

Wprowadzając oznaczenie częstości kołowej $\omega^2 = \frac{g}{L}$, równanie przyjmuje postać

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \omega^2 \sin(\phi(t)) = 0$$

Dla kątów wychylenia mniejszych niż 7° możemy zastosować przybliżenie małych kątów, gdzie sinus kąta jest w przybliżeniu równy samemu kątowi wyrażonemu w radianach $\sin(\phi) \approx \phi$. Otrzymujemy wówczas równanie identyczne z równaniem oscylatora harmonicznego

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \omega^2 \phi(t) = 0$$

170

Równanie ruchu wahadła matematycznego cz. III

Rozwiązaniem tego równania różniczkowego są znane nam z oscylatora harmonicznego funkcje trygonometryczne

$$\phi(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$

Ruch wahadła jest ruchem okresowym. Oznacza to, że po upływie ściśle określonego czasu, zwanego okresem T , wahadło powraca do tego samego położenia z tą samą prędkością. Z punktu widzenia matematyki stan układu musi się powtórzyć

$$\phi(t + T) = \phi(t)$$

Podstawmy czas $t + T$ do argumentu funkcji kosinus (czyli do tzw. fazy drgań)

$$A \cos(\omega(t + T) + \theta) = A \cos(\omega t + \omega T + \theta)$$

171

Równanie ruchu wahadła matematycznego cz. IV

Wiemy, że funkcja kosinus powtarza swoje wartości dokładnie co pełny kąt 2π radianów. Aby równość była prawdziwa, dodatkowy człon w argumencie, wynikający z upływu czasu T , musi być równy dokładnie jednemu pełnemu cyklowi (2π). Układamy więc równanie

$$\omega T = 2\pi$$

Z tego miejsca łatwo wyznaczamy ogólny związek między okresem drgań a częstością kątową

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

A stąd otrzymujemy równanie na okres drgań wahadła matematycznego

$$\omega^2 = \frac{g}{L} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Równanie ruchu wahadła fizycznego cz. I

Wahadłem fizycznym jest dowolna bryła sztywna, która może wykonywać wahania wokół poziomej osi obrotu, nieprzechodzącej przez jej środek masy.

Wychodząc z tych samych rozważań co dla wahadła matematycznego możemy zapisać ogólniejsze równanie uwzględniające dowolny moment bezwładności układu w postaci

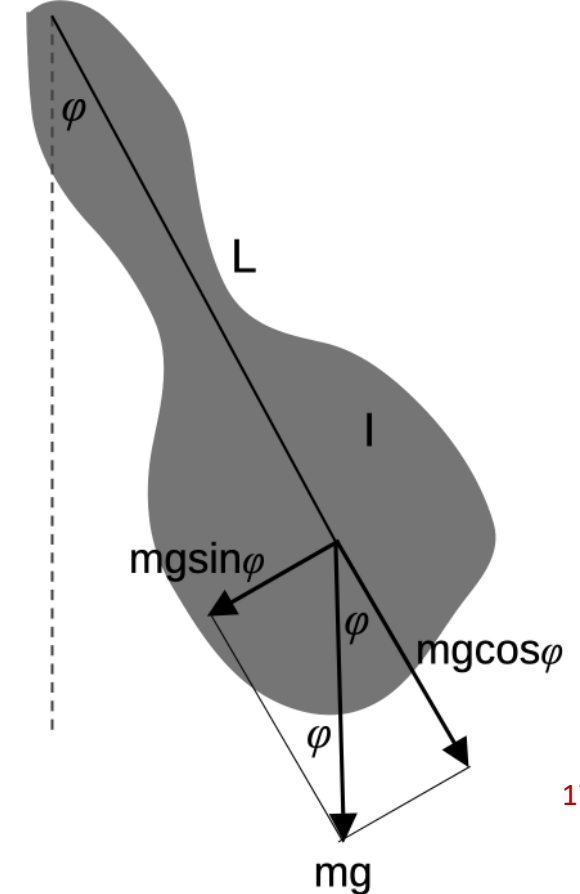
$$I \frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} = -mgL \sin(\phi(t))$$

A następnie wprowadzając nową wielkość do równania

$$\omega^2 = \frac{mgL}{I}$$

gdzie L jest odległością środka masy od osi obrotu otrzymujemy równanie

$$\frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} + \omega^2 \sin(\phi(t)) = 0$$



173

Równanie ruchu wahadła fizycznego cz. II

Przy założeniu małych kątów uzyskujemy takie samo rozwiązanie jak dla oscylatora harmonicznego i dla wahadła matematycznego postaci

$$\phi(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$

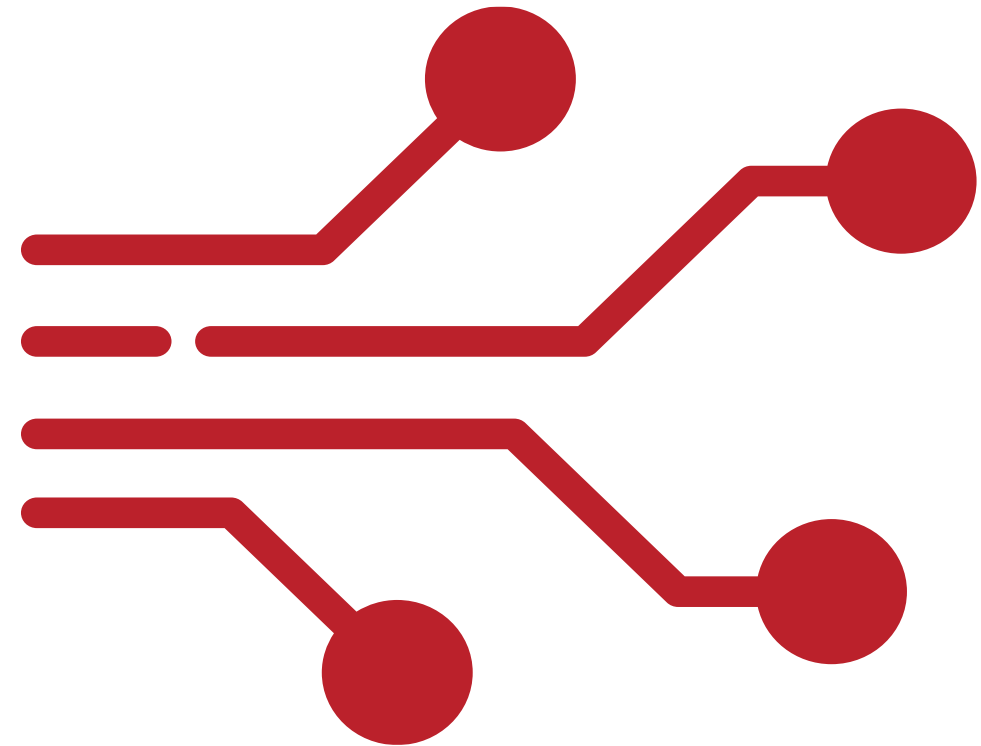
Tym razem równanie na okres drgań wahadła fizycznego przyjmuje postać

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}}$$

Widzimy, że wyrażenie na okres jest bardziej ogólne i wraz z dążeniem momentu bezwładności do skupienia całej masy w małej kulce o momencie bezwładności $I = mL^2$ wzór przekształca się do przypadku prostego wahadła matematycznego.

174

Równanie falowe



175

Równanie falowe cz. I

Rozważamy jednowymiarowy łańcuch n jednakowych mas m , oddalonych o dystans a i połączonych sprężynami o stałej sprężystości k . Badamy wychylenie z położenia równowagi j -tej masy, oznaczane jako $u_j(t)$.

Z II zasady dynamiki Newtona, siła działająca na j -tą masę pochodzi od dwóch sąsiednich sprężyn

$$m \frac{d^2 u_j}{dt^2} = k(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1})$$

Przejście do ośrodka ciągłego: Zakładamy granicę, w której odległość $a \rightarrow 0$ oraz $m \rightarrow 0$, przy zachowaniu stałej gęstości liniowej $\rho = m/a$. Dyskretne wychylenia zastępujemy funkcją ciągłą $u(x, t)$.

176

Równanie falowe cz. II

Wyrażenie w nawiasie staje się drugą pochodną przestrzenną

$$u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1} \approx a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Po podstawieniu i uporządkowaniu otrzymujemy fundamentalne równanie różniczkowe cząstkowe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Gdzie $c = a \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$ to prędkość propagacji fali.

Rozwiązania równania falowego

Fala płaska biegnąca

Rozwiązaniem opisującym falę propagującą w przestrzeni (np. w prawo) jest funkcja harmoniczna

$$u(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$$

Gdzie A – amplituda, k – liczba falowa, ω – częstość kołowa,
 ϕ – faza początkowa. Prędkość fazowa fali to $c = \frac{\omega}{k}$.

Fala stojąca

Powstaje w ograniczonym ośrodku (np. struna o długości L zamocowana na końcach $u(0, t) = u(L, t) = 0$). Rozwiązanie to iloczyn części przestrzennej i czasowej

$$u_n(x, t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t + \phi_n)$$

gdzie: $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$

Własności i propagacja fal

Zasada superpozycji

W ośrodkach liniowych, jeżeli w danym punkcie spotykają się dwie (lub więcej) fale, całkowite wychylenie jest algebraiczną sumą wychyleń składowych

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

Interferencja

Bezpośredni skutek superpozycji spójnych fal.

Konstruktywna (wzmocnienie) - Fale zgodne w fazie ($\Delta\phi = 0, 2\pi, \dots$). Amplituda wypadkowa
 $A = A_1 + A_2$

Destruktywna (wygaszenie) - fale w przeciwfazie ($\Delta\phi = \pi, 3\pi, \dots$). Amplituda wypadkowa $A = |A_1 - A_2|$

Fale dźwiękowe (Akustyka) cz. I

Fale dźwiękowe to mechaniczne fale **podłużne**. Rozchodzą się w ośrodkach sprężystych (gazach, cieczach, ciałach stałych) w postaci przemieszczających się, cyklicznych zagęszczeń i rozrzedzeń cząsteczek. W przeciwieństwie do fal elektromagnetycznych, dźwięk nie rozchodzi się w próżni.

Zjawisko to idealnie wpisuje się w wyprowadzone wcześniej równanie falowe. Funkcja falowa $u(x, t)$ może w tym przypadku opisywać nie tylko fizyczne przemieszczenie cząsteczek z położenia równowagi, ale także – co jest często wygodniejsze – lokalną zmianę ciśnienia akustycznego $\Delta p(x, t)$.

180

Fale dźwiękowe (Akustyka) cz. II

Prędkość fali dźwiękowej zależy od właściwości sprężystych i gęstości (ρ) ośrodka. W ciałach stałych kluczowy jest moduł Younga (E), natomiast w płynach – moduł objętościowy (B)

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{ (ciała stałe)} \quad \sqrt{\frac{B}{\rho}} \text{ (płyny)}$$

W powietrzu (w temperaturze 20°C) prędkość ta wynosi około 343 m/s.

Efekt Dopplera cz. I

Zjawisko polegające na pozornej zmianie częstotliwości (i długości) fali rejestrowanej przez obserwatora. Wynika ono z fizycznego ruchu źródła fali, obserwatora lub obu tych elementów względem ośrodka, w którym fala się rozchodzi.

$$f' = f_0 \frac{v \pm v_{obs}}{v \mp v_{zrod}}$$

Gdzie f' – częstotliwość odbierana (słyszana) przez obserwatora, f_0 – częstotliwość emitowana przez źródło, v – prędkość propagacji fali w danym ośrodku (np. prędkość dźwięku), v_{obs} – prędkość obserwatora względem ośrodka, v_{zrod} – prędkość źródła względem ośrodka.

182

Efekt Dopplera cz. II

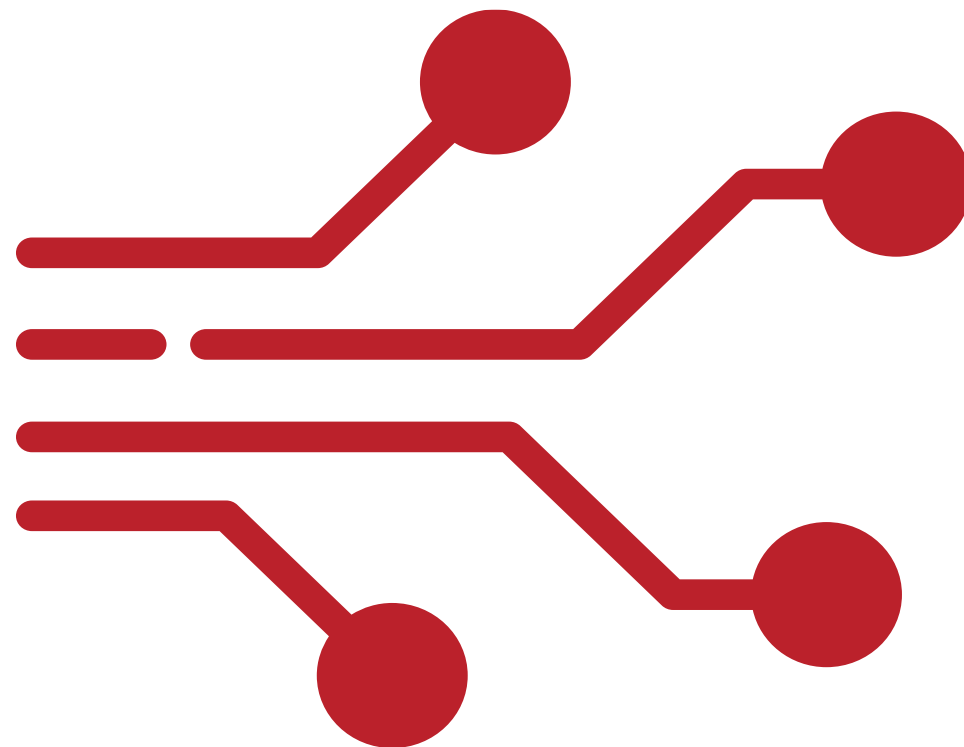
Kiedy obiekt zbliżanie się używamy znaków dających większy wynik ułamka (górne znaki: + w liczniku, - w mianowniku). Obserwator rejestruje falę o wyższej częstotliwości (dźwięk wyższy/piskliwy).

Kiedy obiekt oddala się używamy znaków dających mniejszy wynik ułamka (dolne znaki: - w liczniku, + w mianowniku). Obserwator rejestruje falę o niższej częstotliwości (dźwięk niższy/basowy).

Zjawisko Dopplera to jeden z tych efektów, które każdy z nas zna intuicyjnie – wystarczy przypomnieć sobie zmieniający się dźwięk syreny pędzącej karetki pogotowia.

183

Sprężystość ciał stałych



184

Podstawy teorii sprężystości cz. I

Teoria sprężystości to dział mechaniki opisujący, jak ciała odkształcają się pod wpływem obciążeń (sił, momentów, ciśnień) i jak wracają do pierwotnego kształtu po ich usunięciu.

Ciało sprężyste: Powraca do pierwotnego kształtu i wymiarów całkowicie po ustaniu działania sił zewnętrznych.

Ciało plastyczne: Ciało, w którym po usunięciu obciążenia pozostają odkształcenia trwałe.

Odkształcenie: Zmiana kształtu lub wymiarów ciała pod wpływem obciążenia. Klasyczna teoria sprężystości zakłada analizę wyłącznie małych odkształceń.

185

Podstawy teorii sprężystości cz. II

Aby oderwać się od konkretnych wymiarów próbki i mówić o uniwersalnych własnościach materiału, wprowadzamy dwie kluczowe wielkości.

Naprężenie osiowe (σ)

Jest to miara sił wewnętrznych przenoszonych przez materiał na jednostkę powierzchni.

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

gdzie: σ – naprężenie [$\text{Pa} = \text{N/m}^2$], F – siła działająca prostopadle do powierzchni przekroju [N], A – pole przekroju poprzecznego [m^2].

186

Podstawy teorii sprężystości cz. III

Odkształcenie względne (ϵ)

Stanowi bezwymiarową miarę zmiany długości ciała w stosunku do jego długości początkowej.

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

gdzie: ϵ – odkształcenie względne, Δl – bezwzględna zmiana długości, l_0 – długość początkowa.

187

Prawo Hooke'a i stałe materiałowe cz. I

W granicach sprężystości (dla małych odkształceń) zależność między naprężeniem a odkształceniem jest wprost proporcjonalna (liniowa). Zależność tę opisuje Prawo Hooke'a

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

Moduł Younga (E) jest to moduł sprężystości podłużnej, wyrażany w paskalach [Pa]. Jest to stała charakterystyczna dla danego materiału (np. stali, miedzi). Im większe E , tym materiał jest sztywniejszy (wymaga większego naprężenia do wywołania tego samego odkształcenia).

188

Prawo Hooke'a i stałe materiałowe cz. II

Współczynnik Poissona ν

Kiedy rozciągamy pręt, nie tylko się on wydłuża, ale również zwęża. Stosunek odkształcenia poprzecznego do podłużnego określa bezwymiarowy współczynnik Poissona. Stanowi on obok modułu Younga drugą fundamentalną stałą opisującą materiał izotropowy.

189

Prawo Hooke'a i stałe materiałowe cz. III

Związek między modułem Younga E a stałą sprężystości k

W fizyce szkolnej często używa się makroskopowej wersji prawa Hooke'a opisującej konkretną sprężynę

$$F = k\Delta l$$

gdzie: k – współczynnik sprężystości [N/m].

Aby znaleźć związek między makroskopowym k a materiałowym E , wyznaczamy siłę z definicji naprężenia i podstawiamy wzór na odkształcenie

$$F = \sigma A = (E\epsilon)A = E \left(\frac{\Delta l}{l_0} \right) A$$

190

Prawo Hooke'a i stałe materiałowe cz. IV

Porządkując to wyrażenie

$$F = \left(\frac{EA}{l_0} \right) \Delta l$$

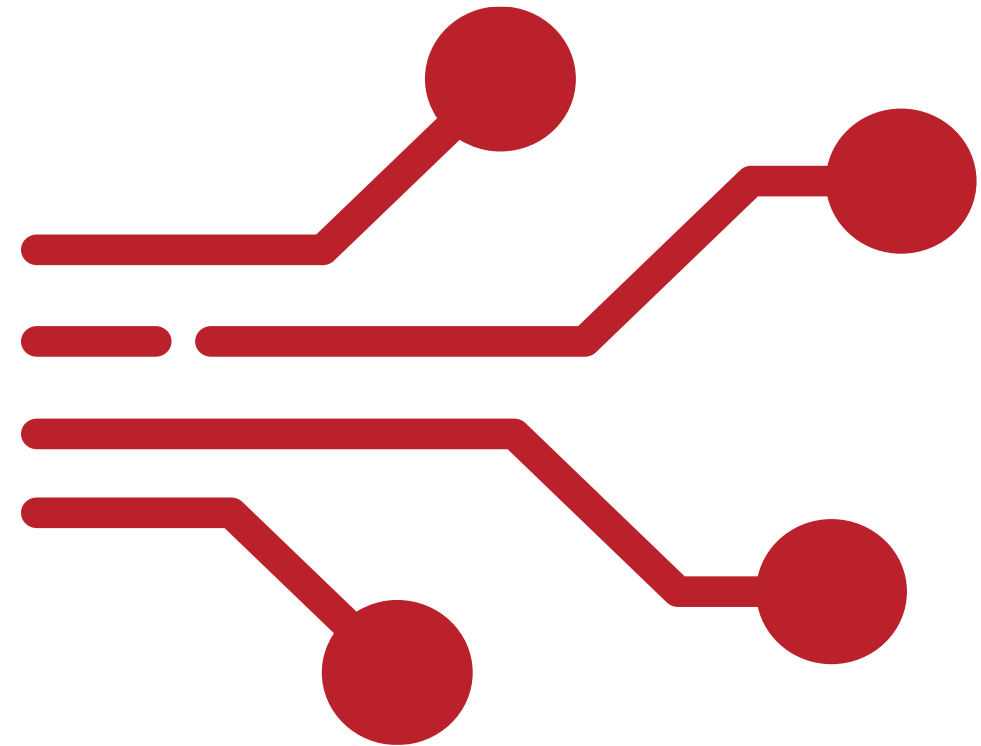
Porównując z postacią $F = k\Delta l$ otrzymujemy

$$k = \frac{EA}{l_0}$$

Sztywność konkretnego elementu k jest wprost proporcjonalna do modułu Younga jego materiału E i pola przekroju A , a odwrotnie proporcjonalna do jego długości l_0 .

191

Hydrostatyka



192

Hydrostatyka cz. I

Model cieczy i pojęcie ciśnienia

Ciecz w ujęciu fizycznym: Stan skupienia, który zachowuje stałą objętość (jest praktycznie nieściśliwy), ale nie ma własnego kształtu (przyjmuje kształt naczynia).

Ciecz idealna (model hydrostatyczny): Przyjmujemy, że jest całkowicie nieściśliwa $\rho = \text{const}$ oraz pozbawiona lepkości (brak sił tarcia wewnętrznego). W hydrostatyce analizujemy ją w stanie spoczynku makroskopowego.

193

Hydrostatyka cz. II

Ciśnienie p - Skalarna wielkość fizyczna, definiowana jako stosunek wartości siły nacisku (tzw. siły parcia $F_{\perp}$) działającej prostopadle do powierzchni, do pola tej powierzchni S .

$$p = \frac{F_{\perp}}{S}$$

Jednostką ciśnienia w układzie SI jest Pascal

$$1Pa = 1N/m^2$$

194

Prawo Pascala

Ciśnienie zewnętrzne wywarte na zamkniętą, nieściśliwą ciecz (lub gaz) rozchodzi się w niej jednakowo we wszystkich kierunkach i dociera do każdego punktu płynu bez zmiany wartości.

Prasa hydrauliczna (wzmacniacz siły): Układ połączonych naczyń z tłokami o różnych polach przekroju. Zgodnie z Prawem Pascala ciśnienie pod oboma tłokami musi być równe $p_1 = p_2$

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}$$

Działając małą siłą na mały tłok, uzyskujemy zwielokrotnioną siłę na dużym tłoku. (*Uwaga: Praca wykonana przez oba tłoki pozostaje taka sama, zyskujemy siłę kosztem pokonanej drogi*).

195

Ciśnienie hydrostatyczne i paradoks hydrostatyczny

Ciśnienie wewnątrz płynu rośnie wraz z głębokością, co wynika z ciężaru warstw leżących wyżej.

Rozważmy słup cieczy o polu podstawy S i wysokości h . Jego masa to $m = \rho V = \rho Sh$, a ciężar (siła parcia) to $F = mg = \rho Shg$.
Dzieląc siłę przez pole S , otrzymujemy ciśnienie słupa cieczy

$$p_{hyd} = \rho gh$$

Pełne ciśnienie na głębokości h
Należy uwzględnić ciśnienie zewnętrzne p_0 wywierane na swobodną powierzchnię (np. atmosferyczne)

$$p = p_0 + \rho gh$$

Paradoks hydrostatyczny: Ciśnienie na dnie naczynia zależy wyłącznie od głębokości h i rodzaju cieczy ρ , a nie zależy od kształtu naczynia ani całkowitej ilości cieczy.

196

Ciśnienie atmosferyczne

Powietrze otaczające Ziemię również wywiera ciśnienie hydrostatyczne (choć jego gęstość maleje z wysokością).

Barometr rtęciowy - Szklana rurka dnem do góry, wypełniona rtęcią i zanurzona w otwartym naczyniu z rtęcią. Ciśnienie w rurce na poziomie powierzchni cieczy w naczyniu otwartym musi być równe ciśnieniu atmosferycznemu $p_A = p_B$

Otrzymujemy równość, ciśnienie słupa rtęci równoważy ciśnienie atmosferyczne

$$p_{atm} = \rho_{Hg}gh$$

Dla normalnego ciśnienia atmosferycznego $p_{atm} \approx 1013 \text{ hPa}$ i gęstości rtęci, wysokość ta wynosi ok. 760 mm. Stąd historyczna jednostka ciśnienia: milimetr słupa rtęci $1 \text{ mmHg} = 1 \text{ Tor} \approx 133 \text{ Pa}$.

197

Prawo Archimedesesa

Wynika bezpośrednio z różnicy ciśnień hydrostatycznych działających na dno i górę zanurzonego obiektu.

Rozważmy prostopadłościan o wysokości l i polu podstawy S , zanurzony całkowicie tak, że jego górna podstawa jest na głębokości h .

Wypadkowa siła wyporu F_w

$$F_w = F_d - F_g = \rho g S(h + l) - \rho g S h = \rho g S l$$

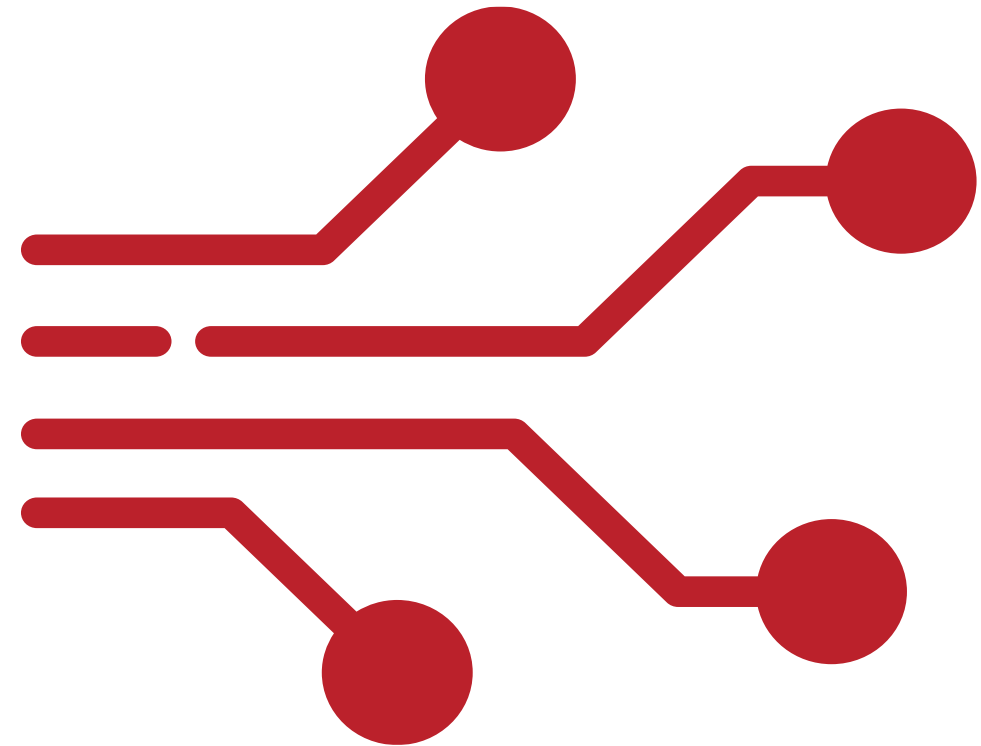
Ponieważ $S \cdot l = V$ (objętość wypartej cieczy), otrzymujemy

$$F_w = \rho g V$$

Na każde ciało zanurzone (częściowo lub całkowicie) w płynie (cieczy lub gazie) działa pionowa, skierowana ku górze siła wyporu, której wartość jest równa ciężarowi płynu wypartego przez to ciało.

198

Elementy dynamiki płynów



199

Elementy dynamiki płynów cz. I

Równanie ciągłości (Zasada zachowania masy)

Dla płynu nieściśliwego przepływającego przez przewód, objętość płynu wpływającą do rury musi być równa objętości wypływającej. Oznacza to, że strumień objętości jest stały

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = \text{const}$$

Jeśli przekrój rury S maleje, prędkość płynu v musi wzrosnąć. To dlatego woda z węża ogrodowego płynie szybciej, gdy przytkniesz palec do wylotu, zmniejszając przekrój.

200

Elementy dynamiki płynów cz. II

Równanie Bernoulliego (Zasada zachowania energii)

Równanie to opisuje przepływ jako proces wymiany energii. Suma energii ciśnienia, energii kinetycznej i energii potencjalnej dla jednostki objętości płynu jest stała

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{const}$$

p – energia ciśnienia (potencjał ciśnienia)

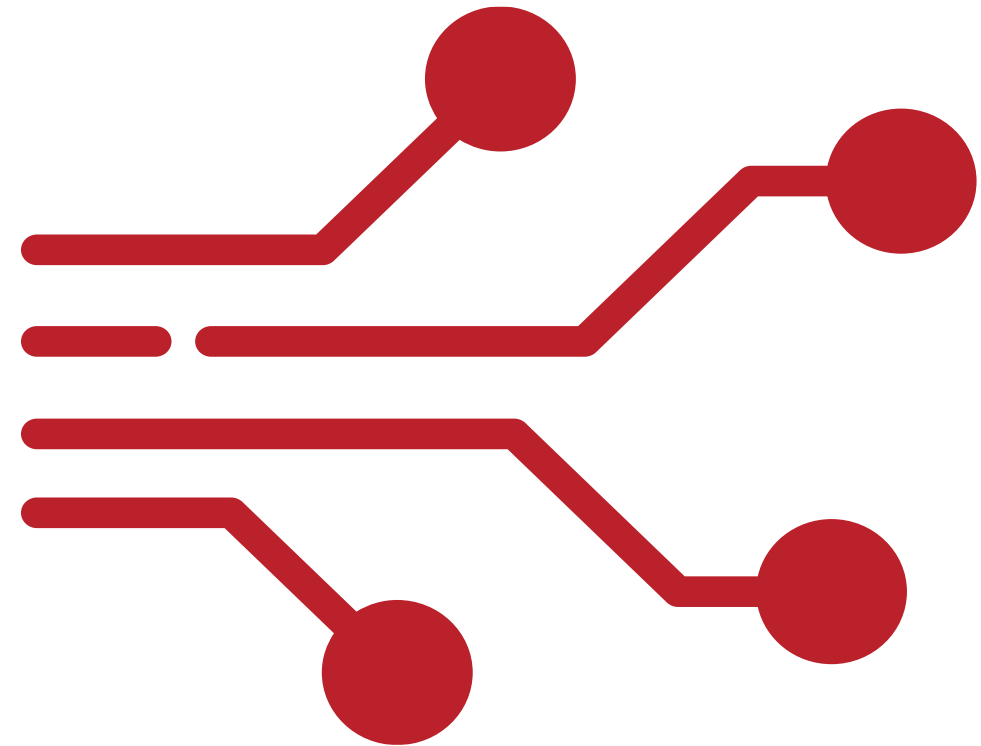
$\frac{1}{2}\rho v^2$ – gęstość energii kinetycznej

ρgh – gęstość energii potencjalnej

Równanie to pokazuje, że w przepływającym płynie wzrost prędkości (energii kinetycznej) musi wiązać się ze spadkiem ciśnienia p . To fundamentalny mechanizm działania m.in. przepływomierzy czy skrzydeł samolotów.

201

Termodynamika: równanie stanu gazu doskonałego, przemiany gazowe, zasady termodynamiki, sprawność silnika Carnota, przejścia fazowe



202

Termodynamika cz. I

Przechodząc do termodynamiki, diametralnie zmieniamy naszą fizyczną perspektywę. Zamiast śledzić mechaniczny ruch pojedynczych punktów czy sztywnych brył, zaczynamy analizować układy składające się z niewyobrażalnej liczby cząsteczek. Naszym punktem wyjścia jest gaz doskonały – genialny w swej prostocie model idealizacyjny, który pomija siły spójności i własną objętość drobin. Pozwala to na sformułowanie uniwersalnego równania stanu gazu ($pV = nRT$), które w elegancki sposób wiąże parametry makroskopowe: ciśnienie, objętość i temperaturę. Na jego fundamencie opieramy analizę klasycznych przemian gazowych, obserwując, w jaki sposób układy fizyczne reagują na zmiany warunków zewnętrznych.

203

Termodynamika cz. II

Prawdziwym sercem i filozoficznym trzonem tego działu są zasady termodynamiki. Pierwsza zasada stanowi potężne rozszerzenie prawa zachowania energii, łącząc mechaniczne pojęcie pracy z przepływem ciepła i zmianą energii wewnętrznej układu. Z kolei druga zasada wprowadza do fizyki zjawisko nieodwracalności procesów naturalnych. Brutalnie uświadamia nam ona, że nie cała energia cieplna może zostać zamieniona na użyteczną pracę mechaniczną. Konsekwencją tego prawa jest istnienie teoretycznego limitu wydajności maszyn cieplnych. Analizując wyidealizowany cykl silnika Carnota, udowadniamy, że maksymalna sprawność jakiegokolwiek elektrowni czy silnika zależy wyłącznie od skrajnych temperatur układu i nigdy nie osiągnie stu procent.

204

Termodynamika cz. III

Zwieńczeniem rozważań w tym dziale są przejścia fazowe, gdzie porzucamy gazową idealizację i mierzymy się ze złożonością rzeczywistej materii. Badamy stany skupienia i zjawiska takie jak topnienie czy parowanie, podczas których substancje gwałtownie przebudowują swoją strukturę wewnętrzną, pochłaniając lub oddając ogromne ilości ciepła utajonego, nie zmieniając przy tym swojej temperatury. Zrozumienie tych zjawisk to klucz do współczesnej inżynierii cieplnej, budowy systemów chłodniczych oraz zrozumienia procesów kształtujących klimat naszej planety.

205

Stan gazu i Równanie Clapeyrona

Stan gazu opisują trzy makroskopowe parametry stanu: ciśnienie p , objętość V oraz temperatura T .

Mol substancji: Ilość materii zawierająca dokładnie $6,022 \times 10^{23}$ cząstek (atomów lub cząsteczek). Wartość ta to liczba Avogadra N_A .

Prawo Avogadra: W tych samych warunkach ciśnienia i temperatury, równe objętości różnych gazów zawierają taką samą liczbę cząsteczek.

Równanie stanu gazu doskonałego (Równanie Clapeyrona):

Z połączenia praw gazowych i prawa Avogadra otrzymujemy uniwersalne równanie

$$pV = nRT$$

gdzie $n = \frac{m}{M}$ – liczba moli, m – masa gazu, M – masa molowa, $R \approx 8,31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ – uniwersalna stała gazowa.

Przemiany gazowe cz. I

Wynikają bezpośrednio z równania stanu gazu $pV/T = \text{const}$ dla stałej masy gazu.

Przemiana izotermiczna $T = \text{const}$: Prawo Boyle'a-Mariotte'a Przy stałej temperaturze ciśnienie gazu jest odwrotnie proporcjonalne do jego objętości. Układ musi powoli wymieniać ciepło z otoczeniem.

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

Przemiana izobaryczna $p = \text{const}$: Prawo Gay-Lussaca Przy stałym ciśnieniu objętość gazu jest wprost proporcjonalna do jego temperatury.

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

207

Przemiany gazowe cz. II

Przemiana izochoryczna $V = \text{const}$: Prawo Charlesa Przy stałej objętości ciśnienie gazu rośnie proporcjonalnie do wzrostu temperatury.

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

Gdzie dla wszystkich trzech przemian parametry p_1, V_1, T_1 oraz p_2, V_2, T_2 Są odpowiednio ciśnieniem, objętością i temperaturą przed i po przemianie.

Mikroskopowy obraz gazu doskonałego cz. I

Gaz doskonały to model, w którym cząsteczki traktujemy jako punkty materialne, zderzające się doskonale sprężyście ze sobą i ze ściankami naczynia. Zderzenia te generują makroskopowe ciśnienie.

Ciśnienie z perspektywy mechaniki Newtona

Zmiana pędu cząsteczki odbijającej się od ścianki wynosi $\Delta p_x = 2mv_x$.

Uśredniając siłę uderzeń N cząsteczek na powierzchnię ściany, otrzymujemy

$$p = \frac{1}{3} \frac{Nm\overline{v^2}}{V}$$

209

Mikroskopowy obraz gazu doskonałego cz. II

Mikroskopowa definicja temperatury: Porównując powyższy wynik z równaniem

$$pV = Nk_B T$$

wiążemy temperaturę ze średnią energią kinetyczną ruchu postępowego cząsteczek

$$\frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{3}{2} k_B T$$

Temperatura to miara chaotycznego ruchu cząsteczek. Stała Boltzmannna

$$k_B \approx 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K.}$$

210

Stopnie swobody i Energia Wewnętrzna U

Zasada ekwipartycji energii: W stanie równowagi termodynamicznej, na każdy niezależny stopień swobody f cząsteczki przypada średnio taka sama energia:

$$E_{\text{śr}} = \frac{1}{2} k_B T$$

Stopnie swobody f : Liczba niezależnych współrzędnych potrzebnych do opisu ruchu.

Gaz jednoatomowy (np. Hel): $f = 3$ (tylko ruch postępowy x, y, z).

Gaz dwuatomowy (np. O_2): $f = 5$ (3 postępowe + 2 obrotowe).

Energia wewnętrzna U : Dla gazu doskonałego to suma energii kinetycznych wszystkich cząsteczek (brak oddziaływań potencjalnych między nimi). Zależy wyłącznie od temperatury

$$U = N \frac{f}{2} k_B T = n \frac{f}{2} RT$$

211

I Zasada Termodynamiki

Stanowi uogólnienie zasady zachowania energii. Zmiana energii wewnętrznej układu ΔU jest sumą ciepła dostarczonego do układu Q i pracy wykonanej nad układem W .

$$\Delta U = Q + W$$

$Q > 0$ układ pobiera ciepło, $Q < 0$ układ oddaje ciepło, $W > 0$ otoczenie wykonuje pracę nad gazem (sprężanie), $W < 0$ gaz wykonuje pracę nad otoczeniem (rozprężanie).

Praca objętościowa gazu: W infinitezymalnym procesie praca wykonywana *przez* gaz to $p dV$. Praca wykonana *nad* gazem wynosi zatem $dW = -p dV$.
Postać różniczkowa I zasady termodynamiki:

$$dU = dQ - p dV$$

212

Ciepło właściwe i Wzór Mayera

Ciepło molowe C to ilość ciepła potrzebna do ogrzania jednego mola gazu o 1 kelwin $C = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT}$
Jego wartość zależy od rodzaju prowadzonego procesu.

Ciepło molowe przy stałej objętości C_V :

Ponieważ $dV = 0$, gaz nie wykonuje pracy $dW = 0$. Całe ciepło idzie na zmianę energii wewnętrznej $dQ = dU$:

$$C_V = \frac{f}{2} R$$

Ciepło molowe przy stałym ciśnieniu C_p :

Gaz podgrzewany izobarycznie rozszerza się, wykonując pracę. Część ciepła idzie na wzrost temperatury, a część na pracę przeciwko otoczeniu, stąd $C_p > C_V$.

Różniczkując równanie Clapeyrona $p dV = n R dT$ wstawiając do I zasady, otrzymujemy absolutnie kluczową zależność:

$$C_p - C_V = R$$

Praca w procesach przemiany (Izoterma i Adiabata)

Przemiana izotermiczna $T = \text{const}$ - Skoro temperatura się nie zmienia, to $\Delta U = 0$. Całe dostarczone ciepło zamienia się w pracę mechaniczną $Q = -W$.

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

Przemiana adiabatyczna $Q = 0$ - Proces, w którym nie ma wymiany ciepła z otoczeniem (np. proces zachodzący bardzo gwałtownie). $dU = -pdV \rightarrow$ rozprężający się gaz wykonuje pracę kosztem własnej energii wewnętrznej, więc drastycznie się ochładza!

$$pV^\gamma = \text{const}$$

Stosunek ciepł molowych (wykładnik adiabaty)

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

W zmiennych T, V

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

214

Cykl Carnota

Zaproponowany przez S. Carnota (1824) – teoretyczny, idealny i odwracalny cykl termodynamiczny wyznaczający maksymalną możliwą sprawność silnika cieplnego pracującego między dwiema temperaturami: gorącą T_1 i zimną T_2 .

Składa się z 4 odwracalnych etapów:

- Rozprężanie izotermiczne: gaz pobiera ciepło Q_1 ze źródła w temp. T_1 .
- Rozprężanie adiabatyczne: gaz ochładza się do T_2 wykonując pracę.
- Sprężanie izotermiczne: gaz oddaje ciepło Q_2 do chłodnicy w temp. T_2 .
- Sprężanie adiabatyczne: gaz nagrzewa się z powrotem do T_1 .

Sprawności η to stosunek pracy użytecznej do ciepła pobranego. W cyklu idealnym zależy wyłącznie od temperatur:

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} \xrightarrow{\text{Carnot}} \eta_{\max} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

215

II Zasada Termodynamiki

I zasada to tylko bilans energii. II zasada nadaje kierunek procesom zachodzącym w naturze – wprowadza strzałkę czasu.

Równoważne sformułowania historyczne:

- Clausiusa: Ciepło nie może samorzutnie przepływać od ciała chłodniejszego do cieplejszego.
- Kelvina-Plancka: Nie można zbudować silnika, który przekształcałby całkowicie pobrane ciepło na pracę (odrzućenie *perpetuum mobile II rodzaju*).
- Carnota: Żaden rzeczywisty silnik cieplny pracujący między temperaturami T_1 i T_2 nie może mieć sprawności wyższej niż odwracalny silnik Carnota:

$$\eta \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

216

Entropia S – Makro i Mikroświat

II zasada termodynamiki da się sprowadzić do jednego zdania: W układzie izolowanym entropia nigdy nie maleje $\Delta S \geq 0$.

Podejście termodynamiczne (makroskopowe): Dla procesu odwracalnego zmianę entropii definiuje skompensowane ciepło:

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

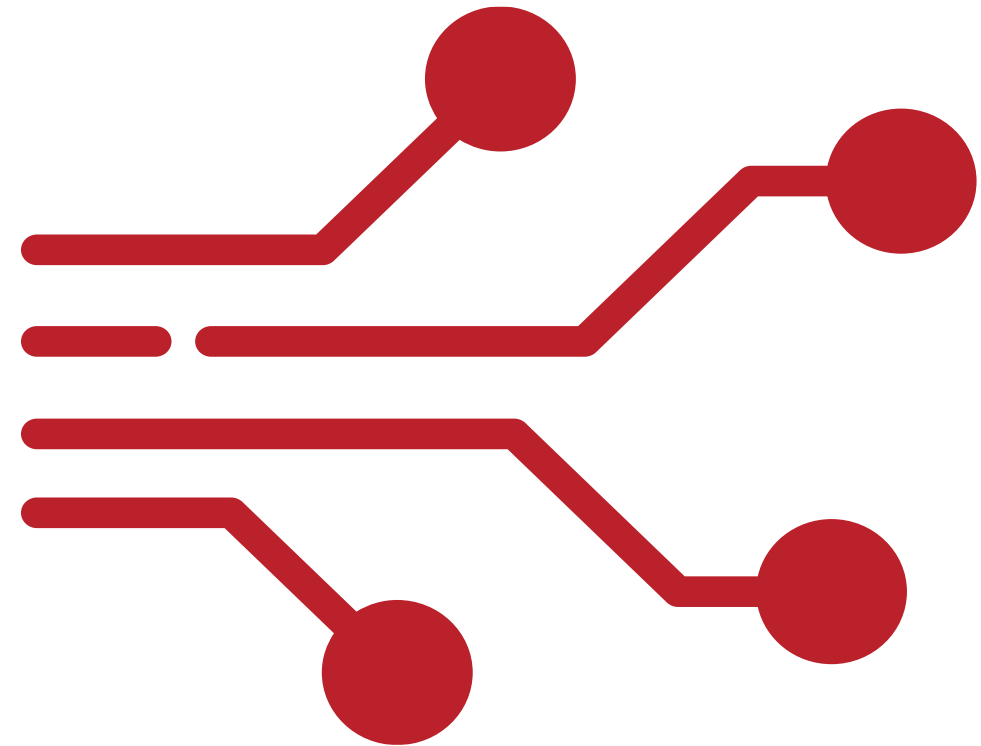
Jednostką entropii jest $[S] = \text{J/K}$. Entropia rośnie, gdy układ pobiera ciepło.

Podejście statystyczne (mikroskopowe) - Wzór Boltzmanna: Entropia jest miarą nieuporządkowania układu. Stan układu o wyższej entropii jest po prostu statystycznie bardziej prawdopodobny.

$$S = k_B \ln \Omega$$

Gdzie Ω to liczba mikrostanów (sposobów, na jakie można rozmieścić cząsteczki i ich energie, aby uzyskać ten sam makroskopowy stan p, V, T).

Elektrostatyka, elektryczność, magnetyzm, fale elektromagnetyczne



218

Elektrostatyka, elektryczność, magnetyzm, fale elektromagnetyczne cz. I

Wkraczając w świat elektromagnetyzmu, odkrywamy zupełnie nową, fundamentalną właściwość materii – ładunek elektryczny. Naszą podróż zaczynamy od elektrostatyki, gdzie badamy siły potężniejsze od grawitacji, ukryte w uwieczonych, nieruchomych ładunkach. Szybko jednak uwalniamy ten potencjał, wprowadzając elektrony w uporządkowany ruch. W ten sposób przechodzimy do elektryczności i prądu elektrycznego – zjawiska, które stanowi dosłowny krwiobieg współczesnej cywilizacji i fizyczną podstawę działania absolutnie każdego układu obliczeniowego.

219

Elektrostatyka, elektryczność, magnetyzm, fale elektromagnetyczne cz. II

Kolejnym, niezwykle istotnym krokiem jest magnetyzm. Historycznie traktowany jako odrębne zjawisko związane z rudami żelaza, w ujęciu fizyki okazuje się nierozzerwalnie związany z ruchem ładunków elektrycznych. Odkrywamy tu jedną z najpiękniejszych symetrii w naturze: płynący prąd elektryczny wytwarza wokół siebie pole magnetyczne, a z kolei zmienne pole magnetyczne potrafi indukować napięcie i przepływ prądu w przewodnikach. Zjawisko indukcji elektromagnetycznej to serce współczesnej energetyki, bez którego nie mogłyby działać żadne generatory, silniki ani transformatory.

220

Elektrostatyka, elektryczność, magnetyzm, fale elektromagnetyczne cz. III

Prawdziwym triumfem i zwieńczeniem tego działu jest jednak genialna synteza dokonana przez Jamesa Clerka Maxwella. Łącząc elektryczność i magnetyzm w jeden spójny system równań, fizyka udowodniła, że wzajemnie napędzające się, oscylujące pola elektryczne i magnetyczne potrafią oderwać się od swojego źródła i podróżować przez przestrzeń. Tak definiujemy fale elektromagnetyczne – od fal radiowych, przez mikrofae, aż po światło widzialne. Zrozumienie tego fenomenu to nie tylko domknięcie klasycznej teorii pola; to przede wszystkim fizyczna warstwa, na której opiera się cała dzisiejsza telekomunikacja, bezprzewodowy transfer danych i sieci światłowodowe, stanowiące absolutny fundament dzisiejszej informatyki i cyberbezpieczeństwa.

221

Elektrostatyka – Ładunek i Prawo Coulomba

Elektrostatyka bada ładunki elektryczne w spoczynku i wytwarzane przez nie pola.

Ładunek elektryczny q : Cecha materii warunkująca oddziaływania elektromagnetyczne. Jednostka w SI: kulomb C.

Kwantowanie i zasada zachowania: Ładunek występuje jako wielokrotność ładunku elementarnego $e = 1,602 \times 10^{-19}$ C. W izolowanym układzie całkowity ładunek (suma algebraiczna) jest zawsze stały.

Prawo Coulomba - Siła wzajemnego oddziaływania dwóch punktowych ładunków jest wprost proporcjonalna do ich iloczynu i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

Gdzie: $\hat{r}$ to wektor jednostkowy kierunku, a $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ (ϵ_0 to przenikalność elektryczna próżni).

Zasada superpozycji - Wypadkowa siła działająca na ładunek jest wektorową sumą sił pochodzących od poszczególnych ładunków

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i$$


Pole Elektryczne

Pole elektryczne to stan przestrzeni przenoszący oddziaływanie ładunków.

Natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$: Siła działająca na jednostkowy, dodatni ładunek próbny q_0 . Jednostka: N/C (lub V/m).

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Pole ładunku punktowego Q :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

Linie pola elektrycznego: Umowne krzywe obrazujące wektor $\vec{E}$ (styczny do linii w każdym punkcie). Wychodzą z ładunków dodatnich, wchodzą do ujemnych. Gęstość linii obrazuje wartość pola.

223

Prawo Gaussa dla pola elektrycznego cz. I

Twierdzenie to pozwala w prosty sposób obliczać pola elektryczne dla układów o wysokiej symetrii.

Strumień pola elektrycznego Φ_E Miara liczby linii pola przebijających powierzchnię S .

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Prawo Gaussa: Strumień pola elektrycznego przez dowolną powierzchnię zamkniętą jest równy całkowitemu ładunkowi wewnątrz niej podzielonemu przez ϵ_0

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{wew}}{\epsilon_0}$$

224

Prawo Gaussa dla pola elektrycznego cz. II

Praktyczne zastosowania (z użyciem odp. symetrii).

Używamy prawa Gaussa do analizy rozkładu pól elektrycznych wytwarzanych przez przestrzenny rozkład ładunków.

Nieskończona nić (gęstość liniowa λ):

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Nieskończona płaszczyzna (gęstość powierzchniowa σ):

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

225

Praca, Potencjał i Energia

Pole elektrostatyczne jest polem zachowawczym – praca wykonana przy przesunięciu ładunku po krzywej zamkniętej wynosi zero

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Energia potencjalna U : Praca, jaką trzeba wykonać przeciwko siłom pola, by przynieść ładunek q z nieskończoności $U = 0$ do danego punktu. Dla dwóch ładunków punktowych:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r}$$

Potencjał elektryczny V : Energia potencjalna na jednostkę ładunku ($V = U/q$).

Jednostka: wolt ($V = J/C$).

Związek natężenia z potencjałem: Wektor natężenia pola wskazuje kierunek najszybszego spadku potencjału (jest jego ujemnym gradientem).

$$\vec{E} = -\text{grad } V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k}\right)$$

226

Pojemność i Kondensatory

Zdolność układu przewodników do gromadzenia ładunku przy danym potencjale.

Pojemność C : Stosunek ładunku na przewodniku do jego potencjału (lub różnicy potencjałów U dla kondensatorów). Jednostka: farad ($F = C/V$).

$$C = \frac{Q}{U}$$

Kondensator płaski: Zależy wyłącznie od geometrii i przenikalności dielektryka ϵ_r .

Wzór dla płytek o polu S w odległości d :

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$$

Łączenie kondensatorów

Równoległe $C_Z = C_1 + C_2 + \dots + C_n$

Szeregowe $\frac{1}{C_Z} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$

227

Prąd Elektryczny i Opór

Uporządkowany ruch ładunków wywołany obecnością pola elektrycznego.

Natężenie I i Gęstość prądu $\vec{j}$:

$$I = \frac{dQ}{dt} \text{ oraz } \int \vec{j} \cdot d\vec{S} \text{ (gdzie } \vec{j} = \rho \vec{v}_d \text{)}$$

Model Drudego i Opór: Elektrony poruszają się, zderzając z siecią krystaliczną (fononami, defektami). Częstsze zderzenia (krótszy czas τ) oznaczają mniejszą prędkość dryfu i większy opór.

Opór elektryczny R : Jednostka: om Ω . Zależy od materiału i geometrii:

$$R = \rho_w \frac{L}{S}$$

ρ_w – rezystywność, opór właściwy.

Zależność od temperatury (dla metali opór rośnie, w półprzewodnikach maleje):

$$R(T) = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

228

Prawo Ohma

Dla prądu płynącego w przewodniku o zadanej temperaturze możemy zapisać prawo Ohma:

Stosunek napięcia do natężenia w tym przewodniku jest stały

$$\frac{U}{I} = \text{const}$$

Tak się składa, że stosunek ten dla zadanej temperatury równy jest oporowi elektrycznemu przewodnika, zatem możemy zapisać

$$I = \frac{U}{R}$$

W tej postaci opór R traktujemy jako stałą charakterystyczną dla danego elementu, zależną od jego geometrii (długości, pola przekroju) oraz materiału.

229

Obwody i Prawa Kirchhoffa cz. I

Do analizy złożonych obwodów wykorzystujemy pojęcia Siły Elektromotorycznej (SEM) i dwie podstawowe zasady zachowania.

- Siła Elektromotoryczna ϵ : Praca sił nieelektrycznych (np. chemicznych) przepychających ładunki wewnątrz źródła (od '-' do '+'). Wyrażana w woltach (V).
- I Prawo Kirchhoffa (Prawo Węzłów): Wynika z zasady zachowania ładunku. Suma prądów w węźle wynosi zero (ile wpływa, tyle wypływa).

$$\sum I_i = 0$$

230

Obwody i Prawa Kirchhoffa cz. II

II Prawo Kirchhoffa (Prawo Oczek): Wynika z zasady zachowania energii. W zamkniętym oczku obwodu suma spadków napięć równa jest sumie sił elektromotorycznych.

$$\sum U_i = \sum \epsilon_k$$

Łączenie Rezystorów

Szeregowe

$$R_Z = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

Równoległe

$$\frac{1}{R_Z} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

231

Magnetyzm i Siła Lorentza cz. I

Pola magnetyczne oddziałują na ładunki wyłącznie wtedy, gdy są one w ruchu.

Siła Lorentza: Wypadkowa siła elektromagnetyczna. Jej składowa magnetyczna jest zawsze prostopadła do wektora prędkości. Zmienia tylko tor lotu, nie zmienia energii kinetycznej (nie wykonuje pracy).

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Ruch w jednorodnym polu magnetycznym $\vec{v} \perp \vec{B}$

Ładunek porusza się po okręgu (siła magnetyczna pełni rolę siły dośrodkowej). Promień okręgu

$$r = \frac{mv}{qB}$$

okres obiegu

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

232

Magnetyzm i Siła Lorentza cz. II

Siła działająca na przewodnik z prądem

$$\vec{F} = I(\vec{L} \times \vec{B})$$

Moment siły działający na ramkę z prądem: Zdefiniujemy moment magnetyczny ramki o polu powierzchni S

$$\vec{\mu} = I\vec{S}$$

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Zasada działania silników elektrycznych i galwanometrów.

Źródła Pola Magnetycznego

Zgodnie z odkryciem Oersteda, przepływający prąd generuje wokół siebie pole magnetyczne (reguła prawej dłoni).

Prawo Biota-Savarta: Określa wektor indukcji elementarnej $d\vec{B}$ od fragmentu przewodu $d\vec{l}$ (wzór całkowany dla całych obwodów):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$ – przenikalność magnetyczna próżni.

Prawo Ampère'a: Magnetyczny odpowiednik Prawa Gaussa ułatwiający obliczenia dla wysokich symetrii. Cyrkulacja pola wokół zamkniętej krzywej zależy od prądu przebijającego tę powierzchnię

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{wew}}$$

234

Indukcja Elektromagnetyczna

Zjawisko generowania siły elektromotorycznej (SEM) w wyniku zmiany strumienia magnetycznego przenikającego przez obwód.

Strumień pola magnetycznego definiujemy jako

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Prawo Faradaya:

$$\epsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Wartość SEM zależy od szybkości zmiany strumienia (zmiany natężenia pola $\vec{B}$, przekroju S , lub kąta pomiędzy wektorem indukcji magnetycznej i wektorem normalnym do powierzchni).

Znak minus (Reguła Lenza): Wzbudzony prąd indukowany zawsze płynie w takim kierunku, aby wytworzone przez niego pole magnetyczne przeciwdziało przyczynie, która go wywołała (zachowanie energii).

235

Równania Maxwella cz. I

Są to cztery fundamentalne równania spinające elektryczność i magnetyzm w spójną całość.

1. Prawo Gaussa dla pola elektrycznego

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Źródłem pól E są ładunki elektryczne

2. Prawo Gaussa dla pola magnetycznego

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Linie pola magnetycznego są zamknięte – brak monopoli magnetycznych

Równania Maxwella cz. II

3. Prawo Faradaya

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Zmienne pole magnetyczne wytwarza wirowe pole elektryczne.

4. Prawo Ampère'a

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Źródłem pola magnetycznego są płynące prądy lub zmienne pola elektryczne - prąd przesunięcia.

Fale Elektromagnetyczne

Z równań Maxwella w pustej przestrzeni (brak prądów i ładunków) otrzymujemy równania falowe, co dowodzi, że pole elektromagnetyczne może odrywać się od źródeł i propagować jako fala.

Równanie falowe przybiera postać

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{oraz} \quad \nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Prędkość światła w próżni c wynika bezpośrednio z przenikalności próżni:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Cechy fali płaskiej $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t)$

Wektory $\vec{E}$ i $\vec{B}$ są zawsze fazowo zgodne i prostopadłe do siebie oraz do kierunku rozchodzenia się fali (fala poprzeczna).

Amplitudy są ściśle powiązane relacją

$$E_0 = cB_0$$

238

Prąd przemienny

Prąd przemienny AC to taki prąd, którego natężenie i kierunek zmieniają się w czasie w sposób okresowy. W inżynierii i fizyce obwodów skupiamy się przede wszystkim na przebiegach harmonicznym (sinusoidalnym), ponieważ zgodnie z twierdzeniem Fouriera każdy przebieg okresowy można rozłożyć na sumę fal sinusoidalnych.

Matematyczny opis natężenia prądu i napięcia chwilowego wyrażamy jako

$$\begin{aligned}i(t) &= I_0 \sin(\omega t + \varphi_i) \\u(t) &= U_0 \sin(\omega t + \varphi_u)\end{aligned}$$

Kluczowe parametry

1. Amplituda I_0 , U_0 - Maksymalna wartość szczytowa, jaką osiąga natężenie prądu lub napięcie.
2. Prędkość kątowna ω opisującego dany przebieg i wiąże się z częstotliwością f i okresem T równaniem

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

3. Faza φ - Stan początkowy fali w chwili $t = 0$.
4. Przesunięcie fazowe $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ jest to różnica w czasie między maksimami napięcia i prądu.

239

Prąd przemienny – wartości skuteczne

Gdy przez rezystor płynie prąd przemienny, wydzielana moc chwilowa $p(t) = R \cdot i^2(t)$ pulsuje i zmienia się od zera do wartości maksymalnej $P_{max} = RI_0^2$. W energetyce kluczowa jest jednak średnia moc wydzielana w jednym pełnym okresie fali:

$$P_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T R \cdot I_0^2 \sin^2(\omega t) dt = R \frac{I_0^2}{2}$$

Dla wygody obliczeń wprowadzamy pojęcie wartości skutecznej (RMS – Root Mean Square). Wartość skuteczna prądu przemiennego to taka wartość hipotetycznego prądu stałego, który przepływając przez opornik o rezystancji R , wydzieli w nim w tym samym czasie taką samą średnią moc, co dany prąd przemienny.

Dla idealnej fali sinusoidalnej zachodzą ścisłe relacje matematyczne

$$I_{sk} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \approx 0,707I_0 \quad U_{sk} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \approx 0,707U_0$$

240

Elementy R, L, C i przesunięcie fazowe

W przeciwieństwie do obwodów prądu stałego (DC), gdzie opór stawiają tylko rezystory, w obwodach AC ciągłe zmiany prądu i napięcia aktywują zjawiska indukcji (cewki) oraz gromadzenia ładunku (kondensatory). Wprowadzają one opór bierny i wymuszają przesunięcia fazowe.

1. Rezystor R - Brak przesunięcia fazowego $\Delta\varphi = 0$. Napięcie i natężenie są w fazie (rosną i maleją równocześnie). Obowiązuje klasyczne Prawo Ohma $U_0 = R \cdot I_0$.
2. Cewka L - Zjawisko samoindukcji generuje siłę elektromotoryczną przeciwdziałającą zmianom prądu. Skutek: napięcie wyprzedza prąd o $\frac{\pi}{2}$.
3. Kondensator C - Prąd jest potrzebny do przemieszczenia ładunku na okładki zanim powstanie napięcie. Skutek: prąd wyprzedza napięcie o $\frac{\pi}{2}$.

Obwód RLC cz. I

Obwód RLC to fundamentalny układ w elektrodynamice, składający się z opornika o rezystancji R , cewki o indukcyjności L oraz kondensatora o pojemności C . Jego dynamika opiera się na ciągłej wymianie energii między polem elektrycznym w kondensatorze a polem magnetycznym w cewce, przy jednoczesnym rozpraszaniu energii (w postaci ciepła) na oporniku.

Najczęściej analizowanym przypadkiem jest układ szeregowy.

242

Obwód RLC cz. II

Dla szeregowego obwodu RLC podłączonego do źródła napięcia zmiennego $u(t)$, z drugiego prawa Kirchhoffa (suma spadków napięć na elementach jest równa napięciu źródła) wynika następujące równanie całkowo-różniczkowe

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = u(t)$$

Aby uprościć to równanie do klasycznego równania różniczkowego drugiego rzędu, można je zróżniczkować względem czasu lub zapisać dla ładunku zgromadzonego na kondensatorze

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = u(t)$$

To równanie jest matematycznie izomorficzne z równaniem tłumionego oscylatora harmonicznego w mechanice (gdzie L odpowiada masie, R – współczynnikowi tarcia lepkościowego, a $1/C$ – stałej sprężystości).

243

Zawada obwodu (Impedancja)

W stanie ustalonym, przy zasilaniu napięciem sinusoidalnym $u(t) = U_0 \sin(\omega t)$, najwygodniej analizować układ za pomocą metody symbolicznej (fazowej). Ponieważ przez wszystkie elementy płynie ten sam prąd $i(t)$, napięcia na poszczególnych elementach są względem niego przesunięte w fazie

U_R - jest w fazie z prądem, U_L - wyprzedza prąd o $\frac{\pi}{2}$, U_C - opóźnia się względem prądu o $\frac{\pi}{2}$.

Wektorowa suma tych napięć daje napięcie całkowite. Na wykresie wskazowym widać wyraźnie, że całkowity opór stawiany przez obwód – zwany impedancją (zawadą) Z – nie jest prostą sumą algebraiczną, lecz sumą geometryczną (wynikającą z twierdzenia Pitagorasa)

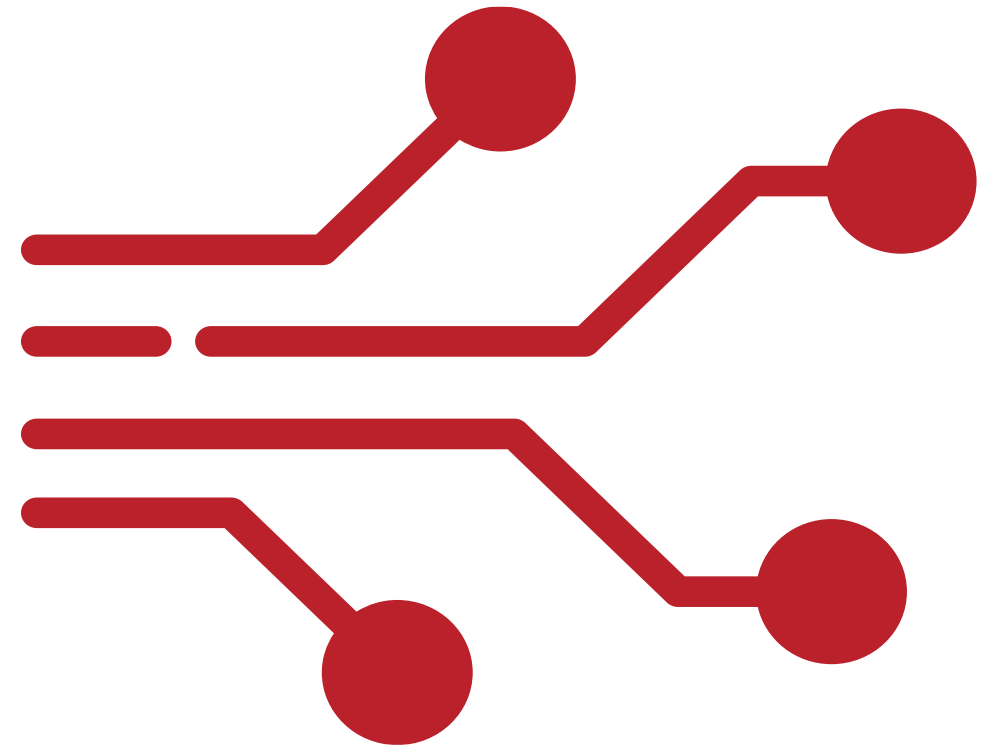
$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

gdzie całkowity kąt przesunięcia fazowego φ między prądem a napięciem zasilającym wynosi

$$\tan \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

244

Optyka geometryczna i falowa



245

Optyka geometryczna i falowa cz. I

Światło to prawdopodobnie najbardziej fascynujący nośnik informacji we wszechświecie, a pełne zrozumienie jego natury wymaga zastosowania dwóch komplementarnych podejść, które wspólnie tworzą ten dział. W pierwszej kolejności wkraczamy w obszar optyki geometrycznej, gdzie zachowanie światła upraszczamy do postaci nieskończone cienkich promieni rozchodzących się po liniach prostych. To klasyczne przybliżenie, opierające się na fundamentalnych prawach odbicia i załamania (opisanych m.in. równaniem Snella), pozwala nam projektować i analizować działanie soczewek, zwierciadeł czy układów pryzmatów. Optyka geometryczna daje nam doskonałe narzędzia inżynierskie do zrozumienia zasady powstawania obrazów, jednak milczy na temat samej, głębokiej natury promieniowania świetlnego.

246

Optyka geometryczna i falowa cz. II

Ograniczenia tego pierwszego modelu ujawniają się, gdy światło napotyka przeszkody o rozmiarach porównywalnych z jego długością. Wówczas musimy odrzucić wyobrażenie prostoliniowego promienia i wkroczyć w świat optyki falowej. Traktując światło wprost jako falę elektromagnetyczną, zyskujemy zupełnie nowy język pozwalający opisać zjawiska dyfrakcji (ugięcia fali) oraz interferencji (wzajemnego nakładania się i wzmacniania lub wygaszania fal). To właśnie ujęcie falowe wprowadza kluczowe pojęcie czoła fali, którego kształt niesie ogromną ilość informacji. Zrozumienie, w jaki sposób front falowy ulega deformacji podczas przejścia przez dany ośrodek, otwiera nam drzwi do zaawansowanej metrologii optycznej. To dzięki precyzyjnej analizie tych zniekształceń i badaniu prążków interferencyjnych jesteśmy dziś w stanie z niesamowitą dokładnością mapować aberracje, testować jakość zaawansowanej optyki teleskopowej i weryfikować poprawność układów, w których geometria to już zdecydowanie za mało.

247

Optyka geometryczna – założenia i granice

Przybliżenie eikonalne $\lambda \rightarrow 0$: Optyka geometryczna zakłada, że długość fali jest znikomo mała w porównaniu z wymiarami układu optycznego.

Pojęcie promienia: Światło rozchodzi się wzdłuż linii prostych (promieni świetlnych). Promień świetlny jest geometryczną krzywą prostopadłą do powierzchni stałej fazy fali elektromagnetycznej.

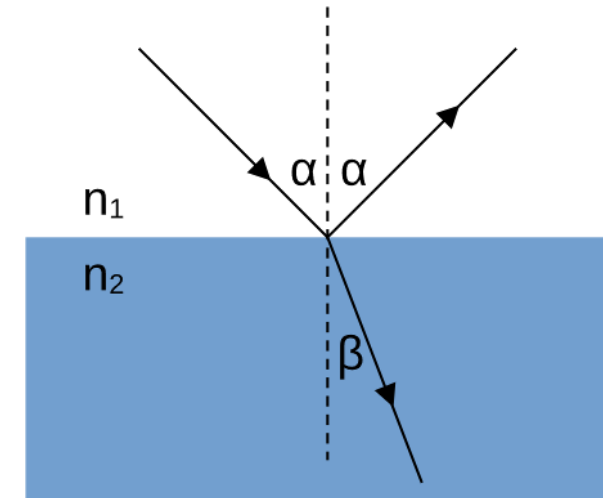
Zjawiska takie jak odbicie i załamanie można opisać w pełni analityczną geometrią, z pominięciem dyfrakcji czy interferencji.

Zasada Fermata: Światło porusza się między dwoma punktami po takiej drodze optycznej, dla której czas przebiegu jest ekstremalny (najkrótszy).

Optyka geometryczna cz. I

Kiedy światło napotyka granicę dwóch ośrodków, jego zachowanie determinują dwa podstawowe prawa:

Prawo odbicia: Kąt padania jest równy kątowi odbicia. Promień padający, promień odbity oraz normalna do powierzchni w punkcie padania leżą zawsze w jednej płaszczyźnie.

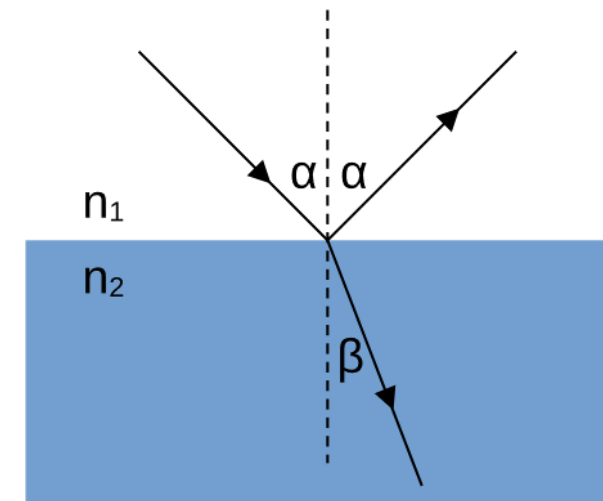


Optyka geometryczna cz. II

Prawo załamania (Snelliusa): Gdy światło przechodzi z ośrodka 1 do ośrodka 2, zachodzi relacja

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$$

gdzie współczynnik załamania $n = \frac{c}{v}$ to stosunek prędkości światła w próżni do prędkości światła w danym ośrodku.



Układy formujące obraz – Model soczewki cienkiej cz. I

Soczewka cienka to idealizacja, w której pomijamy grubość samej soczewki przy wyznaczaniu biegu promieni.

Równanie soczewki cienkiej: Wiąże odległość przedmiotu od soczewki x , odległość obrazu y i jej ogniskową f :

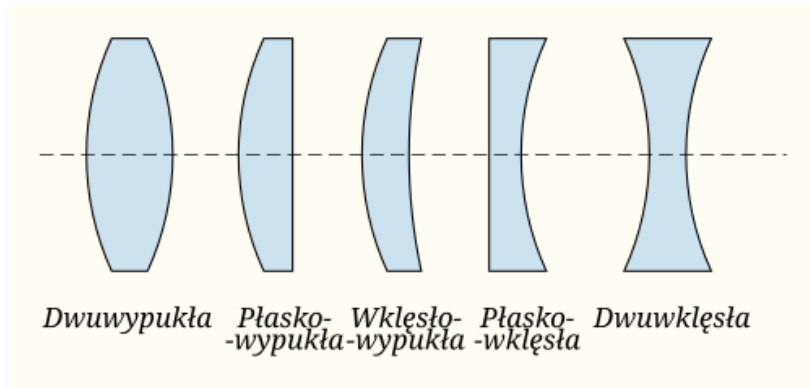
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Wzór szlifierzy soczewek: Wiąże parametry geometryczne (R_1, R_2 – promienie krzywizny) oraz materiałowe (n – wsp. załamania soczewki, n_{ot} – wsp. załamania otoczenia) z uzyskiwaną ogniskową:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n}{n_{ot}} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

251

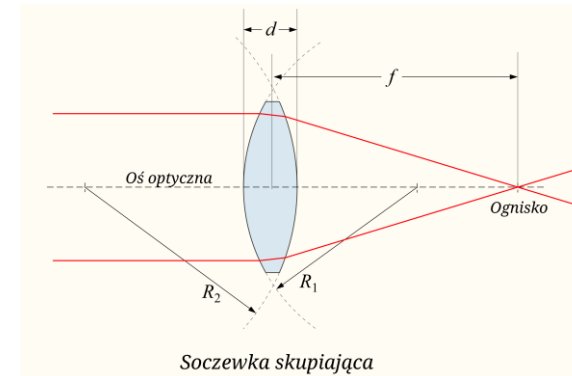
Układy formujące obraz – Model soczewki cienkiej cz. II



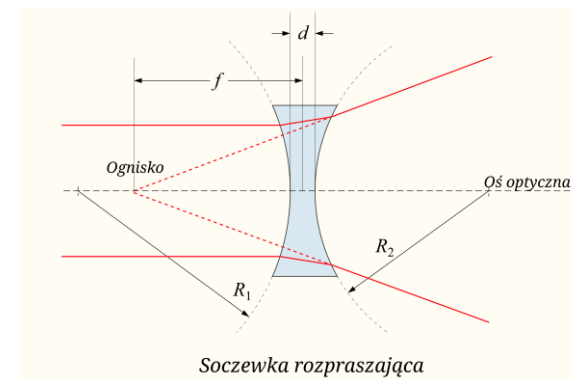
Rysunek 1. Rodzaje soczewek o powierzchniach sferycznych i płaskich. Źródło: <https://pl.wikipedia.org/wiki/Soczewka>

Rysunek 2. a) Przykładowy bieg promieni w soczewce skupiającej dwuwypukłej.
b) Przykładowy bieg promieni w soczewce skupiającej dwuwklesłej. Źródło: <https://pl.wikipedia.org/wiki/Soczewka>

a)

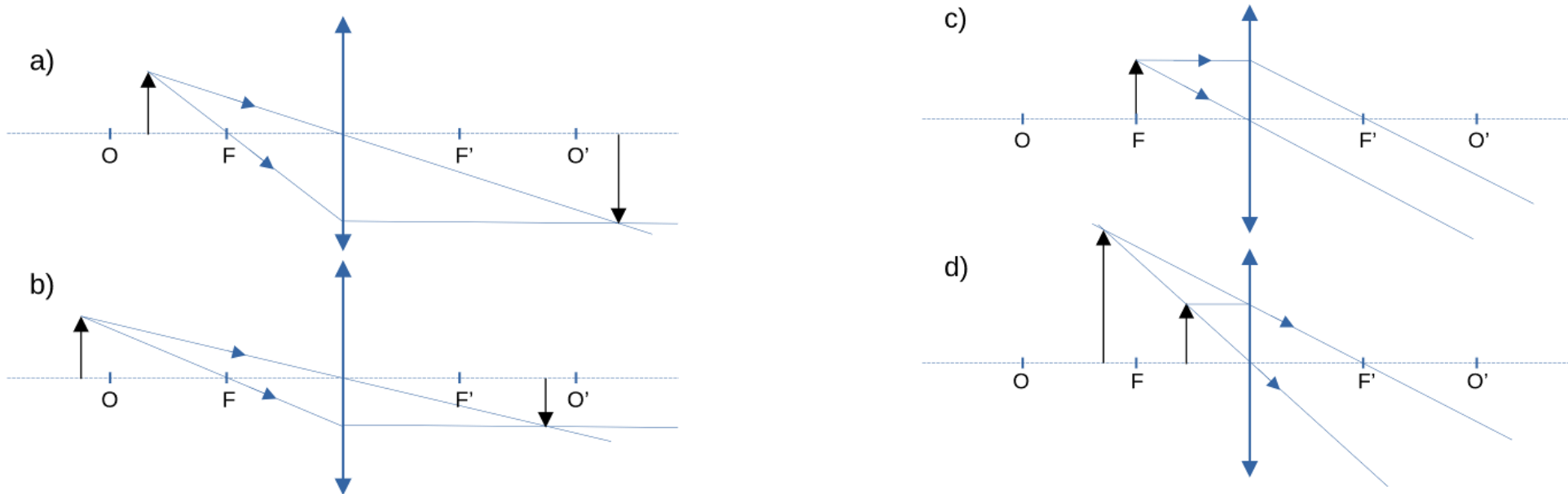


b)



252

Zasady powstawania obrazu w soczewce skupiającej



Rysunek. Zasady powstawania obrazu dla soczewki skupiającej w zależności, gdzie ustawiony jest przedmiot: a) odległość $x < 2f$ i $x > f$, b) $x > 2f$, c) $x = f$, d) $x < f$.

253

Optyka falowa i zasada superpozycji

Przejdźcie na poziom falowy uwzględnia zjawiska opierające się na fazie fali elektromagnetycznej.

- Koherencja (spójność): Fale muszą wykazywać stałą w czasie różnicę faz, aby móc utworzyć stabilny, dający się zaobserwować obraz interferencyjny.
- Superpozycja fal: Gdy spójne fale spotykają się w przestrzeni, ich amplitudy się dodają:
- Interferencja konstruktywna (jasne prążki): Maksima fal się pokrywają, gdy różnica faz wynosi $\Delta\phi = 0, 2\pi, 4\pi \dots$
- Interferencja destruktywna (ciemne prążki): Fale są w przeciwfazie i się wygaszają, gdy $\Delta\phi = \pi, 3\pi, 5\pi \dots$

254

Optyka falowa - Doświadczenie Younga

Eksperyment z dwiema szczelinami Thomasa Younga historycznie przesądził o uznaniu światła za falę. Dyfrakcja fali na szczelinach powoduje powstanie dwóch koherentnych źródeł wtórnych.

Warunek wzmocnienia (położenie jasnych prążków): Różnica dróg optycznych Δs fal biegnących z obu szczelin musi być całkowitą wielokrotnością długości fali λ :

$$\Delta s = d \sin \theta = m\lambda$$

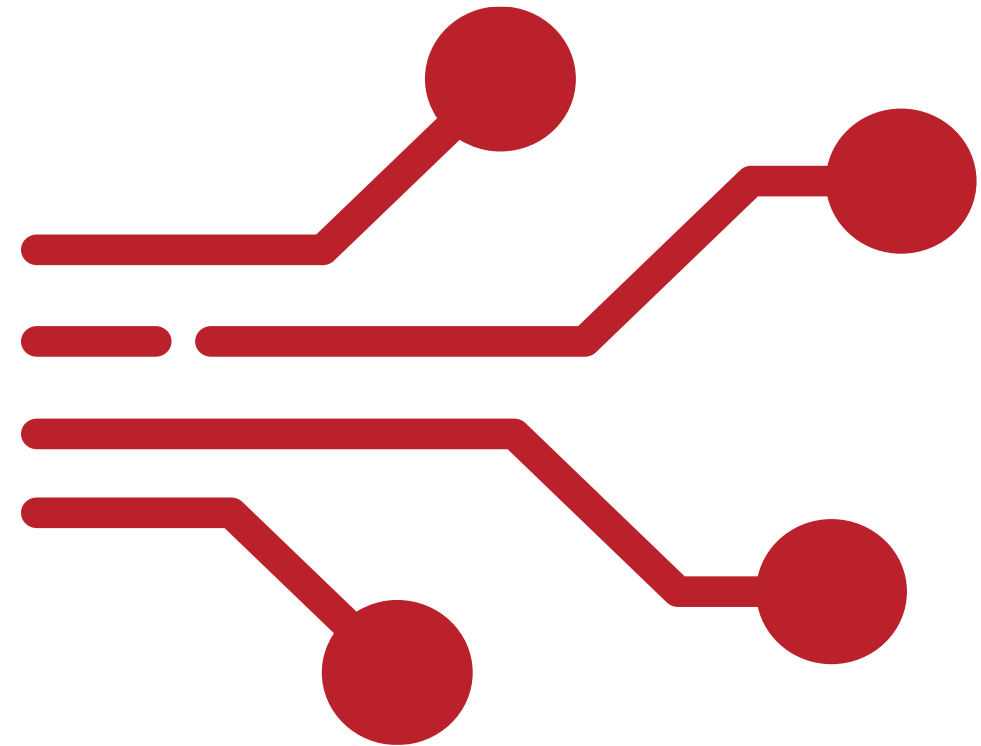
gdzie: d – odległość między szczelinami, m – rząd interferencji 0,1,2 ...

Odległość prążków na ekranie: Dla małych kątów odległość m -tego jasnego prążka od środka ekranu wynosi:

$$y_m = \frac{m\lambda D}{d}$$

gdzie: D – odległość płaszczyzny szczelin od ekranu

Fizyka współczesna: fizyka atomowa i jądrowa oraz fizyka ciała stałego



256

Fizyka współczesna: fizyka atomowa i jądrowa oraz fizyka ciała stałego cz. I

Dział ten obejmuje fundamentalne zagadnienia fizyki przełomu XIX i XX wieku oraz okresu powojennego, które wykraczają poza ramy mechaniki klasycznej i elektrodynamiki Maxwella.

Fizyka atomowa skupia się na strukturze elektronowej atomów oraz oddziaływaniu światła z materią na poziomie kwantowym. Kluczowe zagadnienia obejmują hipotezy kwantowe, w tym pracę Plancka i efekt fotoelektryczny, a także modele budowy atomu, takie jak model Bohra. Ważnym elementem jest tutaj wprowadzenie podstaw mechaniki falowej z równaniem Schrödingera oraz liczbami kwantowymi, co pozwala analizować widma emisyjne i absorpcyjne jako źródło informacji o strukturze elektronowej.

257

Fizyka współczesna: fizyka atomowa i jądrowa oraz fizyka ciała stałego cz. II

Fizyka jądrowa analizuje strukturę i właściwości jąder atomowych oraz zachodzące w nich procesy. Główne obszary zainteresowań to skład jądra, w tym protony i neutrony oraz natura sił jądrowych. Dział ten zajmuje się również zjawiskami promieniotwórczości, takimi jak rozpady alfa, beta i gamma. Istotne znaczenie praktyczne mają reakcje jądrowe, czyli rozszczepienie będące podstawą energetyki jądrowej oraz synteza termojądrowa stanowiąca źródło energii gwiazd, przy czym kluczową rolę w tych rozważaniach odgrywa pojęcie deficytu masy i energii wiązania jądra.

258

Fizyka współczesna: fizyka atomowa i jądrowa oraz fizyka ciała stałego cz. III

Fizyka ciała stałego opisuje właściwości fizyczne materii w fazie skondensowanej, wynikające z regularnego układu atomów w sieci krystalicznej. Kluczowe zagadnienia dotyczą struktury krystalicznej i sieci Bravais oraz teorii pasmowej ciał stałych, która wprowadza pojęcia pasma przewodnictwa i przerwy energetycznej. Na tej podstawie dokonuje się klasyfikacji materiałów na metale, izolatory i półprzewodniki. Istotnym elementem jest badanie właściwości półprzewodników i zasada działania złączy p-n, będąca podstawą technologii elektronicznej, a także analiza zjawisk transportu ładunku i ciepła w sieciach krystalicznych.

259

Promieniowanie ciała doskonale czarnego

Ciało doskonale czarne to wyidealizowany model fizyczny, który:

- Całkowicie pochłania padające na nie promieniowanie elektromagnetyczne (współczynnik absorpcji wynosi 1 – nic nie jest odbijane ani przepuszczane).
- W stanie równowagi termodynamicznej emituje promieniowanie, którego widmo zależy wyłącznie od temperatury, a nie od rodzaju materiału.

Realizacja praktyczna:

- Najlepszym przybliżeniem ciała doskonale czarnego jest wnęka (komora) z bardzo małym otworem.
- Promieniowanie wpadające do środka ulega wielokrotnym odbiciom wewnętrznym i ostatecznie zostaje pochłonięte. Otwór zachowuje się wówczas jak idealny emiter.

260

Prawo Rayleigha-Jeansa (1900)

Wyprowadzone na gruncie klasycznej elektrodynamiki i fizyki statystycznej.

Zakłada, że rozkład gęstości energii promieniowania (na jednostkę objętości i przedział długości fali) opisany jest równaniem:

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi k_B T}{\lambda^4}$$

gdzie k_B to stała Boltzmannna, T – temperatura termodynamiczna.

Katastrofa w nadfiolecie: Zgodnie ze wzorem, dla krótkich fal $\lambda \rightarrow 0$ gęstość energii dąży do nieskończoności $u \rightarrow \infty$. Wynik ten był sprzeczny z zasadą zachowania energii oraz wynikami eksperymentalnymi.

261

Prawo rozkładu Wiena

Wilhelm Wien wyprowadził półempiryczne równanie rozkładu gęstości energii dla wysokich częstotliwości (krótkich fal świetlnych)

$$u(\lambda, T) = \frac{c_1}{\lambda^5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}$$

gdzie c_1 i c_2 to stałe wyznaczone doświadczalnie

Zakres stosowalności:

Prawo Wiena znakomicie przewiduje widmo promieniowania dla małych długości fal $\lambda \rightarrow 0$

Daje jednak całkowicie błędne przewidywania dla fal długich (np. podczerwieni), gdzie lepiej sprawdzało się prawo Rayleigha-Jeansa.

262

Hipoteza kwantowa i rozkład Plancka (1900)

Max Planck założył, że atomy ścianek wnęki wymieniają energię z polem elektromagnetycznym tylko w dyskretnych porcjach – kwantach.

Energia pojedynczego kwantu zależy od jego częstotliwości:

$$E = n h \nu, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

gdzie $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ to stała Plancka, ν – częstotliwość fali.

Uniwersalny rozkład gęstości energii promieniowania ciała doskonale czarnego

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$$

W granicznych przypadkach funkcja Plancka redukuje się do prawa Wiena (dla małych λ) oraz prawa Rayleigha-Jeansa (dla dużych λ).

263

Prawa wynikające z rozkładu Plancka

Prawo Stefana-Boltzmannna

Całkując rozkład Plancka po wszystkich długościach fal, otrzymujemy całkowitą emitancję (strumień energii z jednostki powierzchni):

$$\Phi = \sigma T^4$$

gdzie $\sigma \approx 5,67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$ to stała Stefana-Boltzmannna.

Prawo przesunięć Wiena

Wyznaczając maksimum funkcji rozkładu Plancka, otrzymujemy długość fali, dla której zdolność emisyjna ciała doskonale czarnego jest najwyższa:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}$$

gdzie $b \approx 2,898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ to stała Wiena.

264

Efekt fotoelektryczny cz. I

Zjawisko fotoelektryczne to proces wybijania elektronów z powierzchni ciała stałego (zwykle metalu) pod wpływem padającego na nią promieniowania elektromagnetycznego.

Równanie Einsteina-Millikana (zasada zachowania energii):

$$h\nu = W + E_k \rightarrow E_k = h\nu - W$$

ν – energia padającego fotonu.

W – praca wyjścia (minimalna energia potrzebna do uwolnienia elektronu z sieci krystalicznej metalu).

$E_k = \frac{1}{2}mv_{max}^2$ – maksymalna energia kinetyczna fotoelektronu.

265

Efekt fotoelektryczny cz. II

Zjawisko fotoelektryczne to proces wybijania elektronów z powierzchni ciała stałego (zwykle metalu) pod wpływem padającego na nią promieniowania elektromagnetycznego.

Równanie Einsteina-Millikana (zasada zachowania energii):

$$h\nu = W + E_k \rightarrow E_k = h\nu - W$$

ν – energia padającego fotonu.

W – praca wyjścia (minimalna energia potrzebna do uwolnienia elektronu z sieci krystalicznej metalu).

$E_k = \frac{1}{2}mv_{max}^2$ – maksymalna energia kinetyczna fotoelektronu.

Częstotliwość graniczna ν_0 – minimalna częstotliwość wywołująca efekt $h\nu_0 = W$

266

Wyznaczanie stałej Plancka

Energię najszybszych fotoelektronów można zmierzyć, stosując przeciwne pole elektryczne (tzw. napięcie hamowania U_h), które zatrzymuje prąd fotoelektryczny

$$eU_h = E_k = \frac{1}{2}mv_{max}^2$$

Podstawiając do równania zjawiska fotoelektrycznego otrzymujemy zależność liniową

$$eU_h = h\nu - W \rightarrow U_h = \frac{h}{e}\nu - \frac{W}{e}$$

Analizując nachylenie wykresu $U_h(\nu)$ wyznaczonego doświadczalnie, możemy precyzyjnie wyznaczyć wartość stałej Plancka h .

267

Efekt Comptona

Zjawisko Comptona: Rozpraszanie wysokoenergetycznego promieniowania elektromagnetycznego (np. promieniowania X) na swobodnych lub słabo związanych elektronach materii.

Foton zderza się z elektronem, przekazując mu część swojej energii i pędu:

Po zderzeniu foton ma mniejszą energię długość jego fali rośnie $\lambda' > \lambda$.

Elektron zostaje wybity (zjawisko odrzutu) z pewną energią kinetyczną.

Równanie na przesunięcie komptonowskie:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos \theta)$$

gdzie $\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$ to komptonowska długość fali, θ to kąt rozproszenia fotonu.

Zjawisko to jednoznacznie potwierdza korpuskularną naturę światła – fotony posiadają pęd

$$p = h/\lambda$$

Powstawanie promieniowania rentgenowskiego

Zasada działania lampy rentgenowskiej:

Katoda (źródło elektronów): Rozgrzane włókno wolframowe emituje elektrony na skutek emisji termoelektronowej.

Przyspieszenie, między katodą a anodą panuje wysokie napięcie U (od kilku do setek kV). Elektron zyskuje energię $E = eU$

Oddziaływanie z anodą, szybki elektron uderza w tarczę anody (W, Mo, Cu), gwałtownie hamując.

Rodzaje emitowanego promieniowania X:

Ciągłe (promieniowanie hamowania): Powstaje w wyniku utraty energii kinetycznej spowalnianych elektronów.

Charakterystyczne: Powstaje przy wybijaniu przez padające elektrony innych elektronów z wewnętrznych powłok atomów anody.

Sprawność układu: Bardzo niska. Około 99% energii kinetycznej elektronów zamienia się w ciepło, co wymaga intensywnego chłodzenia anody.

Fale materii de Broglie'a (1924)

Louis de Broglie wysunął hipotezę dualizmu korpuskularno-falowego materii: skoro fala elektromagnetyczna zachowuje się w pewnych zjawiskach jak strumień cząstek, to każda poruszająca się cząstka materialna wykazuje własności falowe.

Długość fali materii

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

gdzie p to pęd cząstki, h – stała Plancka.

Dowód eksperymentalny (1927): Davisson i Germer zaobserwowali zjawisko dyfrakcji (ugięcia) i interferencji elektronów na sieci krystalicznej niklu – zachowanie zarezerwowane w fizyce klasycznej wyłącznie dla fal.

Model atomu Bohra (1913) cz. I

Postulaty Bohra (model dla atomu wodoru):

1. Elektron krąży wokół jądra wyłącznie po ściśle określonych orbitach kołowych (stanach stacjonarnych), nie emitując fali elektromagnetycznej. Równowaga sił na orbicie:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

2. Kwantowanie momentu pędu: Dozwolone są tylko te orbity, dla których moment pędu L spełnia warunek:

$$L = mvr = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

3. Emisja lub absorpcja fotonu następuje wyłącznie podczas przeskoku elektronu między orbitami

$$h\nu = |E_n - E_m|$$

271

Model atomu Bohra (1913) cz. II

Promień n -tej orbity i energia stanu stacjonarnego:

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} n^2$$

$$E_n = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2h^2} \frac{1}{n^2} \approx -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2}$$

272

Budowa jądra atomowego

Jądro atomowe to centralna, niezwykle gęsta część atomu, skupiająca w sobie prawie całą jego masę (>99,9%).

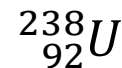
Rozmiar jądra jest rzędu 10^{-15} m, 1 fm – femtometr), podczas gdy cały atom ma rozmiar około 10^{-10} m.

Jądro zbudowane jest z nukleonów, do których zaliczamy:

Protony p: cząstki o ładunku dodatnim +e i masie $m_p \approx 1,0073$ u
(ok. $938 \text{ MeV}/c^2$).

Neutrony n: cząstki obojętne elektrycznie o masie $m_n \approx 1,0087$ u (ok. $939 \text{ MeV}/c^2$).

Standardowy zapis jądra pierwiastka X:



273

Liczby opisujące jądro atomowe

Liczba atomowa Z :

Określa liczbę protonów w jądrze (oraz ładunek jądra $+Z \cdot e$).

Decyduje o przynależności do konkretnego pierwiastka chemicznego.

W obojętnym elektrycznie atomie Z określa również liczbę elektronów na powłokach.

Liczba masowa A :

Określa całkowitą liczbę nukleonów (protonów i neutronów) w jądrze.

Liczba neutronów N :

Wynika z różnicy: $N = A - Z$

Przykład: Dla atomu węgla $^{12}_6\text{C} \rightarrow A = 12, Z = 6$, stąd $N = 6$.

274

Siły jądrowe (oddziaływania silne)

Za stabilność jądra odpowiadają siły jądrowe, które przewyższają ogromne odpychanie elektrostatyczne między protonami (kulombowskie).

Kluczowe właściwości sił jądrowych:

Krótki zasięg: Działają tylko na odległościach rzędu 1 – 2 fm. Na większych dystansach szybko zanikają.

Niezależność od ładunku: Oddziaływania p-p, n-n oraz p-n są w przybliżeniu identyczne.

Wysycanie: Nukleon oddziałuje silnie tylko z najbliższymi sąsiadami (dzięki temu gęstość materii jądrowej jest w przybliżeniu stała dla wszystkich jąder).

Odpychanie rdzeniowe: Na bardzo małych odległościach $< 0,7$ fm siły jądrowe stają się silnie odpychające, co zapobiega zapadnięciu się jądra.

275

Klasyfikacja jąder cz. I

Nuklid: Ogólna nazwa dla jądra atomowego o konkretnym, zdefiniowanym składzie Z i A.

Izotopy: Jądra tego samego pierwiastka (to samo Z), ale o różnej liczbie neutronów N (i różnym A). Mają identyczne właściwości chemiczne, ale różne fizyczne.

${}^1_1\text{H}$ prot, ${}^2_1\text{H}$ deuter, ${}^3_1\text{H}$ tryt

Izobary: Jądra różnych pierwiastków (różne Z), które mają tę samą liczbę masową A (różnią się składem, ale mają tyle samo nukleonów).

${}^{14}_6\text{C}$ oraz ${}^{14}_7\text{N}$

Izotony: Jądra różnych pierwiastków, które mają identyczną liczbę neutronów N.

${}^{14}_6\text{C}$ ($N = 8$) oraz ${}^{15}_7\text{N}$ ($N = 8$)

276

Klasyfikacja jąder cz. II

Nuklid: Ogólna nazwa dla jądra atomowego o konkretnym, zdefiniowanym składzie Z i A.

Izotopy: Jądra tego samego pierwiastka (to samo Z), ale o różnej liczbie neutronów N (i różnym A). Mają identyczne właściwości chemiczne, ale różne fizyczne.

${}^1_1\text{H}$ prot, ${}^2_1\text{H}$ deuter, ${}^3_1\text{H}$ tryt

Izobary: Jądra różnych pierwiastków (różne Z), które mają tę samą liczbę masową A (różnią się składem, ale mają tyle samo nukleonów).

${}^{14}_6\text{C}$ oraz ${}^{14}_7\text{N}$

Izotony: Jądra różnych pierwiastków, które mają identyczną liczbę neutronów N.

${}^{14}_6\text{C}$ ($N = 8$) oraz ${}^{15}_7\text{N}$ ($N = 8$)

277

Stabilność jąder atomowych

Stabilność jądra zależy przede wszystkim od:

- Stosunku liczby neutronów do liczby protonów N/Z .
- Energii wiązania przypadającej na jeden nukleon.

Ścieżka stabilności:

- Dla lekkich jąder $Z < 20$
- najbardziej stabilne są te, w których $N \approx Z$.
- W miarę wzrostu liczby protonów, rośnie odpychanie kulombowskie. Dla cięższych jąder stabilność wymaga "nadmiaru" neutronów (działających jak "klej" jądrowy). Dla najcięższych stabilnych jąder stosunek ten wynosi $N/Z \approx 1,5$.
- Jądra leżące poza ścieżką stabilności ("przeładowane" protonami lub neutronami) ulegają spontanicznym rozpadom promieniotwórczym.

278

Defekt masy i jednostka masy atomowej

Precyzyjne pomiary wykazują, że masa jądra atomowego jest zawsze mniejsza od sumy mas swobodnych protonów i neutronów, z których jest zbudowane.

Różnica ta nazywana jest defektem masy Δm .

Zgodnie z równaniem Einsteina, brakująca masa odpowiada energii, która została wydzielona podczas tworzenia jądra:

$$E = \Delta m \cdot c^2$$

Jednostka masy atomowej u

Zdefiniowana jako 1/12 masy atomu węgla ^{12}C

$$1 \text{ u} \approx 1,6605 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

W fizyce jądrowej używa się wygodnego przelicznika: $1 \text{ u} \rightarrow 931,5 \text{ MeV}/c^2$

279

Energia wiązania jądra

To praca, jaką trzeba wykonać, aby rozdzielić jądro na pojedyncze, swobodne nukleony.

Wzór na całkowitą energię wiązania:

$$E_w = \Delta m \cdot c^2 = [Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - M_j]c^2$$

gdzie M_j to masa jądra

Właściwa energia wiązania E_w/A Określa energię wiązania przypadającą na jeden nukleon (miara stabilności jądra).

Rośnie dla lekkich pierwiastków, osiągając maksimum, ok. 8,8 MeV/nukleon, w okolicach żelaza ^{56}Fe .

Dla jąder cięższych stopniowo maleje.

Wniosek fizyczny: Z tego wykresu wynika, że energię można pozyskać na dwa sposoby: rozszczepiając jądra bardzo ciężkie (np. uran) lub syntezując jądra najlżejsze (np. wodór).

280

Charakter rozpadu promieniotwórczego

Promieniotwórczość to samorzutna (spontaniczna) przemiana niestabilnych jąder atomowych z emisją promieniowania α, β, γ

Prawdopodobieństwo rozpadu danego jądra w określonym czasie jest stałe i niezależne od jego "wieku" (proces bezpamięciowy). Oznacza to, że zjawisko ma charakter czysto statystyczny.

Ubytek liczby jąder dN w czasie dt jest wprost proporcjonalny do liczby jąder, które jeszcze się nie rozpadły $N(t)$:

$$dN = -\lambda N(t)dt$$

Znak minus oznacza, że jąder ubywa.

Stała rozpadu λ : prawdopodobieństwo rozpadu pojedynczego jądra w jednostce czasu (jednostka: 1/s).

281

Prawo zaniku promieniotwórczego

Całkując równanie różniczkowe

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

otrzymujemy podstawowe prawo fizyki jądrowej – wykładnicze prawo zaniku promieniotwórczego

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Gdzie $N(t)$ – liczba jąder, które przetrwały po czasie t ,

N_0 – początkowa liczba jąder $t = 0$,

λ – stała rozpadu specyficzna dla danego izotopu.

282

Parametry rozpadu promieniotwórczego

Czas połowicznego zaniku $T_{1/2}$ to czas, po którym liczba jąder radioaktywnych (oraz aktywność próbki) zmniejsza się o połowę

$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2}$$

Wyznaczenie $T_{1/2}$

$$e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2} \rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0,693}{\lambda}$$

Średni czas życia jąder τ definiujemy jako

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

Związek między parametrami

$$T_{1/2} = \tau \cdot \ln 2$$

283

Aktywność promieniotwórcza cz. I

Aktywność A to szybkość rozpadu, czyli liczba jąder rozpadających się w jednostce czasu.

$$A(t) = -\frac{dN}{dt} = \lambda N(t)$$

Podobnie jak liczba jąder, aktywność maleje wykładniczo z czasem

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

Jednostki aktywności

Bekerel (Bq) [SI]: 1 Bq = 1 rozpad na sekundę.

Kiur (Ci) używana w praktyce: 1 Ci = $3,7 \times 10^{10}$ Bq. Odpowiada to aktywności 1 grama radu-226.

284

Aktywność promieniotwórcza cz. II

Aktywność A to szybkość rozpadu, czyli liczba jąder rozpadających się w jednostce czasu.

$$A(t) = -\frac{dN}{dt} = \lambda N(t)$$

Podobnie jak liczba jąder, aktywność maleje wykładniczo z czasem

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

Jednostki aktywności

Bekerel (Bq) [SI]: 1 Bq = 1 rozpad na sekundę.

Kiur (Ci) używana w praktyce: 1 Ci = $3,7 \times 10^{10}$ Bq. Odpowiada to aktywności 1 grama radu-226.

285

Reakcje jądrowe

- **Definicja:** Przemiana jądra prowadząca do zmiany jego składu A, Z lub stanu energetycznego.
- **Podział:**
 - *Samorzutne* (rozpady promieniotwórcze).
 - *Wymuszone* (wywołane zderzeniem z inną cząstką).
- **Zasady zachowania:**
 - Liczby nukleonów A i ładunku Z.
 - Pędu oraz całkowitej energii $E = mc^2$
 - Liczby leptonowej (emisja elektronów i neutronów).

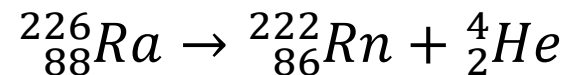
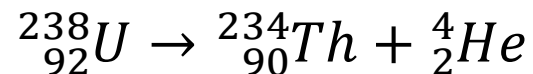
286

Rozpad α (alfa)

Mechanizm: Emisja jądra helu ${}^4_2\text{He}$. Zjawisko tłumaczone kwantowym efektem tunelowym.

Występowanie: Jądra bardzo ciężkie (liczba atomowa Z większa niż 82).

Reguła przesunięć: $A \rightarrow A - 4, Z \rightarrow Z - 2$, (nowy pierwiastek przesunięty o 2 miejsca w lewo).

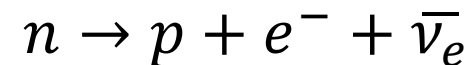


Mały zasięg (kilka cm w powietrzu, zatrzymuje go kartka), ale potężna zdolność jonizacyjna (niebezpieczny wewnętrznie).

287

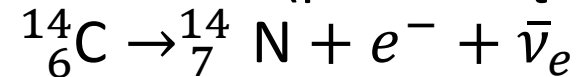
Rozpad β^- (beta minus)

Mechanizm: Rozpad neutronu w jądrze



Występowanie: Nadmiar neutronów w jądrze.

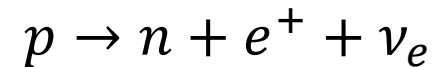
Skutek: Liczba A bez zmian, $Z \rightarrow Z + 1$ (przesunięcie o 1 miejsce w prawo).



Właściwości: Średnia przenikliwość (zasięg do kilkudziesięciu cm, osłona: cienka blacha aluminiowa lub pleksi).

Rozpad β^+ i Wychwyt Elektronu (EC)

Mechanizm: Rozpad protonu w jądrze

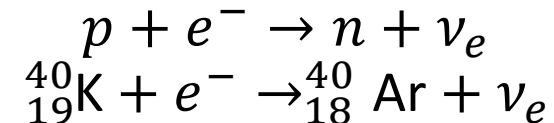


Występowanie: Nadmiar protonów w jądrze.



Właściwości: Średnia przenikliwość (zasięg do kilkudziesięciu cm, osłona: cienka blacha aluminiowa lub pleksi).

Wychwyt elektronu (EC - konkurencyjny dla β^+): Pochłonięcie elektronu z najbliższej powłoki:



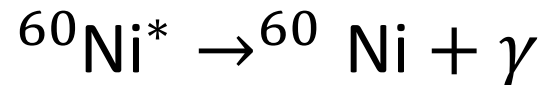
Skutek: Liczba A bez zmian, $Z \rightarrow Z - 1$ (przesunięcie o 1 miejsce w lewo).

289

Promieniowanie γ (gamma)

Wysokoenergetyczna fala elektromagnetyczna (brak masy i ładunku).

Mechanizm: Przejście jądra ze stanu wzbudzonego do podstawowego



Skutek: Skład jądra (A, Z) nie ulega zmianie.

Właściwości: Bardzo wysoka przenikliwość. Wymaga osłon z ołowiu lub grubego betonu.

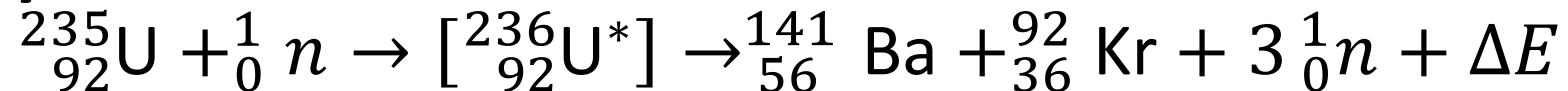
290

Rozszczepienie jąder atomowych

Zjawisko: Podział ciężkiego jądra na dwa lżejsze fragmenty z emisją 2-3 neutronów i energii.

Wzbudzenie: Najczęściej poprzez wychwyt neutronu termicznego (powolnego).

Klasyczny model:



291

Reakcja łańcuchowa i bilans energii

Energetyka: Jedno rozszczepienie daje około 200 MeV ($1 \text{ kg } ^{235}\text{U} \approx 8 \cdot 10^{13} \text{ J}$)

Współczynnik powielania neutronów k :

k mniejsze od 1: podkrytyczny (reakcja wygasa).

k równe 1: krytyczny (stabilna praca reaktora).

k większe od 1: nadkrytyczny (reakcja lawinowa / bomba).

Sterowanie w reaktorze: Moderator (spowalnia neutrony, np. woda, grafit) i pręty sterujące (pochłaniacze, np. bor, kadm).

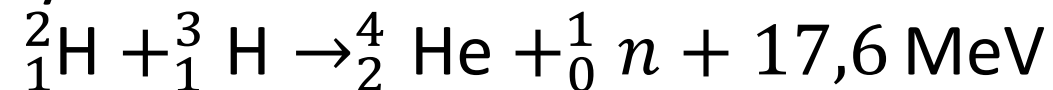
292

Fuzja jądrowa (synteza)

Zjawisko: Łączenie lekkich jąder w cięższe z wydzieleniem potężnej energii.

Bariera kulombowska: Jądra się odpychają. Do ich zbliżenia wymagana jest wysoka temperatura (temperatury rzędu dziesiątek milionów Kelwinów, stan plazmy).

Reakcja Deuter-Tryt



293

Czym zajmuje się fizyka ciała stałego?

Definicja: Dział fizyki badający właściwości fizyczne (mechaniczne, elektryczne, magnetyczne, optyczne) materii w stanie stałym.

Główne założenie: Właściwości makroskopowe wynikają z mikroskopowego układu atomów oraz oddziaływań między elektronami a siecią krystaliczną.

Kluczowe działy:

- Krystalografia (struktura).
- Elektronowa teoria metali i półprzewodników.
- Magnetyzm i nadprzewodnictwo.

Znaczenie: Fundament współczesnej elektroniki, informatyki, inżynierii materiałowej i technologii kwantowych.

Ciała amorficzne a krystaliczne

Ciała krystaliczne:

- Atomy ułożone w regularną, powtarzalną w przestrzeni strukturę (daleki porządek).
- Przykłady: metale, diament, krzem, chlorek sodu (NaCl).
- Ostra temperatura topnienia.

Ciała amorficzne (bezpostaciowe):

- Brak dalekiego porządku, ułożenie atomów przypomina zamrożoną ciecz.
- Przykłady: szkło, polimery, воск.
- Topnienie następuje stopniowo (miękną w przedziale temperatur).

Komórka elementarna: Najmniejszy powtarzalny fragment sieci krystalicznej, który przez translację buduje cały kryształ.

295

Drgania sieci – Fonony

Dynamika sieci: Atomy w kryształach nie są nieruchome; drgają wokół położenia równowagi.

Fonon: Kwant energii drgań sieci krystalicznej (quasicząstka). Podobnie jak światło składa się z fotonów, tak fale dźwiękowe/ciepłone w kryształach składają się z fononów.

Skutki fizyczne:

- Fonony odpowiadają za przewodnictwo ciepłe w izolatorach.
- Rozpraszanie elektronów na fononach (drgania sieci) jest główną przyczyną oporu elektrycznego w metalach (opór rośnie wraz z temperaturą).

296

Gaz elektronowy w metalach

Model swobodnych elektronów: Elektrony walencyjne odrywają się od atomów i poruszają się swobodnie w objętości kryształu ("gaz elektronowy"), podczas gdy jądra tworzą dodatnio naładowany rdzeń.

Poziom Fermiego: Najwyższy zajęty przez elektrony poziom energetyczny w temperaturze zera bezwzględnego $T = 0$ K.

Przewodnictwo: Zewnętrzne pole elektryczne łatwo przyspiesza elektrony, które mają energię bliską E_F , generując prąd elektryczny.

297

Twierdzenie Blocha i Teoria pasmowa

Dlaczego nie wszystkie ciała przewodzą prąd? Wyjaśnia to mechanika kwantowa. W kryształach, ze względu na periodyczny potencjał sieci (Twierdzenie Blocha), dozwolone energie elektronów grupują się w pasma.

Pasmo walencyjne: Najwyższe pasmo całkowicie (lub prawie całkowicie) wypełnione elektronami. Elektrony tutaj wiążą atomy, nie przewodzą prądu.

Pasmo przewodnictwa: Pasmo leżące wyżej, częściowo puste. Elektrony, które się tu dostaną, mogą swobodnie przemieszczać się i przewodzić prąd.

Przerwa energetyczna E_g : Zakazane pasmo energii między pasmem walencyjnym a przewodnictwem.

298

Przewodniki, izolatory, półprzewodniki

Podział materiałów opiera się na szerokości przerwy energetycznej E_g :

Przewodniki (Metale): Pasmo walencyjne i przewodnictwa nakładają się na siebie $E_g = 0$ eV. Elektrony swobodnie przepływają.

Izolatory (Dielektryki): Bardzo szeroka przerwa energetyczna $E_g > 4$ eV. Elektrony nie mają szans przeskoczyć do pasma przewodnictwa.

Półprzewodniki: Wąska przerwa energetyczna $E_g \approx 1$ eV, np. Si: 1,1 eV. W $T = 0$ K są izolatorami, ale w temperaturze pokojowej energia termiczna przerzuca część elektronów do pasma przewodnictwa.

Półprzewodniki – dziury i domieszkowanie

Półprzewodnik samoistny (czysty): Każdy elektron, który awansuje do pasma przewodnictwa, zostawia w paśmie walencyjnym puste miejsce – dziurę (traktowaną jak ładunek dodatni). Przewodnictwo zależy od pary elektron-dziura.

Domieszkowanie: Celowe wprowadzanie atomów innych pierwiastków w celu drastycznej zmiany przewodnictwa.

Typ N (Negative - np. fosfor w krzemie): Domieszka ma więcej elektronów walencyjnych. Oddaje dodatkowy elektron do pasma przewodnictwa (Donor). Główny nośnik: elektrony.

Typ P (Positive - np. bor w krzemie): Domieszka ma mniej elektronów. Zabiera elektron z krzemu, tworząc wolną dziurę (Akceptor). Główny nośnik: dziury.

300

Złącze p-n i Dioda

Złącze p-n: Fizyczne połączenie półprzewodnika typu P i typu N.

Warstwa zaporowa (zubożona): Na granicy elektrony z N wpadają w dziury z P. Powstaje bariera potencjału, która blokuje dalszy ruch ładunków.

Dioda: Element elektroniczny przewodzący prąd tylko w jedną stronę.

Kierunek przewodzenia: Plus zasilania do P, minus do N – niweluje barierę, prąd płynie.

Kierunek zaporowy: Odwrotne podłączenie – poszerza barierę, prąd nie płynie.

Zastosowanie: Prostowniki, diody świecące (LED).

Tranzystor (Klucz do informatyki)

Tranzystor: Element sterujący przepływem prądu – elektroniczny przełącznik lub wzmacniacz.

Bipolarny: Trzy warstwy (np. N-P-N). Mały prąd bazy (B) steruje dużym prądem między kolektorem (C) a emiterem (E).

MOSFET (Unipolarny): Podstawa dzisiejszych procesorów.

- Bramka (Gate) jest izolowana.
- Napięcie na bramce wytwarza pole elektryczne, które otwiera "kanał" dla prądu między źródłem (Source) a drenem (Drain).

Logika binarna: Brak prądu na bramce = stan 0. Napięcie na bramce = stan 1.

302

Magnetyzm ciał stałych

Właściwości magnetyczne wynikają z momentów magnetycznych elektronów (spin).

Diamagnetyki: Wypychają pole magnetyczne (np. woda, miedź, bizmut). Brak niesparowanych elektronów.

Paramagnetyki: Słabo przyciągane przez pole (np. aluminium). Niesparowane elektrony, ale ich momenty są ułożone chaotycznie.

Ferromagnetyki: Bardzo silnie reagują na pole i zachowują namagnesowanie (np. żelazo, kobalt, nikiel).

Domeny magnetyczne: Obszary, w których momenty magnetyczne elektronów są spontanicznie ułożone w jednym kierunku.

Temperatura Curie: Temperatura, powyżej której ferromagnetyk staje się paramagnetykiem (rozpad domen przez drgania termiczne).

303

Nadprzewodnictwo

Zjawisko: Całkowity zanik oporu elektrycznego $R = 0\Omega$ w materiale schłodzonym poniżej tzw. temperatury krytycznej T_c .

Pary Coopera (Teoria BCS): W niskich temperaturach elektrony nie odpychają się, lecz za pośrednictwem drgań sieci krystalicznej (fononów) łączą się w pary. Para taka przemieszcza się bez strat energii.

Efekt Meissnera: Nadprzewodnik idealnie wypycha ze swego wnętrza pole magnetyczne (lewitacja magnetyczna).

Zastosowania: Rezonans magnetyczny (MRI), Maglev (pociągi lewitujące), komputery kwantowe (kubity nadprzewodzące).

304

Struktury niskowymiarowe (Materiały 2D)

Kwantowanie wymiarowe: Kiedy rozmiar kryształu spada do rzędu nanometrów, prawa fizyki klasycznej ustępują mechanice kwantowej.

Kropki kwantowe (0D): "Sztuczne atomy". Zależnie od ich rozmiaru emitują światło o różnej barwie (zastosowanie w ekranach QLED, medycynie).

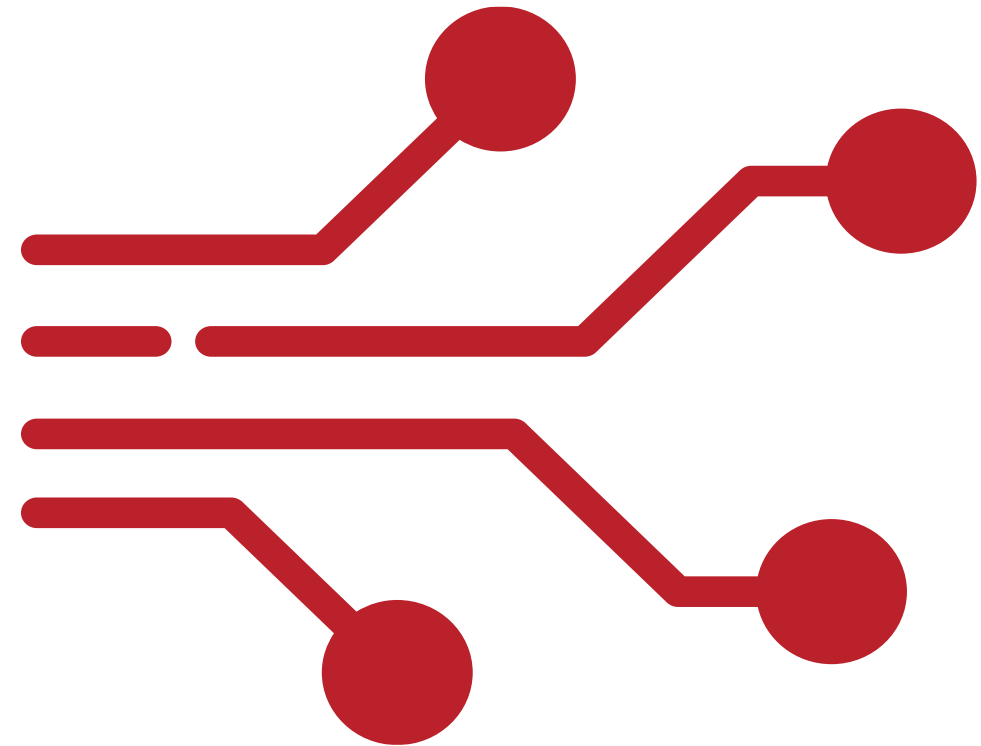
Grafen (2D): Pojedyncza warstwa atomów węgla (heksagonalna sieć).
Ekstremalna wytrzymałość mechaniczna.

Praktycznie brak oporu dla elektronów w temperaturze pokojowej.

Elektrony zachowują się jak cząstki bezmasowe (fermiony Diraca).

305

Elementy mechaniki kwantowej



306

Elementy mechaniki kwantowej cz. I

Elementy mechaniki kwantowej stanowią opis zjawisk zachodzących w skali atomowej i subatomowej, gdzie prawa fizyki klasycznej przestają być słuszne. Centralnym punktem jest dualizm korpuskularno-falowy, zakładający, że wszystkie obiekty kwantowe, w tym elektrony i fotony, wykazują zarówno cechy cząstek, jak i fal. Zjawisko to opisuje hipoteza de Broglie'a, wiążąca pęd cząstki z jej długością fali.

307

Elementy mechaniki kwantowej cz. II

Kluczowym narzędziem matematycznym jest funkcja falowa, której kwadrat modułu określa gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w danym punkcie przestrzeni, co odróżnia mechanikę kwantową od deterministycznej mechaniki klasycznej. Zasada nieoznaczoności Heisenberga stanowi kolejny fundament, wprowadzając fundamentalne ograniczenie dokładności jednoczesnego pomiaru położenia i pędu cząstki. Ewolucję stanu układu kwantowego w czasie opisuje równanie Schrödingera, które prowadzi do zjawiska kwantowania poziomów energetycznych w układach ograniczonych, takich jak atom wodoru. Mechanika kwantowa nie tylko wyjaśnia stabilność atomów, ale stanowi podstawę działania nowoczesnych technologii, w tym laserów, tranzystorów oraz technologii kwantowych.

308

Rys historyczny – Kryzys fizyki klasycznej

Na przełomie XIX i XX wieku fizyka klasyczna (Newtona i Maxwella) nie potrafiła wyjaśnić zjawisk w skali mikro:

- **Promieniowanie ciała doskonale czarnego (1900):** Max Planck rozwiązuje problem "katastrofy w nadfiolecie" zakładając, że energia jest emitowana w porcjach (kwantach): $E = h\nu$
- **Efekt fotoelektryczny (1905):** Albert Einstein dowodzi, że światło zachowuje się jak strumień cząstek (fotonów) wybijających elektrony z metalu.
- **Model atomu Bohra (1913):** Elektrony krążą tylko po ściśle określonych, skwantowanych orbitach (nie promieniując tracą energii).

309

Dualizm korpuskularno-falowy

Hipoteza de Broglie'a (1924): Skoro fale świetlne (fotony) mają właściwości cząstek, to cząstki materialne (np. elektrony) muszą mieć właściwości falowe.

Fale materii: Z każdą cząstką o pędzie p związana jest fala o długości λ :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

Wniosek: W mikroświecie zacierają się granice między falą a cząstką. Stan układu nie jest już opisywany przez pozycję i prędkość, lecz przez *falę prawdopodobieństwa*.

310

Postulaty mechaniki kwantowej (I i II)

Funkcja falowa: Stan układu opisuje zespolona funkcja falowa $\Psi(\mathbf{r}, t)$. Sama w sobie nie ma sensu fizycznego.

Interpretacja probabilistyczna (Born): Moduł funkcji podniesiony do kwadratu to gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki:

$$|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$$

Zasada superpozycji: Jeśli Ψ_1 i Ψ_2 to możliwe stany układu, to ich dowolna kombinacja liniowa również jest prawidłowym stanem:

$$\Psi = c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2 + \dots + c_n\Psi_n$$

Suma prawdopodobieństw przebywania w tych stanach musi wynosić 1:

$$\sum |c_n|^2 = 1$$

311

Postulaty mechaniki kwantowej (III i IV)

Operator: Każdej wielkości fizycznej (mierzalnej) odpowiada operator matematyczny.

Operator pędu: $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

Operator energii (Hamiltonian): $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$

Równanie Schrödingera (Postulat dynamiki): Opisuje ewolucję stanu układu w czasie (kwantowy odpowiednik II zasady dynamiki Newtona):

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$$

312

Właściwości funkcji falowej

Aby rozwiązanie równania miało sens fizyczny, Ψ musi spełniać rygorystyczne warunki:

- **Normalizacja:** Prawdopodobieństwo znalezienia cząstki gdziekolwiek w przestrzeni wynosi 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r = 1$$

- **Ciągłość:** Funkcja oraz jej pierwsza pochodna muszą być ciągłe i jednoznaczne.
- **Zanikanie:** Gdy odległość zmierza do nieskończoności $r \rightarrow \infty$, funkcja $\Psi \rightarrow 0$.
- **Wartość oczekiwana:** Średnia z wielu pomiarów wielkości A wynosi:

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \hat{A} \Psi d^3r$$

313

Zasada nieoznaczoności Heisenberga

Fundamentalne ograniczenie natury (nie wynika z niedoskonałości sprzętu pomiarowego!).

Nie można jednocześnie, z absolutną dokładnością, wyznaczyć położenia x i pędu p cząstki:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Konsekwencje: Brak klasycznych trajektorii lotu cząstki (elektron nie "krąży" wokół jądra jak planeta, jest raczej rozmytą "chmurą prawdopodobieństwa").

314

Spin elektronu

Spin jest to wewnętrzny, ściśle kwantowy moment pędu cząstki elementarnej. Nie ma klasycznego odpowiednika (to nie jest fizyczny obrót cząstki wokół własnej osi!).

Dla elektronu spin przyjmuje zawsze wartość połówkową:

$$s = \frac{1}{2} \text{ (w jednostkach } \hbar \text{)}$$

W polu magnetycznym spin elektronu może przyjąć tylko dwa stany rzutu: w górę (+1/2) lub w dół (-1/2).

Cząstki o spinie połówkowym (elektrony, protony, neutrony) nazywamy fermionami.

Zakaz Pauliego

Dwa fermiony w jednym układzie kwantowym (np. w jednym atomie) nie mogą znajdować się w identycznym stanie kwantowym.

W praktyce: elektrony muszą różnić się przynajmniej jedną liczbą kwantową (najczęściej różnią się właśnie rzutem spinu: jeden elektron "w górę", drugi "w dół").

Konsekwencje:

- Odpowiada za rozbudowę powłok elektronowych i układ okresowy pierwiastków (cała chemia!).
- Gdyby nie zakaz Pauliego, wszystkie elektrony "spadłyby" na najniższy poziom energetyczny, a struktura materii, jaką znamy, by nie istniała.

316

Splątanie kwantowe i nielokalność

Zjawisko: Dwie (lub więcej) cząstki mogą zostać ze sobą tak silnie powiązane, że tracą swoją indywidualność. Opisuje je jedna, wspólna funkcja falowa, niezależnie od tego, jak daleko od siebie się znajdują.

Stan Bella (przykład matematyczny):

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

(Stan, w którym spiny dwóch elektronów są zawsze przeciwne, ale dopóki nie dokonamy pomiaru, żaden z nich nie ma ustalonego kierunku).

Upierne działanie na odległość (Einstein): Pomiar stanu jednej cząstki natychmiast i deterministycznie określa stan drugiej, łamiąc klasyczne wyobrażenie o lokalności fizyki.

Zastosowania w cyberbezpieczeństwie: Kwantowa dystrybucja klucza (QKD) – każda próba podsłuchania transmisji bezpowrotnie niszczy splątanie, co natychmiast alarmuje komunikujące się strony.

Kubit – kwantowa jednostka informacji

Bit klasyczny a Kubit: Klasyczny bit w procesorze przyjmuje wartość albo 0, albo 1. Kubit (kwantowy bit) dzięki zasadzie superpozycji znajduje się w obu tych stanach jednocześnie.

Zapis matematyczny: Stan kubitów $|\psi\rangle$ to kombinacja liniowa stanów bazowych $|0\rangle$ i $|1\rangle$:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

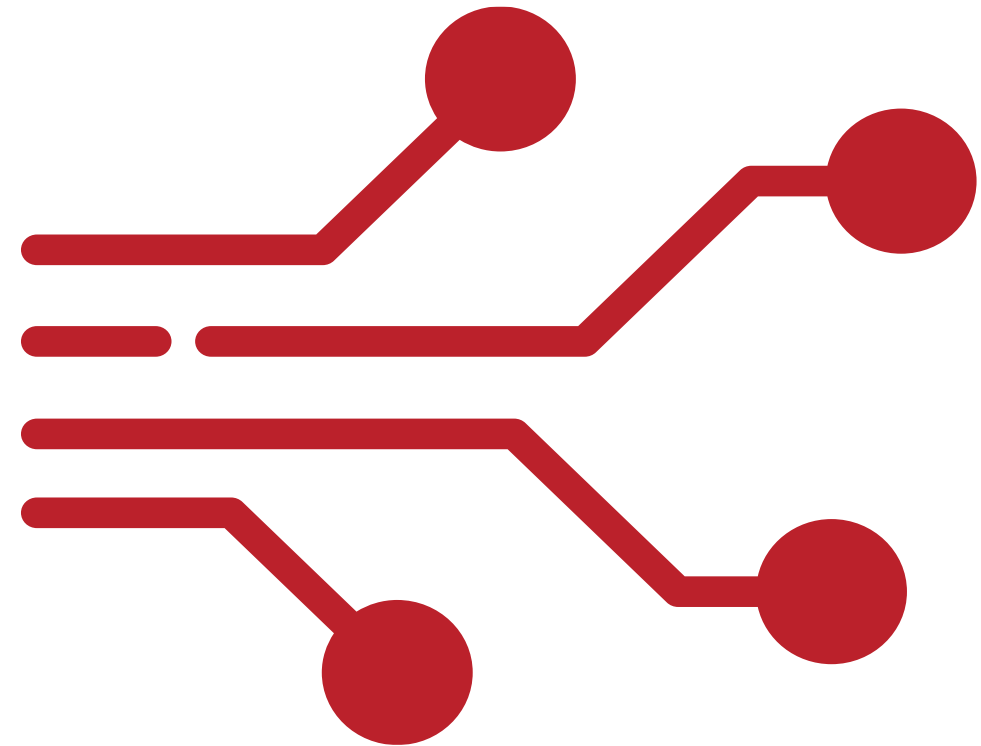
Gdzie α i β to liczby zespolone (amplitudy prawdopodobieństwa),
a $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

Sfera Blocha: Geometryczna reprezentacja kubitów. Stan klasyczny to tylko bieguny sfery (północny i południowy). Stan kwantowy to dowolny punkt na powierzchni całej sfery.

Eksponencjalna moc: N klasycznych bitów to jedna z 2^N wartości. Układ N splątanych kubitów reprezentuje wszystkie 2^N stanów naraz, umożliwiając potężne zrównoleglenie obliczeń.

318

Pomiar i analiza danych pomiarowych



319

Pomiar i analiza danych pomiarowych oraz rola symulacji komputerowych w fizyce cz. I

Dział ten dotyczy metodologii naukowej, stanowiącej fundament doświadczalnej fizyki. Pomiar jest procesem przypisania wartości liczbowej wielkości fizycznej za pomocą określonego wzorca i przyrządu. Każdy pomiar jest obarczony niepewnością, wynikającą z niedoskonałości aparatury, metodologii oraz czynników środowiskowych. Analiza danych pomiarowych polega na statystycznym opracowaniu wyników, w tym na szacowaniu niepewności standardowej, stosowaniu regresji liniowej do wyznaczania zależności funkcyjnych oraz identyfikacji błędów systematycznych i przypadkowych. Precyzyjna analiza statystyczna pozwala na weryfikację hipotez oraz ocenę zgodności wyników eksperymentalnych z przewidywaniami teoretycznymi.

320

Pomiar i analiza danych pomiarowych oraz rola symulacji komputerowych w fizyce cz. II

Rola symulacji komputerowych we współczesnej fizyce wykracza poza tradycyjne obliczenia numeryczne, stając się trzecim filarem badań obok teorii i eksperymentu. Symulacje umożliwiają badanie układów zbyt złożonych dla analitycznych rozwiązań matematycznych, takich jak dynamika płynów, ewolucja układów gwiazdowych czy zachowanie złożonych struktur molekularnych. Wykorzystanie metod numerycznych, takich jak metody Monte Carlo czy metody elementów skończonych, pozwala na modelowanie procesów fizycznych w wirtualnych środowiskach, co znacząco obniża koszty badań i pozwala na przeprowadzanie eksperymentów w warunkach ekstremalnych, niemożliwych do osiągnięcia w laboratorium. Symulacje nie tylko wspierają interpretację danych, ale także pozwalają na generowanie nowych przewidywań, które mogą być następnie weryfikowane w rzeczywistych eksperymentach.

321

Istota pomiaru w fizyce

Teoria a rzeczywistość: W fizyce żadna teoria nie ma wartości naukowej, dopóki nie zostanie poparta pomiarem. Pomiar stanowi jedyny pomost między matematycznym modelem a obiektywną rzeczywistością fizyczną.

Definicja pomiaru: To zbiór operacji mających na celu wyznaczenie wartości wielkości mierzonej i przypisanie jej liczby wraz ze stosowną jednostką miary (np. w układzie SI).

Aksjomat metrologii: Prawdziwa wartość wielkości mierzonej x_{rzecz} jest ze swej natury niepoznawalna. Wynik pomiaru jest jedynie jej najlepszym matematycznym przybliżeniem (estymatą). Pomiar bez określenia jego dokładności (niepewności) jest bezużyteczny.

322

Pomiary bezpośrednie i pośrednie

Pomiary bezpośrednie:

- Wielkość fizyczna odczytywana jest bezpośrednio ze skali lub wyświetlacza przyrządu pomiarowego (np. pomiar długości suwmiarką, natężenia prądu amperomierzem, czasu stoperem).

Pomiary pośrednie:

- Wartość wielkości fizycznej y wyznaczana jest na podstawie pomiarów bezpośrednich innych wielkości $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, z którymi jest powiązana znaną funkcją matematyczną:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Przykłady: wyznaczanie gęstości ze stosunku masy do objętości, modułu Younga z wydłużenia drutu, czy przyspieszenia ziemskiego z okresu drgań wahadła.

323

Klasyfikacja błędów pomiarowych

Błędy grube (omyłki): Wynikają z nieuwagi eksperymentatora, niewłaściwego użycia przyrządu lub nagłej zmiany warunków zewnętrznych. Należy je zidentyfikować i bezwzględnie odrzucić z analizy statystycznej.

Błędy systematyczne: Wprowadzają przesunięcie wyniku w jedną stronę względem wartości prawdziwej. Ich źródłem jest m.in. zła kalibracja sprzętu, "błąd zera" przyrządu czy wpływ zjawisk nieuwzględnionych w modelu (np. tarcie). Nie można ich wyeliminować statystycznie.

Błędy przypadkowe (losowe): Powstają wskutek działania ogromnej liczby niezależnych, drobnych i niekontrolowanych czynników (np. fluktuacje termiczne). Mają charakter stochastyczny i podlegają prawom statystyki wielkich liczb (zazwyczaj rozkład normalny Gaussa).

324

Od błędu do niepewności pomiarowej

Nowoczesne podejście (ISO GUM): Zgodnie ze standardem *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, odchodzi się od pojęcia "błędu prawdziwego" (którego nie znamy) na rzecz niepewności pomiarowej (Uncertainty).

Niepewność standardowa: Miara rozrzutu wyników wokół wartości oczekiwanej, odpowiadająca matematycznie odchyleniu standardowemu.

Typy szacowania niepewności:

- **Metoda Typu A:** Oparta na analizie statystycznej serii pomiarowej.
- **Metoda Typu B:** Oparta na naukowym osądzie eksperymentatora, informacjach producenta sprzętu (klasa przyrządu, działka elementarna) i założonym rozkładzie prawdopodobieństwa.

325

Szacowanie niepewności - Metoda Typu A

Zastosowanie: Gdy wykonano serię N niezależnych pomiarów ($N \geq 2$, im więcej, tym lepiej) w tych samych warunkach. Reprezentuje błędy przypadkowe.

Najlepsza estymata: Średnia arytmetyczna z serii pomiarowej $\bar{x}$

Ocena niepewności: Niepewność standardową typu A, oznaczaną jako $u_A(x)$, definiuje się jako odchylenie standardowe średniej arytmetycznej:

$$u_A(x) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

Wniosek: Precyzję pomiaru (redukcję błędu losowego) można poprawiać poprzez zwiększenie liczby powtórzeń N .

326

Szacowanie niepewności - Metoda Typu B

Zastosowanie: Pomiar pojedynczy (lub seria, w której rozrzut jest mniejszy niż rozdzielczość przyrządu). Dotyczy niepewności systematycznej wnoszonej przez aparaturę.

Założenia: Zakładamy równomierny rozkład prawdopodobieństwa błędu w przedziale $\pm \Delta_x$, gdzie Δ_x to najmniejsza podziałka przyrządu lub błąd określony przez jego klasę dokładności.

Odchylenie standardowe dla rozkładu równomiernego wyraża się wzorem:

$$u_B(x) = \frac{\Delta_x}{\sqrt{3}}$$

Całkowita niepewność pomiaru bezpośredniego: Jeśli występują oba typy, obliczamy niepewność standardową złożoną

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

327

Analiza zmiennych pośrednich – wprowadzenie

Problem: Jeżeli obliczamy wielkość $y = f(x_1, x_2)$, jak niepewności pomiarów bezpośrednich Δx_1 i Δx_2 wpływają na końcowy wynik?

Nieliniowość: Zwykłe dodawanie błędów jest błędem metodologicznym. Funkcja może różnie reagować na zmiany poszczególnych zmiennych (stromość funkcji).

Wrażliwość (pochodne): Aby zbadać, jak "czuła" jest funkcja f na błąd zmiennej x_i , stosujemy pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Mamy dwa klasyczne modele - różniczkę zupełną i Prawo Gaussa.

328

Metoda Różniczki Zupełnej

Szacowanie maksymalnego błędu bezwzględnego. Jest to podejście skrajnie pesymistyczne.

Błędy od poszczególnych zmiennych mają ten sam znak i "sumują się", odsuwając wynik maksymalnie w jedną stronę od wartości prawdziwej.

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

Współcześnie zalecana głównie wtedy, gdy dominują błędy systematyczne lub w bardzo restrykcyjnych projektach inżynierskich, gdzie przekroczenie błędu skutkuje katastrofą. Zwykle mocno przeszacowuje rzeczywistą niepewność.

329

Analiza dużych serii danych – Statystyczny model Gaussa cz. I

Prawo wielkich liczb i rozkład normalny: Gdy liczba niezależnych pomiarów N jest odpowiednio duża (zwyczajowo $N \geq 30$), zmienność błędów przypadkowych zaczyna podlegać statystyce rozkładu normalnego (krzywej dzwonowej Gaussa). Funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest w nim symetryczna względem wartości oczekiwanej.

Estymata wartości prawdziwej: Średnia arytmetyczna z próby $\bar{x}$.

Rozrzut pojedynczego pomiaru: Odchylenie standardowe próby S_x .
Mówi o tym, jak bardzo pojedynczy pomiar odchyła się od średniej:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

330

Analiza dużych serii danych – Statystyczny model Gaussa cz. II

Błąd wyniku końcowego (Odchylenie standardowe średniej): Z dydaktycznego punktu widzenia kluczowe jest rozróżnienie: niepewnością ostatecznego wyniku $\bar{x}$ nie jest S_x , lecz odchylenie standardowe *średniej* $S_{\bar{x}}$, malejące wraz ze wzrostem liczby pomiarów

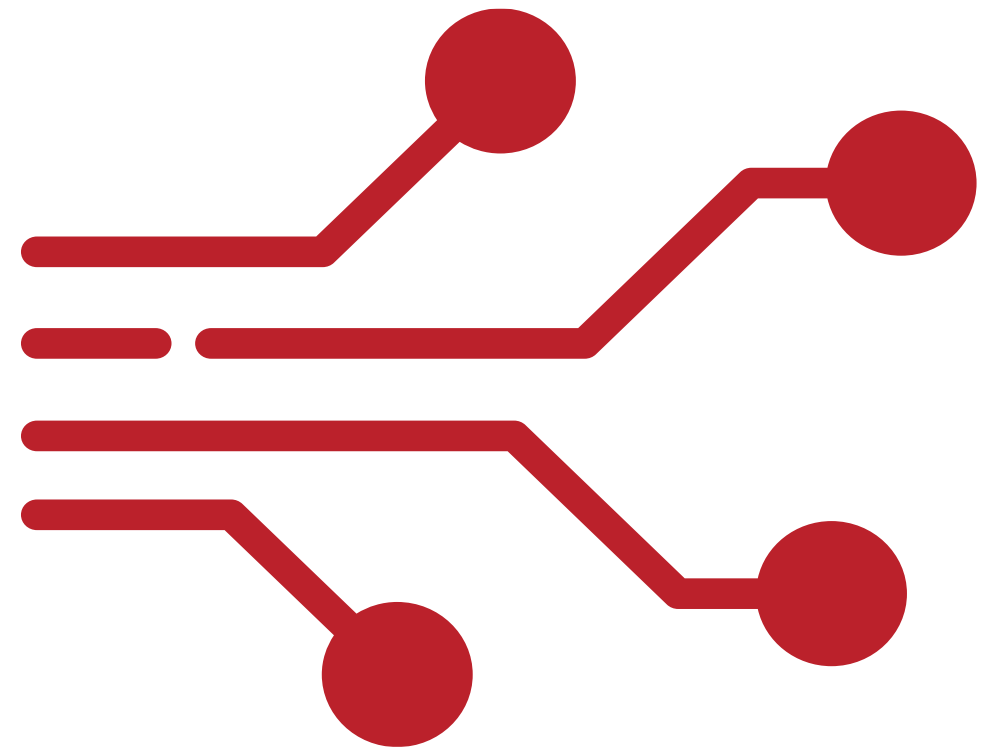
$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{N}}$$

Dla dużych serii pomiarowych podlegających statystyce Gaussa możemy precyzyjnie określić prawdopodobieństwo, z jakim prawdziwa wartość znajduje się w danym przedziale

- Przedział $[\bar{x} - S_{\bar{x}}, \bar{x} + S_{\bar{x}}]$ (tzw. $\pm 1\sigma$) obejmuje $\sim 68,3\%$ rozkładu.
- Przedział $[\bar{x} - 2S_{\bar{x}}, \bar{x} + 2S_{\bar{x}}]$ (tzw. rozszerzona niepewność pomiarowa) daje pewność rzędu $\sim 95,4\%$.
- Przedział $\pm 3\sigma$ to $\sim 99,7\%$ (wyniki poza nim traktuje się w fizyce jako błędy grube i odrzuca).

331

Rola symulacji komputerowych w fizyce



332

Symulacje komputerowe – Numeryczne rozwiązywanie praw natury

Istota symulacji: Prawa fizyki najczęściej przyjmują postać równań różniczkowych, których nie da się rozwiązać analitycznie. Symulacja to proces przekształcenia ciągłego problemu fizycznego na dyskretny problem algebraiczny zrozumiały dla procesora.

Kiedy stosujemy symulacje?

- Zjawiska nieliniowe, zbyt skomplikowane matematycznie (np. układ trzech ciał, turbulencje).
- Eksperymenty niebezpieczne lub skrajnie kosztowne (prototypowanie cyfrowe).
- Procesy w warunkach ekstremalnych (wnętrza gwiazd, plazma termojądrowa).

Podstawowe algorytmy całkowania równań ruchu:

- **Metoda Eulera:** Najprostsza, oparta na aproksymacji liniowej. Zbyt niska precyzja (błąd rzędu $O(h^2)$) powoduje szybkie kumulowanie się błędów numerycznych.
- **Metoda Rungego-Kutty 4. rzędu (RK4):** Absolutny "wół roboczy" fizyki obliczeniowej. Oferuje znakomity kompromis między wydajnością a dokładnością (błąd lokalny $O(h^5)$), standard w rozwiązywaniu równań różniczkowych zwyczajnych (ODE).

333

Badania zjawisk skomplikowanych i dynamika płynów

Obszar badań: Modelowanie pogody, propagacja fal, turbulencje w cieczach, dynamika plazmy.

Wyzwanie: Rozwiązywanie sprzężonych równań różniczkowych cząstkowych (np. równania Naviera-Stokesa), charakteryzujących się silną nieliniowością (efekt motyla w układach chaotycznych).

Kluczowe algorytmy i metody:

- **Metoda Różnic Skończonych (FDM):** Aproksymacja pochodnych na regularnej siatce za pomocą ilorazów różnicowych.
- **Metoda Objętości Skończonych (FVM):** Standard w mechanice płynów (CFD). Przestrzeń dzieli się na komórki, a równania formułuje w oparciu o prawo zachowania masy, pędu i energii przepływających przez ich ściany.
- **Particle-in-Cell (PIC):** Metoda hybrydowa, niezastąpiona w fizyce plazmy (np. w badaniach nad fuzją). Śledzi ruch naładowanych cząstek w ciągłym polu elektromagnetycznym.

334

Fizyka cząstek elementarnych i reakcje jądrowe

Obszar badań: Eksperymenty w akceleratorach (LHC), projektowanie osłon radiacyjnych, modelowanie syntezy termojądrowej i rozszczepienia. Pozwalają przewidzieć produkty zderzeń i zaplanować czułość detektorów.

Wyzwanie: Natura procesów na poziomie subatomowym jest czysto probabilistyczna (kwantowa). Deterministyczne algorytmy (jak RK4) są tu bezużyteczne.

Kluczowe algorytmy i metody:

- **Metody Monte Carlo:** Podstawa fizyki wysokich energii (m.in. potężny toolkit **Geant4** z CERN). Odtwarzają trajektorie cząstek wykorzystując generatory liczb pseudolosowych i znane rozkłady prawdopodobieństwa przekrojów czynnych. Zliczenie milionów takich "losowych" ścieżek daje ostateczny, mierzalny rozkład zjawiska.

335

Fizyka materii skondensowanej i nanostruktur

Obszar badań: Właściwości mechaniczne, optyczne i magnetyczne ciał stałych, kryształów oraz nanostruktur (np. grafenu, nanorurek węglowych). Badanie przejść fazowych.

Wyzwanie: Zrozumienie, jak makroskopowe właściwości materiału (np. wytrzymałość) wynikają z oddziaływań kwantowych na poziomie sieci krystalicznej.

Kluczowe algorytmy i metody:

- **Teoria Funkcjonału Gęstości (DFT):** Algorytm pozwalający na obliczenie struktury elektronowej układu wielu ciał. Zamiast liczyć skomplikowane funkcje falowe wszystkich elektronów, operuje na ich gęstości przestrzennej.
- **Metoda Elementów Skończonych (MES / FEM):** Dominująca w projektowaniu inżynierskim. Dzieli skomplikowaną geometrię (np. nanorurkę) na tysiące prostych brył (elementów skończonych), sprowadzając problem do rozwiązania ogromnych układów równań liniowych.

336

Fizyka środowiskowa i energetyczna

Obszar badań: Symulowanie rdzeni reaktorów (przepływ ciepła i dystrybucja neutronów), inżynieria klimatu, optymalizacja farm wiatrowych, paneli solarnych i procesów ładowania magazynów energii.

Wyzwanie: Modelowanie sprzężone (Multiphysics). Przykładowo: reakcja jądrowa wydziela ciepło, ciepło zmienia gęstość chłodziwa, a gęstość chłodziwa wpływa z powrotem na reakcję jądrową.

Kluczowe algorytmy i metody:

- **Monte Carlo N-Particle (MCNP):** Branżowy standard do precyzyjnego śledzenia zachowania neutronów i promieniowania gamma w złożonych układach geometrycznych reaktora.
- **Algorytmy sprzężone (np. termodynamika + mechanika płynów):** Symulacje iteracyjne, gdzie wynik numeryczny jednej dziedziny w danej klatce czasu stanowi warunek brzegowy dla drugiej.

337

Chemia kwantowa i Dynamika Molekularna (MD)

Obszar badań: Projektowanie leków (drug design), analiza konformacyjna białek i polimerów. Obliczanie energii, polarność i badanie oddziaływań, ciśnienia i temperatury bez fizycznego laboratorium.

Wyzwanie: Śledzenie ruchu milionów pojedynczych atomów w czasie, z zachowaniem fundamentalnych praw termodynamiki układu.

Kluczowe algorytmy i metody:

- **Integratory symplektyczne (Algorytm Verleta / Leapfrog):** Standard w Dynamice Molekularnej. W przeciwieństwie do Eulera czy RK4, te algorytmy zachowują całkowitą energię mechaniczną układu (nie "pompują" ani nie "gubią" energii z upływem tysięcy kroków czasowych).
- **Metoda Hartree-Focka:** Klasyczna metoda iteracyjna obliczania funkcji falowych i energii układów kwantowych, stanowiąca punkt wyjścia do bardziej zaawansowanych algorytmów (np. post-Hartree-Fock w chemii obliczeniowej).

338

Literatura cz. I

- Orear J., Fizyka, tomy 1–2, Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa 2015.
- Halliday D., Resnick R., Walker J., Podstawy fizyki, t. 1,2,3,4 i 5, PWN, Warszawa (wszystkie roczniki).
- Richard P. Feynman, Leighton Robert B., Matthew Sands, Feynmana wykłady z fizyki, t. 1.1, 1.2, 2.1, 2.2, 3, PWN, Warszawa (wszystkie roczniki).
- D.J. Griffiths, D.F. Schroeter. Wstęp do mechaniki kwantowej. 1. wyd. Wyd. Naukowe PWN, 2021.

339

Literatura cz. II

- Jędrzejewski J., Kruczek W., Kujawski A., Zbiór zadań z fizyki, tomy 1–2, Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa (wszystkie roczniki)
- Massalski J., Massalska M., Fizyka dla inżynierów 1, fizyka klasyczna, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1980
- Massalski J., Fizyka dla inżynierów 2, fizyka współczesna, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1971
- Jeżewski M., Fizyka, Wydawnictwo PWN 1970.
- Taylor J.R.: Wstęp do analizy błędu pomiarowego. Warszawa: PWN, 1999.

340

Dziękuję za uwagę